





Received: 26.11.2019
Revised: 24.01.2020
Accepted: 21.02.2020
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023

AN EXACT SOLUTION FOR DESCRIBING THE UNIDIRECTIONAL MARANGONI FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITH THE NAVIER BOUNDARY CONDITION. TEMPERATURE FIELD INVESTIGATION

N. V. Burmasheva^{a)*}, E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Urals Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: nat_burm@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: 374 53 30

A new exact solution of the Oberbeck–Boussinesq equation system, which describes the unidirectional convective flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer, is obtained. The fluid velocity depends on the vertical (transverse) coordinate. Pressure and temperature are the linear forms relative to the horizontal (longitudinal) coordinate with coefficients depending on the vertical coordinate. The fluid layer is bounded by a rigid infinite plane (lower boundary). In the study of fluid convection, it is assumed that the deformation of the free (upper) boundary of the layer is neglected. The thermocapillary effect inducing a convective flow is taken into account at the upper boundary. The contact of the moving fluid with the lower boundary occurs with slippage. The fluid slippage is described by the Navier boundary slip condition. The paper focusses on the study of the temperature field, which is spatially inhomogeneous. The temperature field is a seventh-degree polynomial with respect to the vertical coordinate. When studying the temperature distribution in the fluid layer, particular cases of the Navier slip condition are discussed. At the zero slip length, the boundary condition is transformed into the no-slip condition. When the slip length tends to infinity, there is a perfect slip boundary condition. It is demonstrated that the temperature field can be stratified into several zones relative to the reference value. In all the considered cases, the number of stratification zones does not exceed two. It is also shown that, in the case of perfect slip, the number of temperature field stratification zones is strictly equal to two, and the position of the temperature field stratification point depends neither on the physical parameters of the fluid nor on the conditions of heating of its boundaries.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq equation system, unidirectional flow, layered flow, exact solution, Marangoni convection, counterflows, Navier slip condition Acknowledgment.

References

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids: Israel Program for Scientific Translations*. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 p.
2. Pukhnachov V.V. Hierarchy of models in the theory of convection. *J. Math. Sci.*, 2004, vol. 123, no. 6, pp. 4607–4620. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64.
3. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An Exact Solution to the Description of a Unidirectional Marangoni Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition. Velocity Field Investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 5, pp. 23–39. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039.

4. Petrov A.G. Exact solution of the Navier–Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 642–646. DOI: 10.1134/S0021894412050021.
5. Baranovskiy E.S., Artemov E.A. On the stationary flow of second-order fluids in a channel. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 342–353. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401. (In Russian).
6. Knyazev D.V., Kolpakov I.Y. The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 89–97. DOI: 10.20537/nd1501004. (In Russian).
7. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 2 (28), pp. 35–44. (In Russian).
9. Bharat Bhushan. Adhesion and Stiction: Mechanisms, Measurement Techniques, and Methods for Reduction. *Journal of Vacuum Science & Technology B Microelectronics and Nanometer Structures*, 2003, vol. 21, no. 6, pp. 2262–2296. DOI: 10.1116/1.1627336.
10. Dement'ev O.N. Effect of convection on the stability of a liquid with a nonuniformly distributed heavy admixture. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol., 41, iss. 5, pp. 923–929. DOI: 10.1007/BF02468739.
11. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
12. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 32–41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41. (In Russian).
13. Aristov S.N., Knyazev D.V. Three-dimensional viscous jet flow with plane free boundaries. *Fluid Dynamics*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 215–218. DOI: 10.1134/S0015462817020053.
14. Aristov S.N., Shvarts K.G. Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
15. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Modeling of three dimensional thermocapillary flows with evaporation at the interface based on the solutions of a special type of the convection equations. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 62, pp. 145–162. DOI: 10.1016/j.apm.2018.05.021.
16. Bekezhanova V.B., Rodionova A.V. Longwave stability of two-layer fluid flow in the inclined plane. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 6, pp. 723–736. DOI: 10.1134/S0015462815060010.
17. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, vol. 130, pp. 323–332. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.001.
18. Goncharova O.N., Rezanova E.V., Lyulin Y.V., Kabov O.A. Analysis of a convective fluid flow with a concurrent gas flow with allowance for evaporation. *High Temperature*, 2017, vol. 55, no 6, pp. 887–897. DOI: 10.1134/S0018151X17060074.
19. Bratsun D.A., Gordeeva V.Y., Lyushnin A.V. Peculiarities of the behavior of an ultrathin layer of an evaporable liquid in the presence of a surfactant on a free deformable interface. *Vestnik Permskogo Nauchnogo Tsentra UrO RAN*, 2017, no. 2, pp. 35–38. (In Russian).
20. Bratsun D.A., Mosheva E.A. Peculiar properties of density wave formation in a two-layer system of reacting miscible liquids. *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 302–322. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.23. (In Russian).
21. Bratsun D.A. Internal shock-type density waves induced by chemoconvection in miscible reacting liquids. *Technical Physics Letters*, 2017, vol. 43, no. 20, pp. 69–77. DOI: 10.21883/PJTF.2017.20.45152.16927. (In Russian).
22. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Fluid Flow near the Porous Boundary. *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, iss. 4, no. 3, pp. 999–1001. (In Russian).

23. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Mosina E.V., Chernyshev I.V. The permeability of two dimensional porous medium of square fibers (cell model). *Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, 2017, no. 2 (39), pp. 56–64 DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.5. (In Russian).
24. Domnich A.A., Baranovskii E.S., Artemov M.A. On a mathematical model of non-isothermal creeping flows of a fluid through a given domain. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 417–429. DOI: 10.14498/vsgtu1713. (In Russian).
25. Polyakov K.A. The effect of near-wall slip on ball resistance to motion in a viscous fluid at low Reynolds numbers. *Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki*, 2014, vol. 21, no. 4. (In Russian).
26. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Usanina A.S., Tkachenko A.S. Unsteady rise of a bubble in a viscous fluid at small Reynolds numbers. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 79–86. DOI: 10.1134/S0015462815010093.
27. Suleimanov B.A. Mechanism of slip effect in gassed liquid flow. *Colloid Journal*, 2011, vol. 73, iss. 6, pp. 846–855. DOI: 10.1134/S1061933X11050140.
28. Shablovsky O.N. Near-wall fluid slip and nonlinear properties of a velocity vortex in a two-dimensional flow. *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 1997, vol. 6, no. 1 (1), pp. 154–163. (In Russian).
29. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Slip condition on the surface of a model fibrous porous medium. *Technical Physics Letters*, 2009, vol. 35, pp. 245–248. DOI: 10.1134/S1063785009030158.
30. Maduar S.R., Belyaev A.V., Lobaskin V., Vinogradova O.I. Electrohydrodynamics Near Hydrophobic Surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 114 (11), pp. 118301(5). DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.118301.
31. Ageev A.I., Osiptsov A.N. Self-similar regimes of liquid-layer spreading along a superhydrophobic surface. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 3, pp. 330–342. DOI: 10.1134/S0015462814030041.
32. Filippov A.N., Hanukaeva D.Y., Kalinin V.V. Viscous flow in a cylindrical channel with surface coated with porous layer. *Trudy RGU Nefti i Gaza im. I.M. Gubkina*, 2012, no. 3 (268), pp. 63–72. (In Russian).
33. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004.
34. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 1, pp. 6–42. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042. URL: http://dream-journal.org/issues/2019-1/2019-1_236.html
35. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670. (In Russian).
36. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. *M'em. Acad. Sci. Inst. de France*, 1823, vol. 2, no. 6, pp. 389–440.
37. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
38. Marangoni C. *Sull espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid*. Pavia, Tipografia dei fratelli Fusi, 1865.
39. Bekezhanova V.B. Convective instability of Marangoni-Poiseuille flow under a longitudinal temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 1, pp. 74–81. DOI: 10.1134/S0021894411010111.

41. Aktershev S.P. Thermocapillary effect and periodic structures on the surface of a heated viscous liquid film. *Proceedings of the Institute of Mechanics of Ufa Branch of RAS*, 2007, no. 5, pp. 79–84. DOI: 10.21662/uim2007.1.005. (In Russian).
42. Gordeeva V.Y., Lyushnin A.V. Influence of the thermocapillary effect on the dynamics and stability of motion of a thin evaporating film. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 351–357. DOI: 10.1134/S1063784213030092.

Подана в журнал: 26.11.2019



УДК 539



DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ТЕЧЕНИЯ МАРАНГОНИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НАВЬЕ: ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Н. В. Бурмашева^{a)*}, Е. Ю. Просвирыков^{b)}

*Институт машиноведения УрО РАН,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: nat_burm@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: +7 (343) 374–53–30

В статье получено новое точное решение системы уравнений Обербека–Буссинеска, описывающее однонаправленное конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое. Скорость жидкости зависит от вертикальной (поперечной) координаты. Давление и температура являются линейными формами относительно горизонтальной (продольной) координаты с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты. Слой жидкости ограничен недеформируемой бесконечной плоскостью (нижняя граница). При исследовании конвекции в жидкости введено допущение о пренебрежении деформацией свободной (верхней) границы слоя. На верхней границе учитывается термокапиллярный эффект, индуцирующий конвективное течение. Контакт движущейся жидкости с нижней границей осуществляется с проскальзыванием. Проскальзывание жидкости описывается граничным условием скольжения Навье. Основное внимание в статье уделено исследованию поля температуры, являющегося пространственно неоднородным. Температурное поле является многочленом седьмой степени относительно вертикальной координаты. При исследовании распределения температуры в слое жидкости были изучены частные случаи условия проскальзывания Навье. При нулевой длине скольжения граничное условие Навье трансформируется в условие прилипания. При стремлении длины скольжения к бесконечности имеет место граничное условие идеального скольжения. Показано, что в каждом из трех рассмотренных случаев температурное поле может расслаиваться на несколько зон относительно отсчетного значения. Причем во всех рассмотренных случаях число зон стратификации не превосходит двух. Также показано, что в случае идеального скольжения число зон стратификации температурного поля строго равно двум, и положение точки стратификации поля температуры не зависит ни от физических параметров жидкости, ни от условий нагрева ее границ.

Ключевые слова: система уравнений Обербека–Буссинеска, однонаправленное течение, слоистое течение, точное решение, конвекция Марангони, противотечения, условие проскальзывания Навье.

1. Введение

Чаще всего для описания движений вязкой несжимаемой жидкости в некоторой заданной области используют математическую модель тепловой конвекции [1, 2]. Систему уравнений этой модели составляют: уравнение движения (уравнение Навье–Стокса), уравне-

ние энтропии (как частный случай – уравнение теплопроводности) и закон сохранения массы (уравнение несжимаемости).

Одним из основных факторов, вызывающих конвекцию в жидкости, является ее неравномерный нагрев, задаваемый на границе области течения жидкости. Однако ввиду наличия конвективной производной в уравнении энергии на распределение температурного поля могут также оказывать влияние и особенности поля скоростей течения. Наличие и число застойных (нулевых) точек поля скорости зависит, в частности, от типа граничного условия на контакте с твердой поверхностью [3–36]. В качестве основного параметра, определяющего количество зон стратификации поля скорости в случае учета условия проскальзывания Навье [35], выступает длина скольжения. Таким образом, этот параметр оказывает влияние и на свойства температурного поля.

В статье исследовано однонаправленное конвективное течение Марангони [37–40] вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое при учете условия проскальзывания Навье на нижней границе. Несмотря на то, что построенное точное решение описывает одномерное по направлению течение, само решение является двумерным по координатам. В статье подробно исследованы особенности распределения температуры в слое жидкости, изучены зависимости этого распределения от величины длины проскальзывания.

2. Постановка задачи и методы решения

Рассматривается установившееся однонаправленное конвективное слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном бесконечном слое толщины h (рис. 1).

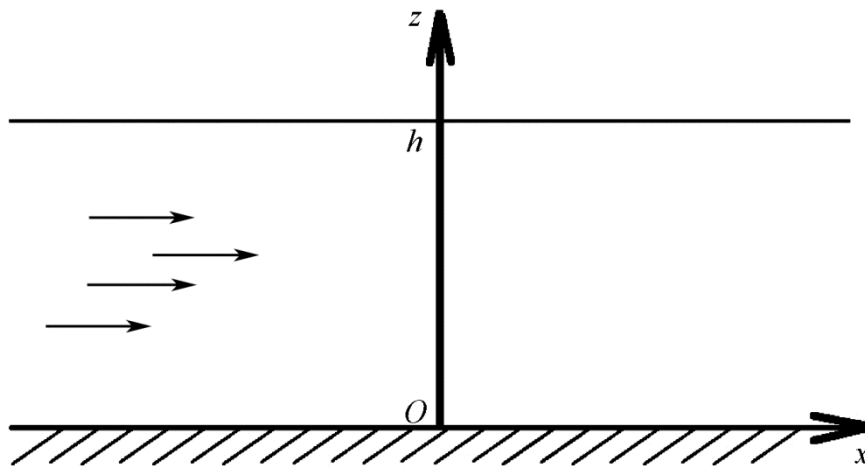


Рис. 1. Геометрия слоя жидкости

Система уравнений тепловой конвекции в приближении Обербека–Буссинеска [3, 33, 34] для таких течений принимает вид:

$$\begin{aligned}
 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{\partial P}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T; \\
 V_x \frac{\partial T}{\partial x} &= \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $V_x(x, y, z)$ – единственная ненулевая компонента вектора скорости; $P(x, y, z)$ – нормированное на плотность отклонение давления от гидростатического; $T(x, y, z)$ – отклонение температуры от отсчетного значения; ν, χ, β – коэффициенты кинематической (молекулярной) вязкости, температуропроводности и температурного расширения жидкости соответственно; g – ускорение свободного падения. Заметим, что система (1) состоит из четырех нелинейных уравнений относительно трех неизвестных функций V_x, P, T .

Из работы [3] следует, что для класса скоростей

$$V_x = U(z), \quad (2)$$

в силу системы (1) функции, описывающие поле температуры T и поле давления P , принадлежат классу решений, линейных по части (горизонтальных) координат:

$$T = T_0(z) + T_1(z)x, \quad P = P_0(z) + P_1(z)x. \quad (3)$$

Подстановка соотношений (2) и (3) в систему (1) при использовании метода неопределенных коэффициентов позволяет привести систему (1) к эквивалентному виду:

$$T_1'' = 0; \quad P_1' = g\beta T_1; \quad \nu U'' = P_1; \quad (4)$$

$$\chi T_0'' = UT_1; \quad P_0' = g\beta T_0.$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной z .
Общее решение системы (4) для компонент температуры имеет вид:

$$T_1(z) = C_1 z + C_2; \\ T_0(z) = \frac{1}{7} g z^7 \beta C_1^2 + g z^6 \beta C_1 C_2 + z^5 \left[\frac{6}{5} g \beta C_2^2 + \frac{18}{5} C_1 C_3 \right] + 6 z^4 [C_2 C_3 + 2 \nu C_1 C_4] + \\ + 24 z^3 \nu (C_2 C_4 + C_1 C_5) + 72 z^2 \nu C_2 C_5 + 144 z \nu \chi C_6 + C_7. \quad (5)$$

Для нахождения значений констант C_i в общем решении (5) в [3] были выбраны краевые условия, описывающие неравномерный нагрев/охлаждение границ слоя жидкости, учет термокапиллярного эффекта на верхней и условия проскальзывания Навье на нижней границе. С учетом структуры решения (2) и (3) эти условия можно записать в следующем виде:

$$T_0(0) = T_1(0) = 0; \quad T_0(h) = 0; \quad T_1(h) = A;$$

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = U(0); \quad P_0(h) = S_0; \quad P_1(h) = 0; \quad \eta \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\sigma T_1(h). \quad (6)$$

Здесь σ и η – коэффициенты температурного поверхностного натяжения и динамической вязкости соответственно; α – длина проскальзывания.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Точное решение краевой задачи

Краевая задача (4) и (6) имеет единственное решение. Решение для поля температуры представляет набор полиномиальных функций различного порядка:

$$T_1 = \frac{Az}{h};$$

$$T_0 = A^2 \left\{ \frac{\sigma}{12h\chi\eta} (h-z)z \left[h^2 + (h+z)(z+2\alpha) \right] + \right. \\ \left. + \frac{g\beta}{5040h^2\nu\chi} \left[5z^7 - 63h^2z^5 + 140h^3z^4 + 280h^3z^3\alpha - 2h^5z(41h+140\alpha) \right] \right\}. \quad (7)$$

Точное решение для поля скорости $\mathbf{V} = (U, 0, 0)$ было подробно проанализировано в [3] для всех возможных значений длины скольжения α . В работе все внимание будет уделено изучению свойств поля температуры T .

Отметим, что если продольный (горизонтальный) градиент температуры A окажется равен нулю, то в силу (7) всюду нулевым будет и возмущение теплового поля ($T \equiv 0$). Кроме того, свойства продольного градиента T_1 (7) никак не зависят от параметра α , а отвечающее этому продольному градиенту тепловое поле $T_{1,x} = Azx/h$ оказывается отлично от нуля всюду в слое жидкости (за исключением нижней границы $z = 0$ и сечения $x = 0$).

Также отметим, что величина параметра A оказывает влияние только на значение фоновой температуры T_0 , но не на расположение ее нулевых точек, являющихся точками стратификации теплового поля T_0 .

3.2. Исследование температурного поля в случае выполнения условия прилипания на нижней границе

Когда неотрицательный параметр α принимает нулевое значение ($\alpha = 0$), условие проскальзывания Навье вырождается в широко известное условие прилипания. В этом случае точное решение (7) для фоновой температуры T_0 принимает вид:

$$T_0 = A^2 (h-z)z \left\{ \frac{\sigma}{12h\chi\eta} \left[h^2 + (h+z)z \right] - \right. \\ \left. - \frac{g\beta}{5040h^2\nu\chi} \left[82h^5 + 82h^4z + 82h^3z^2 - 58h^2z^3 + 5hz^4 + 5z^5 \right] \right\}. \quad (8)$$

Заметим, что решение вида (8) (решение краевой задачи в случае прилипания жидкости к твердой границе слоя) обсуждалось в [32].

Свойства полиномов, входящих в выражение (8), зависят от толщины слоя h . Для того чтобы избавиться от этой зависимости, введем в рассмотрение безразмерную переменную $Z = \frac{z}{h} \in [0, 1]$. Тогда выражения для компонент температурного поля примут вид:

$$T_1 = AZ; \quad T_0 = A^2 h^3 (1-Z) Z \left\{ \frac{\sigma}{12\chi\eta} [Z^2 + Z + 1] - \frac{g\beta h^2}{5040\nu\chi} [82 + 82Z + 82Z^2 - 58Z^3 + 5Z^4 + 5Z^5] \right\} = A^2 h^3 (1-Z) Z \cdot f(Z). \quad (9)$$

Заметим, что фоновая температура (9) имеет нулевые точки внутри рассматриваемого слоя $[0,1]$, только если функция $f(Z)$, определяемая выражением (9), имеет нули на интервале $(0,1)$. Поэтому далее будем исследовать нули полинома $f(Z)$.

Заметим, что многочлены

$$f_1(Z) = Z^2 + Z + 1 \text{ и } f_2(Z) = 82 + 82Z + 82Z^2 - 58Z^3 + 5Z^4 + 5Z^5,$$

входящие в состав функции $f(Z)$, являются строго возрастающими положительными функциями, поэтому для аномальных жидкостей ($\sigma < 0$) функция $f(Z)$ будет строго убывающей на отрезке $[0,1]$ функцией, принимающей только отрицательные значения. Другими словами, нули функции $f(Z)$ на интервале $(0,1)$ могут существовать только для ньютоновских жидкостей.

Анализ спектральных свойств полинома $f(Z)$ показывает, что на интервале $(0,1)$ может существовать только один нуль (рис. 2).

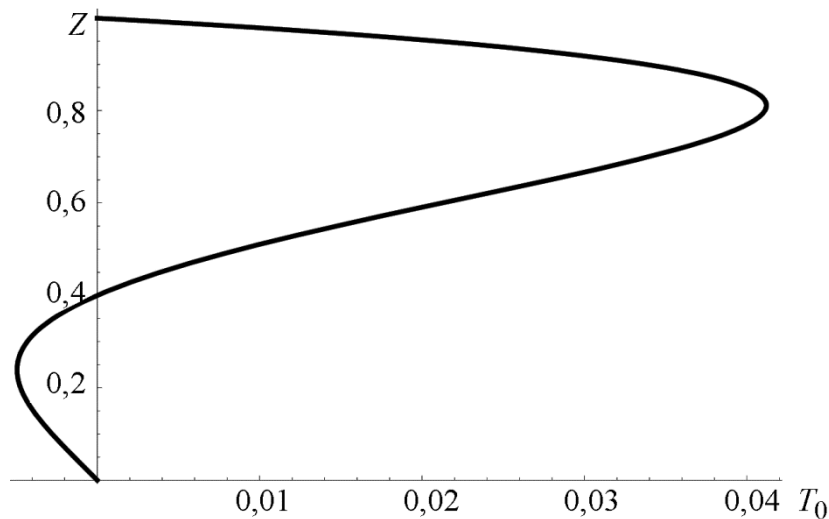


Рис. 2. Профиль фоновой температуры T_0 (при $\left(\text{и } \frac{A^2 h^3 \sigma}{12\chi\eta} = 1 \hat{E}; \frac{A^2 g\beta h^2}{5040\nu\chi} = 0,01254 \hat{E} \right)$

Заметим, что ввиду того, что коэффициенты в функции $f(Z)$ зависят от физических констант жидкости, не для каждой жидкости случай существования точки стратификации реализуем. Например для воды при температуре 20 °C точное решение (9) для фоновой температуры представляет собой зависимость, представленную на рис. 3.

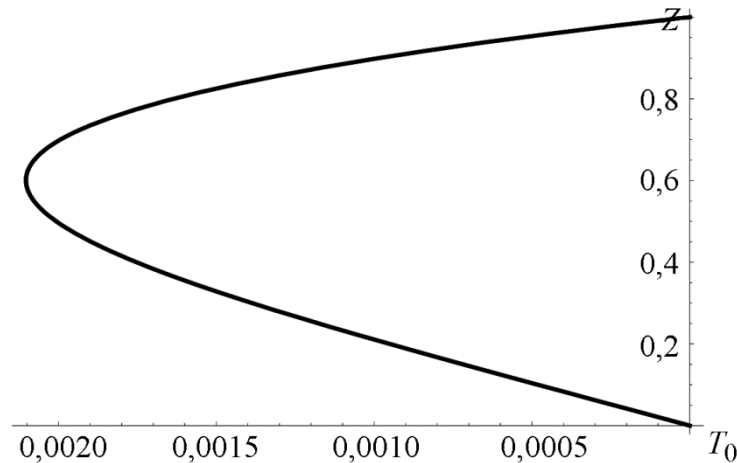


Рис. 3. Профиль фоновой температуры (9) для воды 20 °С ($\text{и } \delta \text{ } A = 1 \text{ } \hat{E}/\hat{l} ; h = 1 \text{ } \hat{l}$)

Линии уровня результирующего поля температуры T для общего случая приведены на рис. 4, для воды при 20 °С – на рис. 5.

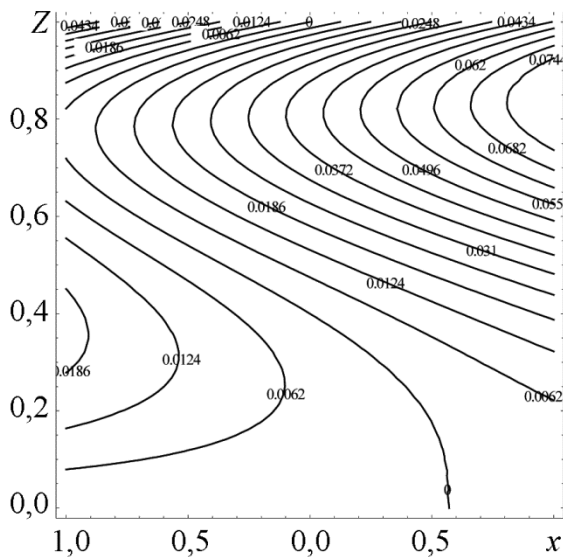


Рис. 4. Линии уровня температурного поля T

$$\left(\text{и } \delta \text{ } \frac{A^2 h^3 \sigma}{12 \chi \eta} = 1 \hat{E}; \frac{A^2 g \beta h^5}{5040 \nu \chi} = 0,01254 \hat{E}; \right. \\ \left. A = 0,05 \hat{E}/\hat{l} \right)$$

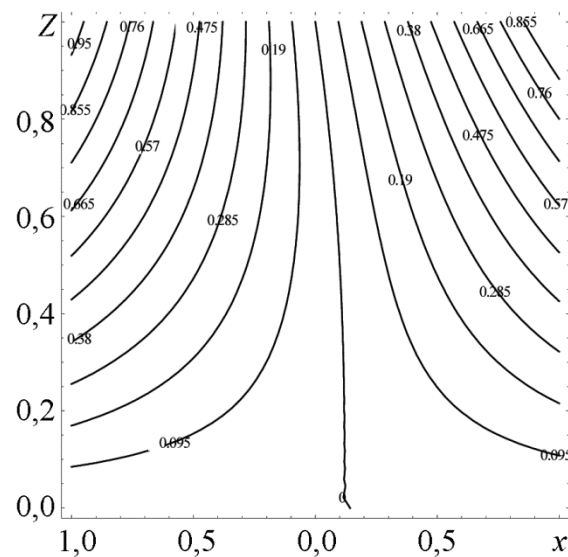


Рис. 5. Линии уровня температурного поля T (при $A = 1 \text{ К/м}; h = 1 \text{ м}$)

3.3. Исследование температурного поля в случае выполнения условия скольжения на нижней границе

В случае, когда параметр α принимает конечное ненулевое значение, представим решение (7) для фоновой температуры T_0 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= A^2 (h-z) z \left\{ \frac{\sigma}{12h\chi\eta} [h^2 + (h+z)z] + \frac{\sigma}{6h\chi\eta} (h+z)\alpha - \right. \\
 &= A^2 h^2 (1-Z) Z \left\{ \frac{\sigma h}{12\chi\eta} [Z^2 + Z + 1] + \frac{\sigma h}{6\chi\eta} (1+Z) \frac{a}{\delta} - \right. \\
 &= A^2 h^2 (1-Z) Z \left\{ \frac{\sigma h}{12\chi\eta} [Z^2 + Z + 1] + \left(\frac{\sigma h}{6\chi\eta} - \frac{g\beta h^3}{18\nu\chi} \right) (1+Z) \frac{a}{\delta} - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{g\beta h^3}{5040\nu\chi} [82 + 82Z + 82Z^2 - 58Z^3 + 5Z^4 + 5Z^5] \right\}. \right.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В отличие от выражения (9) в формуле (10) появляется новое слагаемое, отражающее влияние длины проскальзывания. Здесь введены дополнительные обозначения: $a = \alpha/l$; $\delta = h/l$; l – характерный горизонтальный размер рассматриваемого слоя жидкости. Опираясь на изложенный в [3] подход к оценке числа возможных нулевых точек многочлена на заданном интервале и учитывая неотрицательность отношения a/δ , можно сделать вывод о том, что в случае выполнения условия проскальзывания на нижней границе слоя у фоновой температуры (10) может быть не более одной нулевой точки внутри слоя (0,1) (рис. 6). На рис. 7 приведен профиль фоновой температуры, определяемой соотношением (10), для воды при температуре 20 °С.

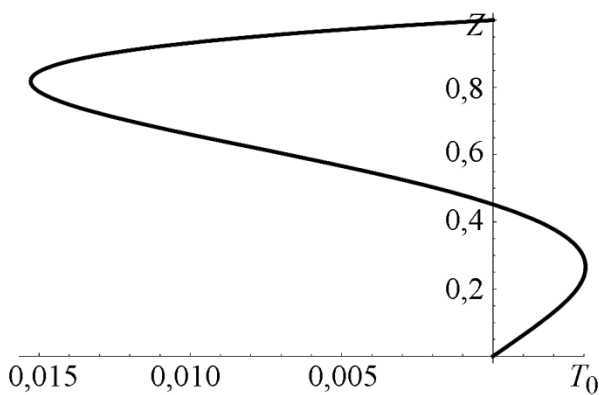


Рис. 6. Профиль фоновой температуры (10) при $\left(\frac{A^2 h^3 \sigma}{12\chi\eta} = -0,4 \hat{E}; \frac{A^2 g\beta h^5}{5040\nu\chi} = 0,005 \hat{E}; \frac{a}{\delta} = 0,01 \right)$

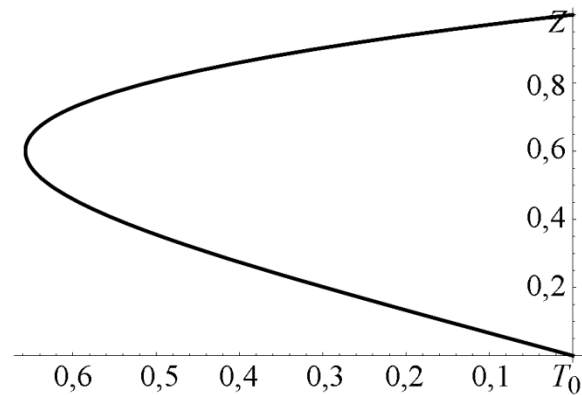


Рис. 7. Профиль фоновой температуры (10) (при $A = 1$ К/м; $h = 0,5$ м; $\frac{a}{\delta} = 0,001$)

Линии уровня поля температуры для общего случая и для воды при температуре 20 °С приведены на рис. 8 и 9 соответственно.

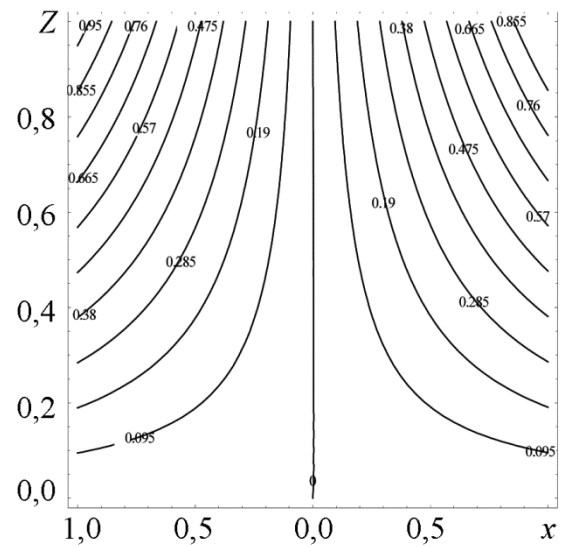
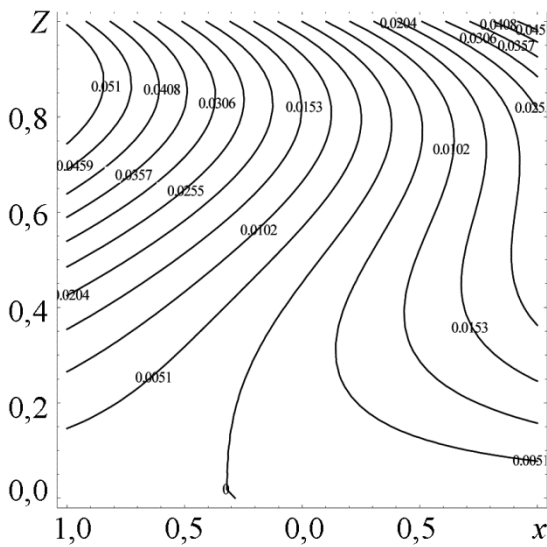


Рис. 8. Линии уровня температурного поля T

$$\left(\begin{array}{l} \text{и } \delta \varepsilon \frac{A^2 h^3 \sigma}{12 \chi \eta} = -0,4 \hat{E}; \quad \frac{A^2 g \beta h^5}{5040 \nu \chi} = 0,005 \hat{E}; \\ A = 0,05 \text{ К/м}; \quad \frac{a}{\delta} = 0,01 \end{array} \right)$$

Рис. 9. Линии уровня температурного поля T

$$\left(\text{при } A = 1 \text{ К/м}; \quad h = 0,5 \text{ м}; \quad A = 1 \text{ К/м}; \right. \\ \left. \frac{a}{\delta} = 0,001 \right)$$

3.4. Исследование температурного поля в случае идеального скольжения

Предельный случай условия Навье, когда параметр α принимает бесконечное значение, называется условием идеального скольжения. Воспользоваться предельным переходом $\alpha \rightarrow \infty$ в полученном точном решении (7) нельзя, так как в противном случае все гидродинамические поля становятся бесконечными в любой точке исследуемого слоя. В [3] было показано, что если выполняется условие

$$g \beta h^2 \eta - 3 \nu \sigma = 0. \tag{11}$$

возможен одновременный учет в точном решении краевой задачи (4), (6) и термокапиллярного эффекта на верхней границе слоя жидкости, и условия идеального скольжения на нижней границе.

Также в статье [3] приведено точное решение для поля скорости в случае идеального скольжения:

$$U = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} f_3(Z) = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} [5Z^4 - 30Z^2 + 9]. \tag{12}$$

Используя решение (12) при интегрировании предпоследнего уравнения системы (4), можем легко получить точное решение для фоновой температуры:

$$\begin{aligned} \chi T_0'' = UT_1 = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} [5Z^4 - 30Z^2 + 9] \cdot AZ = \frac{A^2 g \beta h^3}{120\nu} [5Z^5 - 30Z^3 + 9Z]; \\ T_0' = \frac{A^2 g \beta h^3}{720\nu \chi} [5Z^6 - 45Z^4 + 27Z^2] + C_1; \end{aligned} \tag{13}$$

$$T_0 = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5Z^7 - 63Z^5 + 63Z^3] + C_1 Z + C_2.$$

Далее подставим полученное общее решение (13) в краевые условия (6):

$$T_0(0) = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5 \cdot 0^7 - 63 \cdot 0^5 + 63 \cdot 0^3] + \tilde{N}_1 \cdot 0 + \tilde{N}_2 = 0;$$

$$T_0(z=h) = T_0(Z=1) = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5 \cdot 1^7 - 63 \cdot 1^5 + 63 \cdot 1^3] + \tilde{N}_1 \cdot 1 = \frac{5A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} + \tilde{N}_1 = 0.$$

Таким образом, мы нашли значения констант интегрирования: $C_1 = -\frac{5A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi}$;

$\tilde{N}_2 = 0$. Подстановка этих значений в общее решение (13) позволяет найти точное решение для фоновой температуры, удовлетворяющее системе краевых условий (6) для случая идеального скольжения:

$$T_0 = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5Z^7 - 63Z^5 + 63Z^3] - \frac{5A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} Z = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5Z^7 - 63Z^5 + 63Z^3 - 5Z] \quad (14)$$

На рис. 10 приведен профиль фоновой температуры, определяемой выражением (14).

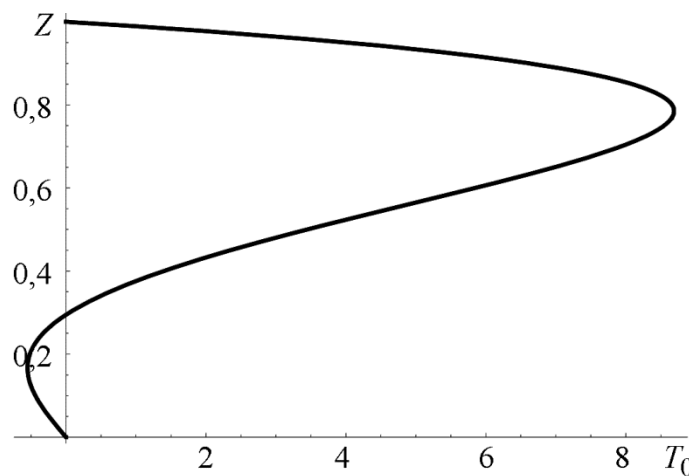


Рис. 10. Профиль температуры T_0 при $\frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} = 1$ К

Несложно убедиться, что функция $g(Z) = 5Z^7 - 63Z^5 + 63Z^3 - 5Z$, определяющая точное решение (14), имеет единственный нуль на интервале $(0,1)$. Следовательно, фоновая температура (14) обращается в нуль внутри рассматриваемого слоя жидкости ровно один раз независимо от значений краевых параметров задачи. Это означает, что поле температуры T_0 всегда расслаивается на две зоны относительно отсчетного значения, причем в известной точке $Z = 0,2947$.

Заметим, что расположение нулевой точки у фоновой температуры (14) никак не зависит от физических характеристик жидкости. Их положение определяется нулями многочлена $g(Z)$, попадающими в интервал $(0,1)$.

Результирующее поле температуры $T = T_0 + T_1x$ в этом случае принимает вид:

$$T = T_0 + T_1x = \frac{A^2 g \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5Z^7 - 63Z^5 + 63Z^3 - 5Z] + AZx =$$

$$= AZ \left(\frac{Ag \beta h^3}{5040 \nu \chi} [5Z^6 - 63Z^4 + 63Z^2 - 5] + x \right). \quad (15)$$

Приведенная факторизация записи выражения (15) наглядно демонстрирует, что в отличие от фоновой температуры T_0 распределение изолиний поля T зависит от параметров конкретной жидкости (β , ν , χ), от толщины слоя h и величины продольного градиента температуры A . На рис. 11–13 приведены линии уровня температурного поля (15) для воды при температуре 20 °С.

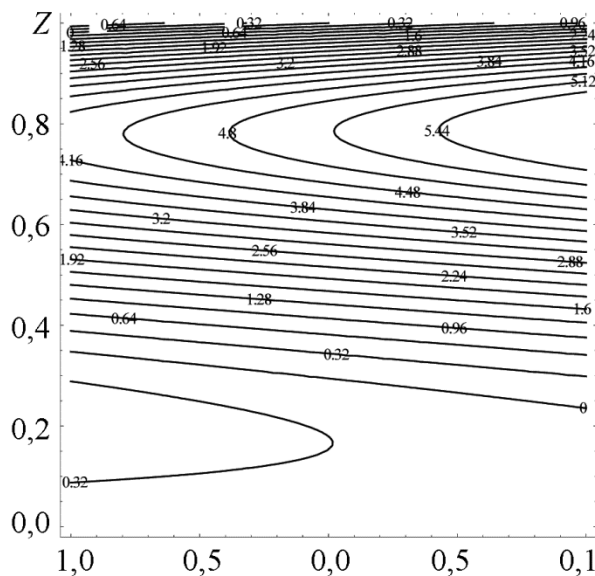


Рис. 11. Распределение изолиний поля температуры (при $A=1$ К/м; $h=1$ м)

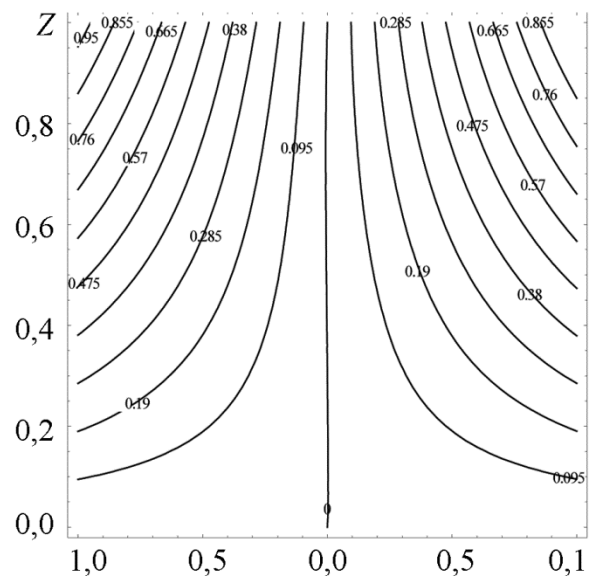


Рис. 12. Распределение изолиний поля температуры (при $A=1$ К/м; $h=0,1$ м)

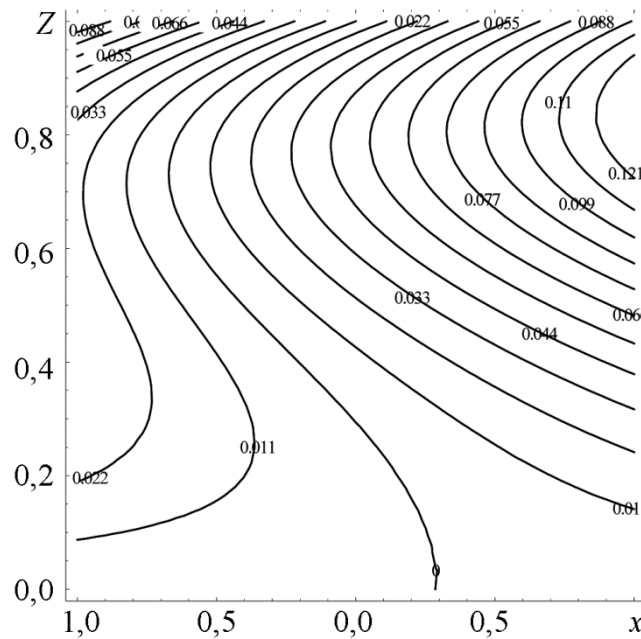


Рис. 13. Распределение изолиний поля температуры (при $A = 0,1$ К/м; $h = 1$ м)

Различие в картинах изолиний, представленных на рис. 11–13, объясняется тем фактом, что при варьировании величины коэффициента $Ag\beta h^3 / (5040\nu\chi)$, входящего в выражение (15), можно добиться того, что вклад линейного слагаемого x будет превалировать над вкладом нелинейного слагаемого $\frac{Ag\beta h^3}{5040\nu\chi} [5Z^6 - 63Z^4 + 63Z^2 - 5]$.

4. Заключение

В статье получено точное решение для термокапиллярной конвекции, учитывающее эффект проскальзывания жидкости на одной из границ рассматриваемого слоя. Подробно проанализированы свойства поля температуры в зависимости от величины длины скольжения. Было показано, что поле температуры может иметь точки стратификации внутри слоя. Также было показано, что распределение изолиний температуры в слое зависит не только от параметров слоя и граничных условий, но и от самой жидкости.

Литература

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 532 с.
2. Pukhnachov V. V. Hierarchy of models in the theory of convection // J. Math. Sci. – 2004. – Vol. 123, no. 6. – P. 4607–4620. – DOI: 10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64.
3. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An Exact Solution to the Description of a Unidirectional Marangoni Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition. Velocity Field Investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 23–39. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039.
4. Petrov A. G. Exact solution of the Navier–Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2012. – Vol. 53, no. 5. – P. 642–646. – DOI: 10.1134/S0021894412050021.
5. Барановский Е. С., Артемов М. А. О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. – 2019. – Т. 63, кн. 1. – С. 10–15. – DOI: 10.26907/2542-0405.2019.63.1.10-15.

- тика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т. 13, вып. 4. – С. 342–353. – DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401.
6. Князев Д. В., Колпаков И. Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // Нелинейная динамика. – 2015. – Т. 11, № 1. – С. 89–97. – DOI: 10.20537/nd1501004.
 7. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014 – № 2 (28). – С. 35–44.
 8. Bharat Bhushan. Adhesion and Stiction: Mechanisms, Measurement Techniques, and Methods for Reduction // Journal of Vacuum Science & Technology B Microelectronics and Nanometer Structures. – 2003. – Vol. 21, no. 6. – P. 2262–2296. – DOI: 10.1116/1.1627336.
 9. Dement'ev O. N. Effect of convection on the stability of a liquid with a nonuniformly distributed heavy admixture // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – Vol. 41, iss. 5. – P. 923–929. – DOI: 10.1007/BF02468739.
 10. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50, no. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
 11. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Труды ИММ. – 2017. – Т. 23, вып. 2. – С. 32–41. – DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.
 12. Aristov S. N., Knyazev D. V. Three-dimensional viscous jet flow with plane free boundaries // Fluid Dynamics. – 2017. – Vol. 52, no. 2. – P. 215–218. – DOI: 10.1134/S0015462817020053.
 13. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57, no. 1. – P. 188–194. – DOI: 10.1134/S0021894416010211.
 14. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Modeling of three dimensional thermocapillary flows with evaporation at the interface based on the solutions of a special type of the convection equations // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol. 62. – С. 145–162. – DOI: 10.1016/j.apm.2018.05.021.
 15. Bekezhanova V. B., Rodionova A. V. Longwave stability of two-layer fluid flow in the inclined plane // Fluid Dynamics. – 2015. – Vol. 50, no. 6. – P. 723–736. – DOI: 10.1134/S0015462815060010.
 16. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – Vol. 130. – P. 323–332. – DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.001.
 17. Analysis of a convective fluid flow with a concurrent gas flow with allowance for evaporation / O. N. Goncharova, E. V. Rezanova, Y. V. Lyulin, O. A. Kabov // High Temperature. – 2017. – Vol. 55, no 6. – P. 887–897. – DOI: 10.1134/S0018151X17060074.
 18. Брацун Д. А., Гордеева В. Ю., Люшнин А. В. Особенности поведения ультратонкого слоя испаряющейся жидкости при наличии на свободной деформируемой границе сурфактанта // Вестник Пермского научного центра УрО РАН. – 2017. – № 2. – С. 35–38.
 19. Брацун Д. А., Мошева Е. А. Особенности формирования волн плотности в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 302–322. – DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.23.
 20. Брацун Д. А. Внутренние волны плотности ударного типа, индуцированные хемоконвекцией в смешивающихся реагирующих жидкостях // Письма в Журнал технической физики. – 2017. – Т. 43, № 20. – С. 69–77. – DOI: 10.21883/PJTF.2017.20.45152.16927.
 21. Мосина Е. В., Чернышев И. В. Течение жидкости в окрестности пористой границы // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (3). – С. 999–1001.
 22. Мосина Е. В., Чернышев И. В. Проницаемость двумерной пористой среды из волокон квадратного сечения (ячеечная модель) // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2017. – № 2 (39). – С. 56–64. – DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.5.

23. Домнич А. А., Барановский Е. С., Артёмов М. А. О математической модели неизотермического ползущего течения жидкости через заданную область // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 417–429. – DOI: 10.14498/vsgtu1713.
24. Поляков К. А. Влияние пристеночного скольжения, на сопротивление шара движению в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2014. – Т. 21, вып. 4.
25. Unsteady rise of a bubble in a viscous fluid at small Reynolds numbers / V. A. Arkhipov, I. M. Vasenin, A. S. Usanina, A. S. Tkachenko // Fluid Dynamics. – 2015. – Vol. 50, no. 1. – P. 79–86. – DOI: 10.1134/S0015462815010093.
26. Suleimanov B. A. Mechanism of slip effect in gassed liquid flow // Colloid Journal. – 2011. – Vol. 73, iss. 6. – P. 846–855. – DOI: 10.1134/S1061933X11050140.
27. Шабловский О. Н. Пристеночное скольжение жидкости и нелинейные свойства вихря скорости в двухмерном потоке // Челябинский физико-математический журнал. – 1997. – Т. 6, № 1 (1). – С. 154–163.
28. Mosina E. V., Chernyshev I. V. Slip condition on the surface of a model fibrous porous medium // Technical Physics Letters. – 2009. – Vol. 35. – P. 245–248. – DOI: 10.1134/S1063785009030158.
29. Electrohydrodynamics near Hydrophobic Surfaces / S. R. Maduar, A. V. Belyaev, V. Lobaskin, O. I. Vinogradova // Phys. Rev. Lett. – 2015. – Vol. 114 (11). – P. 118301(5). – DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.118301.
30. Ageev A. I., Osiptsov A. N. Self-similar regimes of liquid-layer spreading along a superhydrophobic surface. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 3, pp. 330–342. DOI: 10.1134/S0015462814030041.
31. Филиппов А. Н., Ханукаева Д. Ю., Калинин В. В. Течение вязкой жидкости в цилиндрическом канале с покрытой пористым слоем поверхностью // Труды РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. – 2012. – № 3 (268). – С. 63–72.
32. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динам. – 2013. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 651–657.
33. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 1. – P. 6–42. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042.
34. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки [Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta-seriya-fiziko-matematicheskiye nauki]. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 341–360. – DOI: 10.14498/vsgtu1670.
35. Navier C. L. M. H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides // M'em. Acad. Sci. Inst. de France. – 1823. – Т. 2 (6). – P. 389–440.
36. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, no. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
37. Marangoni C. Sull espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid. – Pavia : Tipografia dei fratelli Fusi, 1865.
38. Бекежанова В. Б. Конвективная неустойчивость течения Марангони-Пуазейля при наличии продольного градиента температуры // Прикл. мех. техн. физ. – 2011. – Т. 52, вып. 1. – С. 92–100.
39. Актершев С. П. Термокапиллярный эффект и периодические структуры на поверхности нагреваемой пленки вязкой жидкости // Тр. Инст. Мех. УНЦ РАН. – 2007. – Т. 5, вып. 1. – С. 79–84. – DOI: 10.21662/uim2007.1.005.

40. Gordeeva V. Y., Lyushnin A. V. Influence of the thermocapillary effect on the dynamics and stability of motion of a thin evaporating film // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58. – No. 3. – P. 351–357. – DOI: 10.1134/S1063784213030092.