



Received: 26.11.2025**Revised:** 20.01.2026**Accepted:** 23.01.2026**DOI:** 10.17804/2410-9908.2026.1.023-045

THE GENERALIZED SIMILARITY PRINCIPLE AND A KINETIC DAMAGE MODEL AS TOOLS FOR ESTIMATING DURABILITY UNDER LOW-CYCLE LOADING INVOLVING CREEP

V. B. Poroshin

*South Ural State University (National Research University),
76 Lenina Ave., Chelyabinsk, 454080, Russia* <https://orcid.org/0009-0000-2407-1469>  poroshin2816@mail.ru

Email: poroshin2816@mail.ru

Address for correspondence: Sverdlovskiy prospekt, 28a, apart. 139, Chelyabinsk, 454008, Russia
Tel.: +7 (951) 794-0439

The paper demonstrates the application of known progressive adequate models of deformation and strength properties of steels and alloys in engineering practice. The models are designed to analyze the kinetics of the stress-strain state and fatigue damage accumulation under fairly general loading programs. They cover conditions of cyclic inelastic loading at elevated temperatures with stages of fast and slow load variation, subsequent additional loading, and holding under various static-kinematic conditions.

The stress-strain kinetics is analyzed with the application of the so-called generalized similarity principle (GSP) formulated in the form of the state equation in macroscopic parameters together with memory rules about the deformation and temperature history. The GSP is a direct consequence of the Gokhfeld – Sadakov structural model of an elastic-viscoplastic medium, which is based on the concept of the microheterogeneity of real materials.

The process of fatigue damage accumulation is described by a kinetic damage model developed by the author. The rate of fatigue damage accumulated by a material volume element is a linear homogeneous function of inelastic strain rate. It is assumed that fatigue damage is related only to the alternating component of inelastic strain. There are different damage processes, namely the one at the stage of fast (plastic) deformation and that at creep, which have their own damage components. One of the components can be only increasing, and the other is partially reversible.

The paper presents the main provisions and constitutive relations of the mentioned mathematical models of deformation and strength properties. It gives an example of constructing the trajectory of a material state point in the stress–strain space under a specified program of cyclic loading, including periods of holding, fast and slow deformation. On this basis, the kinetic model of damage accumulation is used to analyze fatigue damage variation in a cycle and to evaluate the number of cycles to failure by the macrocracking criterion.

Keywords: analysis of stress-strain and fatigue damage kinetics; cyclic inelastic deformation at elevated temperature with holding stages; structural model of an elastic-viscoplastic medium; generalized similarity principle; kinetic damage model

References

1. Gokhfeld, D.A. *Nesushchaya sposobnost konstruktsiy v usloviyakh teplosmen* [Carrying Capacity of Structures under Thermal Cycles]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1970, 259 p. (In Russian).

2. Gokhfeld, D.A. and Cherniavskii, O.F. *Nesushchaya sposobnost konstruktsii pri povtornykh nagruzheniyakh* [Bearing Capacity of Structures Under Repeated Loading.]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1979, 263 p. (In Russian).
3. Gokhfeld, D.A. and Saadakov, O.S. *Plastichnost i polzuchest elementov konstruktsii pri povtornykh nagruzheniyakh* [Plasticity and Creep of Structural Elements Under Repeated Loading]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1984, 256 p. (In Russian).
4. Gokhfeld, D.A., Getsov, L.B., Kononov, K.M., Kulchikhin, E.T., Rebyakov, Yu.N., Sadakov, O.S., Timashev, S.A., and Chepurskiy, V.N. *Mekhanicheskie svoystva staley i splavov pri nestatsionarnom nagruzhenii: Spravochnik* [Mechanical Properties of Steels and Alloys under Non-Stationary Loading: Handbook]. UrO RAN Publ., Ekaterinburg, 1996, 408 p. (In Russian).
5. Rabotnov, Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsii* [Creep of Structural Elements]. Nauka Publ., Moscow, 1966, 752 p. (In Russian).
6. Poroshin, V.B. *Konstruktсионnaya prochnost* [Structural Strength: Textbook]. Infra-Inzheneriya Publ., Moscow, Vologda, 2022, 440 p. (In Russian).
7. Poroshin, V.B. Effect of deformation cycle shape on damage pile-up under various types of low cycle loading with hold times. *Problems of Strength*, 1988, 1, 38–43. (In Russian).
8. Maslenkov, S.B. *Zharoprochnye stali i splavy. Spravochnik* [Heat-resistant steels and alloys: Handbook]. Metallurgiya Publ., Moscow, 1983, 192 p. (In Russian).
9. Ramberg, W. and Osgood, W.R., Description of stress-strain curves by three parameters, *Technical Notes National Advisory Committee for Aeronautics No. 902*, Washington, DC, 1943.
10. Poroshin, V.B. and Ufimtsev, A.N. Making a parameter map for the inelastic cyclic deformation of coiled tubing pipes by means of a digital model of test equipment. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 4, 102–117. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.4.102-117. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-4/2024-4_459.html

Подана в журнал: 26.11.2025



УДК 539.3/.6(07)

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.1.023-045

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ПОДОБИЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КАК ИНСТРУМЕНТЫ ОЦЕНКИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ МАЛОЦИКЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Б. Порошин

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», пр-т Ленина, 76, г. Челябинск, 454080, Россия

 <https://orcid.org/0009-0000-2407-1469>  poroshin2816@mail.ru

Электронная почта: poroshin2816@mail.ru

Адрес для переписки: Свердловский пр-т, д. 28а, кв. 139, г. Челябинск, 454008, Россия

Тел.: +7 (951) 794-04-39

Цель работы – продемонстрировать на уровне инженерной практики применение прогрессивных адекватных моделей деформационных и прочностных свойств сталей и сплавов для анализа кинетики напряженно-деформированного состояния и накопления усталостного повреждения при программах нагружения общего характера – циклического неупругого деформирования при повышенной температуре с этапами быстрого и медленного изменения нагрузки, последующей догрузки, выдержек в различных статико-кинематических условиях.

Анализ кинетики напряженно-деформированного состояния производится с помощью так называемого обобщенного принципа подобия (ОПП), сформулированного в виде уравнения состояния в макроскопических параметрах вкупе с правилами памяти о предыстории деформирования и изменении температуры. ОПП является прямым следствием структурной модели упруговязкопластической среды в варианте Гохфельда – Садакова, которая исходит из представления о микронеоднородности реальных материалов.

Процесс накопления усталостного повреждения описывается с помощью модели повреждаемости кинетического типа, разработанной автором. Скорость усталостного повреждения, накапливаемого элементом объема материала, представляет собой линейную однородную функцию скорости неупругой деформации. Предполагается, что усталостное повреждение связано лишь со знакопеременной составляющей неупругой деформации. Различаются процессы повреждаемости на этапах быстрого (пластического) и длительного (вязкого) деформирования, которым отвечают соответствующие составляющие повреждения. Одна из этих составляющих может быть только возрастающей, вторая частично обратима.

В статье приводятся основные положения и определяющие соотношения названных математических моделей деформационных и прочностных свойств. Рассмотрен пример построения траектории точки состояния материала в пространстве «напряжение ~ деформация» по заданной программе циклического нагружения, включающей периоды выдержек, быстрого и медленного деформирования. На этой основе с помощью кинетической модели накопления повреждения выполнены анализ изменения усталостного повреждения в цикле и оценка числа циклов до разрушения по критерию образования макротрещины.

Ключевые слова: анализ кинетики напряженно-деформированного состояния и усталостного повреждения; циклическое неупругое деформирование при повышенной температуре с выдержками; структурная модель упруговязкопластической среды; обобщенный принцип подобия; кинетическая модель повреждаемости

1. Введение

Повышение эффективности использования материалов, и в первую очередь конструкционных сталей и сплавов, является одной из наиболее актуальных современных задач. Отсюда вытекает требование к рациональному проектированию, т. е. обеспечению надежности конструкции при наиболее полном использовании прочностных свойств материала. Его выполнение возможно лишь на основе достаточно адекватных математических моделей и расчетных методов, позволяющих определить механическое состояние объекта и оценить его опасность с точки зрения исчерпания работоспособности.

Прогресс в теории неупругого деформирования в значительной мере связан с актуальностью проблемы малоциклового разрушения теплонапряженных и высоконагруженных конструкций. Необходимость расчета полей напряжений и деформаций при изменяющихся нагрузках и температурах и на этой основе оценки долговечности потребовала переоценки простейших классических теорий пластичности и ползучести с точки зрения отражения ими множества деформационных эффектов, которые при однократном нагружении не проявляются или признаются несущественными.

Оказалось, что разработка теории неупругого деформирования, удовлетворяющей современным требованиям, связана с немалыми принципиальными трудностями; значительные затруднения возникали также при реализации поцикловых расчетов кинетики деформирования в связи с весьма высокой их трудоемкостью. На определенном этапе это предопределило преимущества приближенного подхода к оценке несущей способности конструкций, опирающегося на представления и методы предельного упругопластического анализа. Развитие, которое получил этот подход за последние десятилетия [1, 2], обеспечило ему довольно высокую эффективность при решении прикладных задач. С другой стороны, полученные в рамках теории приспособляемости (и ее дальнейшего обобщения – теории стационарных циклических состояний) представления о различных типах поведения конструкции способствовали более глубокому пониманию многих характерных особенностей повторно-переменного деформирования.

Тем не менее проблема более адекватного описания процессов неупругого деформирования и, в частности, определения параметров, характеризующих долговечность конструкции, по-прежнему остается актуальной. К настоящему времени предложен целый ряд вариантов и схем, реализующих применимость теорий пластичности и ползучести в отдельных областях и отличающихся между собой степенью обобщения и экспериментальной обоснованностью, а также практической пригодностью для решения инженерных задач.

Среди этих теорий особое место принадлежит моделям, которые базируются на представлениях физического характера, в частности на концепции микронеоднородности реальных материалов (так называемым структурным моделям). Следствием одной из них, модели в варианте Гохфельда – Садакова, является так называемый обобщенный принцип подобия, сформулированный в виде уравнения состояния в макроскопических параметрах вкупе с правилом памяти о предыстории деформирования и изменении температуры, которому будет уделено отдельное внимание.

Данная работа по замыслу автора носит утилитарный характер. Ее цель – продемонстрировать на уровне инженерной практики применение прогрессивных адекватных моделей деформационных и прочностных свойств для анализа кинетики напряженно-деформированного состояния и накопления усталостного повреждения в условиях циклического неупругого нагружения при повышенной температуре с этапами быстрого и медленного деформирования, последующей догрузки, выдержек различной длительности в режиме чистой ползучести или релаксации либо выдержек промежуточного характера – то есть при достаточно общих программах нагружения.

2. Состояние вопроса

2.1. Структурная модель в варианте Гохфельда – Садакова

В соответствии со структурной моделью в варианте Гохфельда – Садакова [3, 4] полагается, что каждый элемент объема материала представляет собой некоторую конструкцию, составленную из частей, именуемых подэлементами (ПЭ). Свойства ПЭ и способ их «сборки» могут быть различными. Если для определения реологических свойств ПЭ (пластичность, ползучесть) используются инкрементальные (т. е. сформулированные в скоростях) теории пластичности и/или ползучести, то данный подход формально может быть сведен к обобщенной гипотезе упрочнения Ю. Н. Работнова [5] с конкретизацией скрытых параметров состояния. Главным свойством гипотетической конструкции из ПЭ, необходимым в такой модели, является ее статическая неопределенность. Системы самоуравновешенных напряжений, возникающих и изменяющихся в связи с неупругим деформированием ПЭ, служат аналогами реальных микронапряжений, возникающих в материале и определяющих эффекты деформационной анизотропии. В остальном конструкция может быть произвольной. Простейшей схемой соединения является модель, в соответствии с которой все ПЭ деформируются одинаково. При одноосном напряженном состоянии такую модель можно представить как пакет параллельных одинаково растягиваемых стержней с различающимися значениями параметров реологических свойств, например с разными значениями предела текучести (рис. 1).

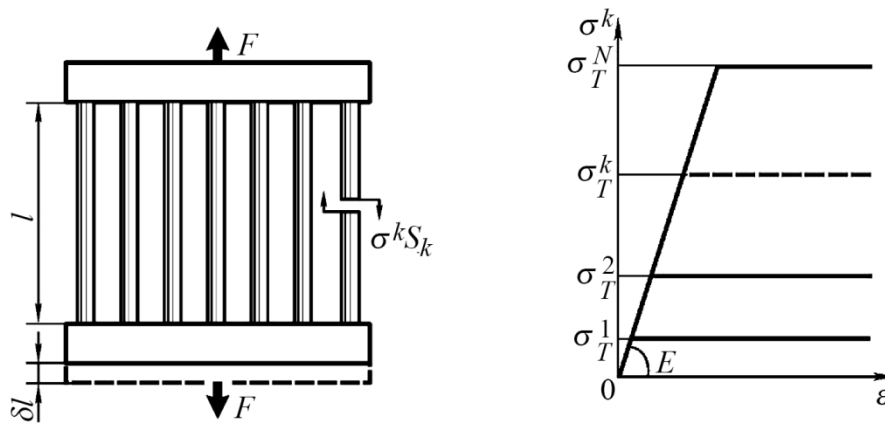


Рис. 1. Представление структурной модели в варианте пакета параллельных одинаково растягиваемых стержней и их диаграммы деформирования

При одноосном напряженном состоянии полная система уравнений, описывающих свойства моделируемого элемента объема, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon^{(k)} = r + \vartheta + p = r^{(k)} + \vartheta^{(k)} + p^{(k)}; \\ T = T^{(k)}; \\ r^{(k)} = \frac{\sigma^{(k)}}{E(T)}, \quad r = \frac{\sigma}{E(T)}, \quad \vartheta^{(k)} = \vartheta(T, T_0); \\ p^{(k)} = \Phi\left(\frac{\sigma^{(k)}}{z^{(k)}}, T\right); \\ \sigma = \langle \sigma^{(k)} \rangle \end{array} \right. \quad (1)$$

(обобщение структурной модели на сложное напряженное состояние при пропорциональном и непропорциональном нагружении изложено в справочнике [4]).

Система определяющих уравнений (1) записана в предположении, что элемент объема, характеризуемый напряжением σ , деформацией ε , температурой T , представляет собой совокупность ПЭ (их параметры помечены индексами k ; $k = 1, 2, \dots; N$ – номер ПЭ). Деформации $\varepsilon^{(k)}$ всех ПЭ одинаковы и равны деформации элемента ε ; то же относится и к температуре. Деформация ПЭ $\varepsilon^{(k)}$ разделена на три составляющие: упругую $r^{(k)}$, тепловую $\mathcal{G}^{(k)}$ и неупругую $p^{(k)}$. Первая однозначно связана с напряжением ПЭ, при этом модуль упругости у всех ПЭ принимается одинаковым. В итоге, согласно соотношениям (1), он оказывается равным модулю упругости материала в целом, зависящему от температуры. Вторая составляющая $\mathcal{G}^{(k)}$ определяется температурой; свойства теплового расширения, так же как и температура, для всех ПЭ считаются одинаковыми; в итоге величины $\mathcal{G}^{(k)}$ одинаковы и оказываются равными тепловой деформации всего элемента $\mathcal{G}(T, T_0)$.

Остаток $p^{(k)} = \varepsilon^{(k)} - (r^{(k)} + \mathcal{G}^{(k)})$ – неупругая деформация ПЭ, развивающаяся, согласно предположению, со скоростью $\dot{p}^{(k)}$, зависящей только от напряжения и температуры данного ПЭ. Реологическая функция двух аргументов Φ , как было отмечено, одна для всех ПЭ в силу принятого закона подобия. Различие свойств ПЭ определяется неизменяющимся, индивидуальным для каждого ПЭ, параметром подобия z_k .

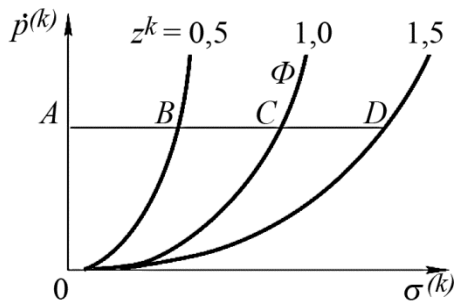


Рис. 2. Подобие реологических функций подэлементов

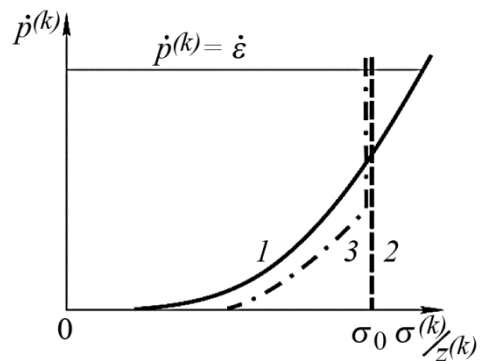


Рис. 3. Варианты (1–3) реологической функции

В качестве примера на рис. 2 приведены реологические функции трех ПЭ при некотором значении температуры; основная функция Φ (совпадающая с реологической функцией ПЭ, имеющего значение $z_k = 1$) и две функции ПЭ, имеющие параметры подобия, равные 0,5 и 1,5. Соответственно отношения BA/CA и DA/CA при любых значениях $\dot{p}^{(k)}$, характеризуемых отрезком OA , одинаковы: 0,5 и 1,5. Предполагается, что с изменением температуры распределение коэффициентов z_k по ПЭ не изменяется. Это еще более упрощает модель, не слишком искажая, как показывают эксперименты, реальные свойства конструкционных сплавов (хотя отдельные исключения возможны).

Завершает математическое описание модели формула осреднения: напряжением σ называется среднее по напряжениям всех ПЭ. Если число ПЭ N принять бесконечным, то при осреднении используется функция $y(z_k)$ плотности распределения параметров z_k между подэлементами:

$$\sigma = \langle \sigma^{(k)} \rangle = \int_0^{\infty} \sigma^{(k)} y(z_k) dz.$$

Для отражения процессов ползучести подэлементам необходимо задать также реологические свойства. Простейший вариант – идеальная вязкость, в соответствии с которой скорость ползучести ПЭ зависит только от текущих значений его напряжения и температуры. Тогда реологические свойства каждого ПЭ определяются единственной для него функцией, характеризующей эту зависимость, – реологической.

Анализ рассмотренной модели и сопоставление ее поведения с экспериментальными данными о неупругом циклическом деформировании структурно стабильных металлических конструкционных материалов, находящихся в циклически стабильном состоянии, показали возможность постулирования подобия реологических функций всех ПЭ, составляющих элементарный объем. Разброс характеристик по ПЭ в этом случае определяется единственным параметром – параметром подобия реологической функции ПЭ, т. е. некоторой выбранной среднестатистической функцией, далее называемой реологической функцией модели. Таким образом, для определения (идентификации, т. е. отождествления с конкретным материалом) модели достаточно найти из испытаний лишь две определяющие (базовые) функции, характеризующие реологические свойства конкретного материала: функцию неоднородности, описывающую распределение упомянутых параметров подобия по ПЭ (рис. 2) и реологическую функцию (рис. 3).

Им можно дать отчетливую физическую интерпретацию: первая характеризует степень микронеоднородности среды, распределение сопротивления микросоставляющих деформированию, характеризующее соотношение между числом относительно более прочных и более слабых частиц, а вторая – чувствительность микросоставляющих среды к скорости деформирования, изменение этой чувствительности с повышением напряжения и температуры.

Обе функции достаточно просто находятся из соответствующих базовых экспериментов стандартного типа, в ходе которых определяют диаграммы деформирования и кривые ползучести. По простоте и удобству идентификации данная модель может конкурировать с наиболее простыми феноменологическими моделями реологической среды. В то же время с помощью структурной модели данного типа удастся описать весьма широкий круг деформационных свойств конструкционных материалов, проявляемых ими при разных программах нестационарного однократного и циклического нагружения [4].

Моделью отражается взаимное влияние процессов неупругого быстрого деформирования (близких к мгновенному или пластическому) и ползучести, происходящей при выдержке с заданными статико-кинематическими условиями (чистая ползучесть при $\sigma = \text{const}$, чистая релаксация при $\varepsilon = \text{const}$, промежуточный процесс). Переход от деформирования с заданной скоростью к ползучести или наоборот сопровождается изменением системы микронапряжений $\sigma^{(k)}$, что, естественно, влияет на закономерности деформирования. Так, если быстрое деформирование прерывается выдержкой в том же направлении, то последующая диаграмма деформирования оказывается более крутой («упрочненной») по сравнению с обычной. И наоборот, диаграмма становится более пологой по сравнению с обычной, если быстрая неупругая деформация идет в направлении, обратном таковому при выдержке. Аналогично предшествующее быстрое деформирование приводит к переходному процессу типа первой стадии ползучести: при совпадении направлений деформирования ползучесть замедляется, а в противоположном случае ускоряется. Эффекты, возникающие при чередовании процессов неупругого деформирования (кратковременного и длительного), по характеру аналогичны эффекту Баушингера.

2.2. Обобщенный принцип подобия

При неизотермическом нагружении реологическая функция $\Phi(\sigma^{(k)}/z_k, T)$ может быть заменена функцией $\Phi(r^{(k)}/z_k)$. Использование упругой деформации $r = \sigma/E(T)$ вместо напряжения позволяет исключить из рассмотрения изменение (иногда значительное) упругих характеристик в зависимости от температуры. К тому же, если под величиной ε понимать лишь силовую де-

формацию за вычетом тепловой ($\varepsilon - \vartheta$), то можно исключить влияние температуры и на реологические свойства материала. Надо сказать, что независимое рассмотрение силовой деформации возможно только применительно к материалам, нагрев которых не приводит к существенному изменению самоуравновешенных микронапряжений (напряжений II рода).

Значению скорости быстрого деформирования $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_b$, когда ползучесть не успевает проявиться, соответствует зависящее от температуры T предельное значение $r_0^{(k)} = z_k \Phi^0(\dot{\varepsilon}_b, T) = z_k r_0(T)$; r_0 – предельное значение упругой деформации в ПЭ (аналог $\sigma_T^{(k)}$), имеющем $z_k = 1$; $\Phi^0(\dot{\varepsilon}, T)$ – обращенная по первому аргументу реологическая функция, задающая связь упругой деформации со скоростью установившейся ползучести при температуре T . С изменением температуры значения $r_0^{(k)}$ всех ПЭ меняются одинаково: принятое подобие реологических функций ПЭ означает и подобное изменение их характеристик в зависимости от температуры. Отсюда следует, что диаграммы деформирования модели (пакета ПЭ) при разных постоянных значениях температуры, построенные в координатах «упругая деформация $r = \sigma/E(T) \sim$ силовая деформация ε » центрально подобны. Таким образом, если при некоторой базовой температуре T_b диаграмма описывается функцией $r = f(\varepsilon)$, то при других значениях температуры соответствующее выражение имеет вид

$$r = \theta f\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right), \quad (2)$$

где

$$\theta = \left(\frac{r_0(T)}{r_b}\right) = \theta(T), \quad r_b = \Phi^0(\dot{\varepsilon}_b, T_b). \quad (3)$$

Выражение (2) с определением (3) справедливо и при неизотермическом деформировании, если температура изменяется достаточно плавно. Иначе говоря, текущее состояние материала при начальном нагружении характеризуется термомеханической поверхностью (ТМП), описываемой выражениями (2), (3). С учетом зависимости модуля упругости от температуры это означает одновременно и существование ТМП в пространстве $\{\sigma, \varepsilon, T\}$ (как было принято, ε – силовая деформация, не включающая тепловое расширение):

$$\sigma = E(T) \theta(T) f[\varepsilon/\theta(T)]. \quad (4)$$

С помощью ТМП можно уточнить требование плавности изменения температуры. Для обеспечения справедливости выражений (2)–(4) достаточно, чтобы относительный секундный модуль

$$C = \frac{r}{\varepsilon} \quad (5)$$

при деформировании не возрастал, т. е. чтобы количество ПЭ, охваченных пластическим течением, не уменьшалось в процессе деформирования, иными словами, чтобы ни в одном из них не началась разгрузка. Следовательно, в начале нагружения, когда все ПЭ работают упруго ($\varepsilon = r, C = 1$), температура может меняться с произвольной скоростью. По мере роста деформации для выполнения условий $\dot{C}_* \leq 0$ ее изменение должно становиться все более плавным. Отсюда следует, что если в некотором диапазоне температур предельная упругая деформация r_0 постоянна, то любое изменение T в этом диапазоне не нарушает справедливости ТМП.

«Уход» отображающей точки с ТМП, в отличие от изотермического нагружения, может произойти не только внутри поверхности (при реверсе деформации), но и в другую сторону (при реверсе секущего модуля вследствие быстрого роста значения $r_0(T)$, связанного, например, с понижением температуры, что интерпретируется как догрузка). В обоих случаях справедлива следующая модификация принципа Мазинга:

$$r_* = \theta_* f\left(\frac{\varepsilon_*}{\theta_*}\right), \quad (6)$$

$$r_* = r - r_v, \quad \varepsilon_* = \varepsilon - \varepsilon_v, \quad \theta_* = \theta - \theta_v, \quad (7)$$

где r_v , ε_v , θ_v – значения параметров r , ε , θ в момент достижения реверса (деформации или секущего модуля). В этом случае необходимо несколько видоизменить выражение (3) с учетом знака скорости деформации:

$$\theta = r_0(T)/r_b \operatorname{sign} \dot{\varepsilon}, \quad \operatorname{sign} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}/|\dot{\varepsilon}|, \quad (8)$$

при этом аргумент функции f в выражении (6) всегда положителен. Выражения (6)–(8) применимы и для начального нагружения, если принять $r_v = \varepsilon_v = \theta_v = 0$. Они справедливы как при изотермическом, так и неизотермическом нагружении и определяют новую ТМП. В координатах $\{r, \varepsilon, T\}$ последняя зависит от значений r_v , ε_v , θ_v . В координатах $\{r_*, \varepsilon_*, T\}$ – только от θ_v ; в координатах $\{r_*, \varepsilon_*, \theta_*\}$ она одинакова для начального нагружения и нагружения после любого реверса независимо от исходного состояния.

Границей применимости ТМП (кроме отмеченных условий постоянства знака скоростей $\dot{\varepsilon}$ и \dot{C}_*) является требование $C_* > C_{*v}$ (C_{*v} – значение C_* в момент последнего реверса; $C_* = r_*/\varepsilon_*$ – текущее значение секущего модуля).

Как было отмечено, после любого реверса скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ или секущего модуля C_* диаграммы деформирования при заданных значениях скорости $\dot{\varepsilon}$ и температуры T соответствуют термомеханической поверхности $r_* = \theta_* f(\varepsilon_*/\theta_*)$, где

$$\theta_* = \theta - \theta_v, \quad \theta = \Phi^0(\dot{\varepsilon}, T)/r_b. \quad (9)$$

Она определяет серию центрально подобных кривых (рис. 4) в координатах $\{r_*, \varepsilon_*\}$ с началом в точке реверса R . Все они подобны кривой $r = f(\varepsilon)$ (здесь $r = f(\varepsilon)$ – базовая диаграмма деформирования при начальном нагружении) с коэффициентами подобия θ_* (9). На рис. 4 показаны кривые с положительными значениями r_* , ε_* , θ_* ; существует аналогичное множество кривых с отрицательными значениями этих трех параметров.

Центрально подобные кривые обладают следующим свойством: связь секущего модуля $C_* = r_*/\varepsilon_*$ с касательным $K = dr_*/d\varepsilon_*$ одинакова для любой кривой деформирования. Если взять множество точек на диаграммах с разными значениями θ_* , характеризуемых одним и тем же секущим модулем C (точки $A_1, A_2 \dots$ на рис. 4), то для всех этих точек окажутся одинаковы и касательные модули K . Отношения RA_i/RA_1 представляют значения коэффициентов подобия θ_{*i} , отвечающих каждой из диаграмм. Зависимость $K = \varphi(C)$, которая потребуется в дальнейшем, получается по заданной кривой деформирования f .

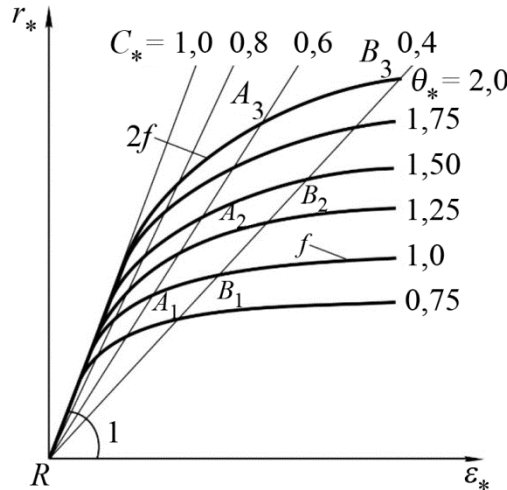


Рис. 4. Центральное подобие кривых деформирования после реверса

Форма каждой кривой деформирования (6) (ее отклонение от линии упругой работы $r_* = \varepsilon_*$) связана с развитием ползучести, скорость которой возрастает по мере увеличения значений r_* , ε_* . Последнюю можно определить, дифференцируя выражение (6) и обращая (9):

$$\dot{p} = \dot{\varepsilon} - \dot{r} = \left(1 - \frac{dr}{d\varepsilon}\right) \dot{\varepsilon} = \left(1 - \frac{dr_*}{d\varepsilon_*}\right) \Phi(\theta r_b, T).$$

Учитывая, что значение $dr_*/d\varepsilon_* = K$ зависит только от C_* , получаем [4]

$$\dot{p} = \Phi(\theta r_b, T) [1 - \varphi(C_*)]. \quad (10)$$

Таким образом, найденное значение скорости ползучести в каждой точке плоскости $\{r_*, \varepsilon_*\}$ представляет собой произведение двух функций одного аргумента (значение T считается фиксированным, хотя и произвольным). Первая – реологическая функция $\Phi[(\theta_* + \theta_v)r_b, T]$ – зависит от того, на какой из диаграмм (6) лежит точка с координатами $[r_*, \varepsilon_*]$ и от значения θ_v , зафиксированного в момент реверса. Например, для всех точек $A_2, B_2 \dots$ (рис. 4) значение θ_* одинаково. Вторая функция зависит от того, на каком из лучей $C_* = \text{const}$ лежит рассматриваемая точка $[r_*, \varepsilon_*]$: для всех точек $A_1, A_2, A_3 \dots$, она постоянна (из рисунка видно, что ее значение равно примерно 0,8, поскольку данному $C_* \approx 0,6$ соответствует $K \approx 0,2$).

Такая структура уравнения (10) связана со специфическим распределением напряжений (и скоростей ползучести) по ПЭ. После каждого реверса все ПЭ вначале работают упруго, но с ростом ε_* последовательно, начиная с самых «слабых», переходят в стадию неупругого деформирования. При каждом значении ε_* все подэлементы элементарного объема можно разделить на две группы: в одну входят ПЭ, продолжающие работать упруго ($r_*^{(k)} = \varepsilon_*$, $\dot{p}^{(k)} = 0$, $p^{(k)} = p_v^{(k)}$ – неупругая деформация в момент последнего реверса), в другую – подэлементы, в которых напряжения $\sigma^{(k)}$ достигли предельного для данной скорости $\dot{\varepsilon}$ значения. В них скорости неупругой деформации $\dot{p}^{(k)}$ одинаковы и равны Φ . Зная реологическую функцию подэлементов и текущий относительный вес последней группы (зависящий от ε_*),

путем осреднения $r_* = \langle r_*^{(k)} \rangle$, $\dot{p} = \langle \dot{p}^{(k)} \rangle$ получаем те же выражения (6) и (10). Первый множитель в выражении (10) представляет значения $\dot{p}^{(k)}$ в последней группе ПЭ, зависящие от относительной их нагруженности, определяемой параметром θ , второй множитель $[1 - \varphi(C_*)]$ представляет относительный вес этой группы (зависит только от величины C_*).

Принципиальное значение имеет наблюдение, сделанное в результате теоретического анализа модели и численных экспериментов: в большинстве программ повторно-переменного неизотермического нагружения с выдержками (исключая некоторые программы, несущественные в реальных условиях) распределение напряжений в каждый момент времени оказывается практически таким же, как при нагружении с постоянной после последнего реверса скоростью. Например, на рис. 5 показаны диаграммы быстрого нагружения с последующей выдержкой при постоянном напряжении *OBA*, с выдержкой при постоянной деформации *OCA* и промежуточного процесса *ODA*.

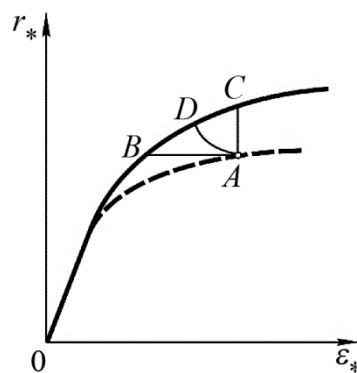


Рис. 5. «Забытие» предыстории активного нагружения и схема построения кривой деформирования с $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ ($\theta_* = \text{const}$)

Конечное состояние *A* оказывается одинаковым не только в макроскопическом смысле (с одними и теми же значениями r_* , ε_*), но и по распределению напряжений между ПЭ: оно мало отличается от распределения, которое достигается при деформировании *OA* (штриховая линия на рис. 5) с соответственно подобранной постоянной скоростью деформации. Это относится к каждой точке плоскости $\{r_*, \varepsilon_*\}$, точнее, части плоскости, где $C_* \leq 1$. Следовательно, уравнение (10) представляет собой макроскопическое уравнение состояния структурной модели: скорость ползучести в любой момент времени есть функция шести аргументов: r , ε , T , r_v , ε_v , θ_v , из которых три текущих – явные параметры состояния, остальные три (r_v , ε_v , θ_v) – постоянные, зафиксированные в момент последнего реверса. Вся предыстория влияет на текущие свойства лишь постольку, поскольку определяет указанные постоянные; часть же предыстории между моментами реверса и текущим состоянием не играет роли.

Заметим, что из четырех аргументов r , ε , T , r_v , ε_v на скорость ползучести влияют только две их комбинации: $r_* = r - r_v$ и $\varepsilon_* = \varepsilon - \varepsilon_v$. Они определяют и текущую величину $C_* = r_*/\varepsilon_*$, и значение θ_* в соответствии с уравнением (6). Что же касается параметров θ_* , θ_v , то на скорость ползучести влияет только их сумма: $\theta = \theta_* + \theta_v$. Зная текущее состояние r , ε , T и постоянные r_v , ε_v , θ_v , находим величины C_* , θ и, с помощью выражения (10), – текущее значение скорости ползучести \dot{p} .

Уравнение (9), также определяющее параметр θ , справедливо лишь в случае деформирования с заданной скоростью $\dot{\varepsilon}$ (в этом случае оно вытекает из уравнения состояния (10)).

Таким образом, ТМП, определяемая уравнениями (6), (9) – лишь частный случай, следующий из более общего (10).

Полученное уравнение состояния, использующее только две определяющие функции (реологическую и диаграмму деформирования) для описания кривых ползучести и деформирования при произвольной программе воздействия, имеет предельно простой вид за счет использования новых параметров состояния C_* , θ , довольно сложно связанных с историей измеряемых параметров r , ε , T .

Сформулируем правила «памяти», позволяющие вычислить эти новые параметры. При анализе реакции модели на заданную историю внешнего воздействия будем фиксировать моменты времени t_1, t_2, \dots, t_j , в которые происходит реверс скоростей деформации $\dot{\varepsilon}$ или секущего модуля \dot{C}_* (при начальном нагружении $0 < t < t_1$ параметр C_* есть отношение r/ε). Каждому из моментов t_j соответствует набор значений $r_j, \varepsilon_j, \theta_j, C_{*j}$, которые следует запомнить. Предпоследнему и последнему в хронологическом порядке из моментов t_j , хранящихся в текущий момент t программы нагружения в «памяти», присвоим индексы t_μ и t_ν . Состояние в текущий момент времени характеризуется параметрами памяти $r_\nu, \varepsilon_\nu, \theta_\nu$. Они и определяют текущие значения $r_* = r - r_\nu, \varepsilon_* = \varepsilon - \varepsilon_\nu, \theta_*(r_*, \varepsilon_*)$ (из выражения (6) для кривой деформирования), $\theta = \theta_* + \theta_\nu$ и $C_* = r_*/\varepsilon_*$. Тем самым определены аргументы уравнения состояния (к которым должно быть добавлено текущее значение температуры T).

Уравнение состояния определяет дальнейшее развитие процесса деформирования в соответствии с программой нагружения. Если при t_{i+1} произойдет реверс скоростей $\dot{\varepsilon}$ или \dot{C}_* , то этот момент фиксируется как момент нового реверса. Запоминаются значения r, ε, θ в этот момент под номером $i + 1$; они рассматриваются далее как значения с индексом ν , а те, которые использовались в этой роли до данного реверса, становятся предпоследними значениями с индексом μ .

Если значение C_* , убывая на данном этапе, достигнет значения $C_{*\nu}$, то, в зависимости от отношения θ_μ/θ , происходит забывание одного ($\theta_\mu/\theta < 1$) или двух ($\theta_\mu/\theta > 1$) последних из имеющихся в «памяти» моментов реверса. Соответственно переобозначаются моменты t_μ и t_ν как два последних из оставшихся в памяти; новыми становятся и параметры $r_\nu, \varepsilon_\nu, \theta_\nu, C_{*\nu}, \theta_\mu$, определяющие дальнейшее поведение модели. Уравнение состояния (10) на каждом этапе сохраняется прежним, меняется лишь начало отсчета входящих в него параметров. На первом этапе ($t < t_1$ при начальном нагружении либо $t > t_1$, если все моменты предшествовавших реверсов «забыты») все величины $r_\nu = \varepsilon_\nu = \theta_\nu = C_{*\nu} = 0$.

Полученное уравнение состояния (10) вместе с правилами «памяти», определяющими его аргументы, выражают важные свойства подобия в поведении модели после любого реверса, обобщающие принцип Мазинга на неизотермическое повторно-переменное нагружение с выдержками (ползучесть, релаксация). В связи с этим оно было названо принципом подобия [3, 4]. Без изменения оно относится к модели с любым количеством ПЭ. От последнего зависит лишь число изломов на кривой f . В частности, это число может быть бесконечным, а функция f – гладкой, соответствующей реальной характеристике материала.

Удобство принципа подобия заключается в том, что, пренебрегая некоторыми малозначительными и, что важно, ненакапливающимися (в связи с правилами «забывания») ошибками, он позволяет весьма наглядно выявить основные качественные и количественные закономерности деформирования модели, которые иначе могут быть определены только весьма трудоемкими систематическими многовариантными расчетами. Эти закономерности оказались близки к реальным, наблюдаемым в экспериментах. Показательно, что некоторые из них были предсказаны с помощью модели и лишь впоследствии обнаружены в ходе специально поставленных испытаний конструкционных материалов.

2.3. Кинетическая модель накопления повреждения при малоцикловом нагружении с учетом ползучести

Расчет накопления усталостного (или, как говорят, циклического) малоциклового повреждения выполняется с помощью модели повреждаемости кинетического типа [6, 7]. Приведем ее основные положения и определяющие уравнения.

Текущая дефектность материала характеризуется безразмерным неубывающим скалярным параметром – повреждением, сам же процесс накопления повреждения для краткости будем называть повреждаемостью. Скорость усталостного повреждения, накапливаемого элементом объема материала, представляет собой линейную однородную функцию скорости неупругой деформации. Предполагается, что усталостное повреждение ω связано лишь со знакопеременной составляющей неупругой деформации. Различаются процессы повреждаемости на этапах быстрого (пластического) и длительного (вязкого) деформирования и, соответственно, составляющие повреждения ω_p и ω_c . Согласно предположению скорость $\dot{\omega}_p$ повреждения ω_p неотрицательна; величина $\dot{\omega}_c$ может быть как положительной, так и отрицательной, однако соответствующее ей повреждение ω_c – величина всегда неотрицательная ($\omega_c \geq 0$).

При изотермическом нагружении из числа параметров уравнений состояния можно исключить температуру, влияние которой, как обычно, полагается параметрическим. При циклическом растяжении–сжатии уравнения, определяющие скорости повреждений $\dot{\omega}_p$ и $\dot{\omega}_c$, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_p &= H(|\theta| - \theta_c) D(\theta) p_*^a p_*^{\square}; \\ \dot{\omega}_c &= H(\omega_c) H(\theta_c - |\theta|) D(\theta) p_*^a p_*^{\square}, \end{aligned} \quad (11)$$

где H – функция Хевисайда (при неотрицательных значениях аргумента $H = 1$, иначе $H = 0$); $D(\theta)$ – функция, определяющая скорость повреждения материала; a – постоянная, в общем случае зависящая от температуры; p_* , θ – параметры состояния. Сомножитель $H(\omega_c)$ во втором уравнении играет роль своеобразной «отсечки»: вязкое повреждение ω_c в результате «залечивания» не может стать отрицательным, это противоречило бы здравому смыслу. Значение θ_c параметра θ разграничивает области реализации механизмов вязкого ($|\theta| < \theta_c$) и пластического ($|\theta| > \theta_c$) повреждения. В рассматриваемом ниже примере для определенности это значение принято равным 0,92.

Функция повреждаемости $D(\theta)$ при фиксированной температуре определяется по результатам серии испытаний на малоцикловую усталость с варьированием скорости деформирования в полциклах растяжения и сжатия, от быстрой до медленной – с выраженным влиянием ползучести [7]. Следует признать, что трудоемкость такого базового эксперимента значительна. Возможен более простой вариант идентификации модели с аппроксимацией функции повреждаемости кусочно-постоянной зависимостью с утратой возможности отражения некоторых эффектов влияния истории изменения деформации при различных статико-кинематических условиях выдержки:

$$D(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} D_p^+ & \text{при } \theta > \theta_c; \\ D_c^+ & \text{при } 0 < \theta < \theta_c; \\ D_c^- & \text{при } -\theta_c < \theta < 0; \\ D_p^- & \text{при } \theta < -\theta_c, \end{array} \right\}$$

где величины D_p^+ и D_c^+ отвечают этапам пластического и вязкого деформирования в полцикле растяжения, D_p^- и D_c^- – соответствующим этапам в полцикле сжатия. Для определения функции повреждаемости в таком виде необходимо, по аналогии с методом разделения размаха, провести испытания на малоцикловую усталость в циклах с выдержкой в режиме чистой ползучести в полцикле растяжения, сжатия, обоих полциклах и в цикле без выдержек.

3. Анализ кинетики напряженно-деформированного состояния и расчет накопления усталостного повреждения

3.1. Определение траектории точки состояния по заданной программе нагружения

Рассмотрим пример построения траектории точки состояния жаропрочного никелевого сплава ХН55ВМТКЮ (ЭИ 929) на плоскости $\sigma \sim \varepsilon$ в режиме жесткого упруговязкопластического деформирования. Марочный состав, режимы термообработки и основные характеристики этого сплава регламентируются (ГОСТ 5632-72. Стали высоколегированные и сплавы коррозионностойкие, жаростойкие и жаропрочные. Марочный состав). Сплав применяется для изготовления лопаток газовых турбин с ограниченным сроком службы при 900–950 °С и длительным при 700–800 °С.

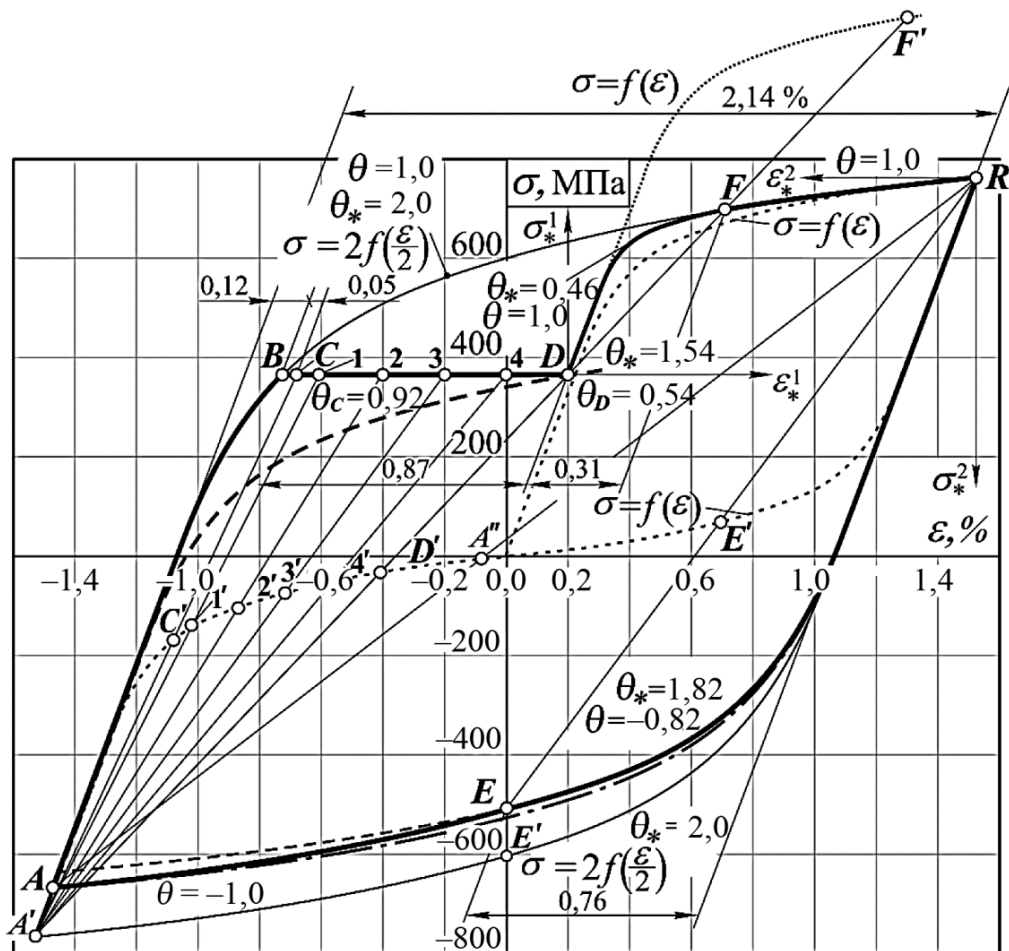


Рис. 6. Схема построения траектории перемещения точки состояния в пространстве «напряжение ~ деформация» в соответствии с заданной программой нагружения

Программа нагружения проиллюстрирована на рис. 6 и включает в себя следующие этапы:

- быстрое деформирование в полцикле растяжения ($\dot{\varepsilon} > 0$) до пластической деформации величиной $\varepsilon_p = 0,12\%$;
- выдержка в режиме чистой ползучести при постоянном напряжении 360 МПа, в течение которой приращение вязкой деформации составляет $\Delta\varepsilon_c = 0,87\%$;
- продолжение процесса быстрого деформирования до момента реверса R скорости деформации в полцикле растяжения;
- нагружение обратного знака со скоростью $\dot{\varepsilon} = 0,75\%/ч$, при которой необходимо учитывать влияние ползучести, до неупругой деформации $0,76\%$, отсчитанной от момента реверса;
- завершение деформирования с исходной высокой скоростью до замыкания петли гистерезиса и последующего реверса.

Ограничимся случаем изотермического нагружения, к тому же при постоянной температуре можно использовать привычные параметры напряженно-деформированного состояния.

Из сказанного выше следует, что для корректного количественного анализа процессов деформирования и повреждаемости с помощью обобщенного принципа подобия и кинетической модели накопления повреждения необходимо располагать кривой циклического деформирования материала в стабильном (стабилизированном) цикле заданного размаха деформации без участия ползучести (либо циклической кривой $\sigma_a(\varepsilon_a)$, построенной по вершинам петель упругопластического гистерезиса в стабильных циклах), семейством изохронных кривых при различных длительностях и, соответственно, скоростях нагружения и функцией повреждаемости $D(\theta)$ при заданной температуре. Однако наличие таких данных в полном объеме является скорее исключением (уникальный случай – раздел Б справочника [4]), чем правилом. Обычно расчетчику доступны лишь справочные данные, такие как представленные в табл. 1.

Таблица 1

Механические характеристики сплава ХН55ВМТКЮ, 800 °С (напряжения в МПа) [8]

$\sigma_{0,2}$	σ_B	$\psi, \%$	$E \cdot 10^{-5}$	σ_{100}	σ_{1000}	σ_{10000}	$\sigma_{1 \cdot 10^{-2}}$	$\sigma_{1 \cdot 10^{-3}}$
660	880	14,6	1,76	390	320	260	390	300

В табл. 1 обозначено: $\sigma_{0,2}$ – условный предел текучести; σ_B – временное сопротивление (предел прочности); ψ – относительное поперечное сужение при разрыве; E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга); σ_t – предел длительной прочности; σ_ε – предел ползучести, $\%/ч$.

Таким образом, в качестве кривой циклического деформирования придется использовать начальную кривую $\sigma = f(\varepsilon)$, которую аппроксимируем в параметрах «истинное напряжение $\bar{\sigma}$ ~ логарифмическая пластическая деформация p » степенной зависимостью по Рамбергу – Осгуду [9]:

$$\bar{\sigma} = K p^m,$$

где K, m – постоянные материала.

Полученное таким образом уравнение кривой деформирования сплава ХН55ВМТКЮ при $T = 800$ °С имеет вид

$$\bar{\sigma} = 1255 p^{0,105}.$$

Вычислим значение $\bar{\sigma}_{\text{пл}}$, соответствующее пределу пропорциональности, при котором касательный модуль составляет $\frac{2}{3}$ модуля упругости [6]:

$$\bar{\sigma}_{\text{пл}} = K \left(\frac{2 \cdot E}{3 \cdot m \cdot K} \right)^{\frac{m}{m-1}} = 1255 \left(\frac{2 \cdot 1,76 \cdot 10^5}{3 \cdot 0,105 \cdot 1255} \right)^{\frac{0,105}{0,105-1}} = 564 \text{ МПа}.$$

Затем представим диаграмму деформирования в традиционных параметрах «условное напряжение σ ~ полная инженерная деформация ε ». Последнюю найдем с учетом упругой и пластической (склерономной) составляющих логарифмической деформации e

$$\varepsilon = \exp(e) - 1, \quad \text{где } e = \frac{\bar{\sigma}}{E} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Условное напряжение, в свою очередь, определяется выражением

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\exp(e)} = \frac{\bar{\sigma}}{\exp\left(\frac{\bar{\sigma}}{E} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1}{m}}\right)}.$$

Приходится мириться с тем, что подобная замена кривой деформирования является весьма приближенным, хоть и вынужденным решением, поскольку не учитывает ее изменение в процессе циклической стабилизации материала, которая в зависимости от амплитуды деформации и коэффициента асимметрии цикла может происходить как в сторону упрочнения, так и в сторону разупрочнения.

На основе пределов ползучести [8] были определены параметры закона Нортон – Бэйли

$$\dot{\varepsilon} = A \sigma^n \quad (A = 1,82 \cdot 10^{-27}; n = 8,78),$$

представляющего своего рода «сечение» $T = \text{const}$ реологической функции. Этот закон использовался при построении изохронных кривых (рис. 7) шагами по времени. С учетом поставленной задачи ограничились деформацией 10 %. Для каждой был определен параметр относительной нагруженности θ (табл. 2), при начальном нагружении совпадающий с коэффициентом центрального подобия θ_* .

Таблица 2

Значения коэффициентов подобия изохронных кривых сплава ХН55ВМТКЮ

Коэффициент центрального подобия	Длительность изохронной кривой, ч					
	2	15	50	100	500	2000
θ	0,96	0,84	0,74	0,68	0,57	0,48

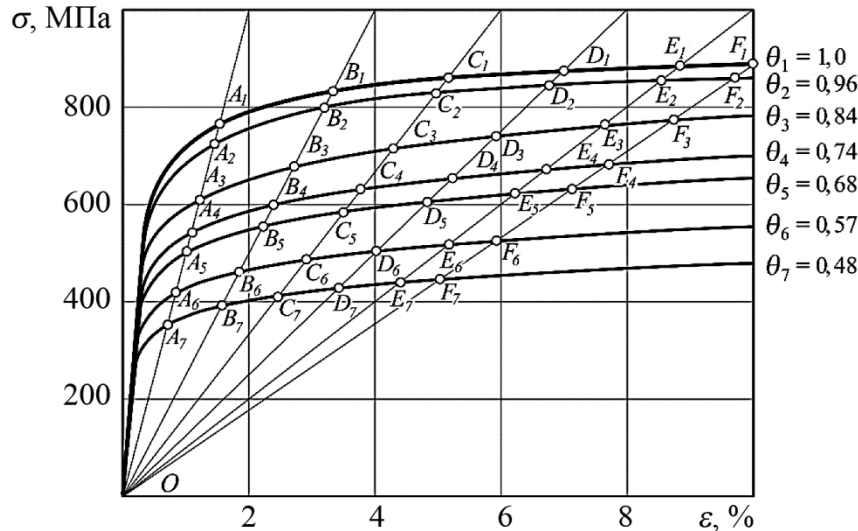


Рис. 7. К проверке центрального подобия изохронных кривых

Определение траектории точки состояния производится на основе петли гистерезиса $A'RA'$, образованной по принципу Мазинга удвоенной начальной кривой $\sigma = 2f(\varepsilon/2)$ с относительной нагруженностью $\theta = 1$.

Согласно заданной программе нагружения, из точки A' (рис. 6) построена кривая, представляющая собой удвоенную начальную кривую, до деформации $\varepsilon_B = 0,12\%$. Траектория $A'B$ точки состояния представляет этап быстрого пластического деформирования с относительной нагруженностью материала $\theta = 1$. Ниже будет показано, что начало этой кривой должно быть смещено несколько выше, в точку A , поскольку именно она является точкой реверса.

Начиная с точки B (которая, заметим, точкой реверса не является), на диаграмме отображается выдержка в режиме чистой ползучести при постоянном напряжении 360 МПа, причем в точке C параметр нагруженности θ уменьшается до величины $\theta_C = 0,92$, которой, как было принято в данном примере, отвечает смена механизма повреждаемости с пластического на вязкий.

Собственно вязкое деформирование с приращением деформации $\Delta\varepsilon_{CD} = 0,87\%$ к моменту D сопровождается непрерывным снижением относительной нагруженности θ . Примечательно, что, согласно принципу подобия, такого же состояния материала можно достичь в результате нагружения из точки реверса A (штриховая линия AD) с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = 8 \cdot 10^{-3}\%$ /ч.

Для определения относительной нагруженности материала в произвольный момент времени необходимо, следуя принципу подобия, 1) изобразить с началом в точках реверса A' , D , R начальную диаграмму деформирования (пунктирная линия на рис. 6), при этом отношения длин отрезков, обозначенных символами $C, 1, 2, 3, 4, D, F, E$, к отрезкам с соответствующими символами со штрихами определяют коэффициенты центрального подобия θ_{*i} ; 2) подсчитать относительную нагруженность в рассматриваемой точке плоскости $\sigma_* \sim \varepsilon_*$ как $\theta = \theta^* + \theta_R$. Например, в момент D отношение $A'D/A'D' = 1,54$; $\theta_R \equiv \theta_{A'} = -1,0$; тогда $\theta_D = 1,54 - 1,0 = 0,54$. Рассчитанное таким образом изменение относительной нагруженности сплава с ростом вязкой деформации на этапе выдержки CD проиллюстрировано рис. 8.

В точке D траектории этап ползучести прерывается так называемой догрузкой – возобновлением процесса быстрого деформирования. При этом нарушается монотонность изменения текущего модуля (определяемого тангенсом угла наклона отрезка AD), что является одним из признаков поворотного момента – смены начала системы отсчета напряжения σ_* и деформации ε_* (рис. 6, оси $\sigma_*^1 \sim \varepsilon_*^1$). Значения σ_D , ε_D , θ_D и C_D заносятся в «память» в качестве

параметров последнего реверса. Уравнение кривой деформирования $\sigma_*/\theta_* = f(\varepsilon_*/\theta_*)$ на участке DF по-прежнему подчиняется принципу подобия: $\theta_* = \theta - \theta_R$; значения остальных параметров: $\theta_R \equiv \theta_D = 0,54$; $\theta = 1$; таким образом, $\theta_*^{DF} = 1 - 0,54 = 0,46$ (рис. 6).

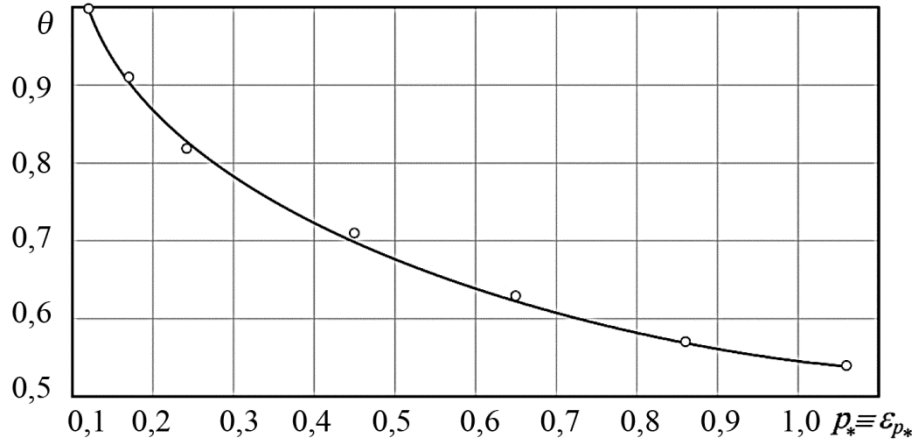


Рис. 8. Изменение относительной нагруженности материала с ростом вязкой деформации на этапе выдержки CD

В точке F траектории секущий модуль C_F вновь становится равным модулю C_D ; при этом условии происходит забывание части предыстории. Этап деформирования DF вместе с точкой реверса и параметрами σ_D , ε_D , θ_D , C_D удаляются из «памяти»; далее напряжение σ_* и деформация ε_* будут отсчитываться, как и прежде, от точки A (или, с небольшой погрешностью, от A'), единственной оставшейся в «памяти». Быстрое деформирование, предусмотренное программой нагружения, продолжается из точки F в соответствии с удвоенной кривой до момента очередного реверса – изменения знака скорости деформации в точке R .

В полувцикле сжатия производится нагружение обратного знака со скоростью $\dot{\varepsilon} = 0,75$ %/ч до величины неупругой деформации 0,76 %. Заданной скорости отвечает значение $\theta = 0,82$; коэффициент центрального подобия такой диаграммы равен $\theta_*^{RE} = -0,82 - 1,0 = -1,82$, однако в системе координат $\sigma_*^2 \sim \varepsilon_*^2$ (рис. 6) этот коэффициент положителен, и диаграмма деформирования имеет вполне традиционный вид.

В точке E скорость деформирования, согласно программе нагружения, увеличивается до исходной (высокой), поэтому часть траектории EA до замыкания петли гистерезиса представляет собой фрагмент удвоенной «мгновенной» кривой $E'A'$; линии RE и EA сопрягаются плавно, без излома, поскольку точка E по всем признакам точкой реверса не является. Если бы скорость $\dot{\varepsilon} = 0,75$ %/ч оставалась неизменной, движение точки состояния продолжалось бы вдоль штриховой линии (рис. 6).

Там же штрих-пунктирной линией показано, как выглядела бы диаграмма деформирования, если бы в течение всего полувцикла сжатия средняя скорость была постоянной; как видно, она почти не отличается от комбинации кривых RE и EA в связи с незначительным «весом» этапа EA . Построение этой диаграммы полностью аналогично построению штриховой линии AD , поэтому приведем лишь необходимые вычисления: отношение длин отрезков (равное коэффициенту центрального подобия) $RA/RA'' = \theta_*^{RA} = 1,86$; относительная нагруженность $\theta^{RA} = \theta_*^{RA} + \theta_R = 1,86 + (-1,0) = 0,86$.

Если бы программой нагружения был предусмотрен именно такой вариант деформирования в полувцикле сжатия, то параметр относительной нагруженности в момент реверса оказался бы равен $\theta_R \equiv \theta_A = -0,86$, а коэффициент центрального подобия кривой AB $\theta_*^{AB} = 1,0 - (-0,86) = 1,86$ вместо 2.

3.2. Анализ, расчет накопления усталостного повреждения и оценка долговечности

Заметим, что расчет процесса повреждаемости может быть проделан как совместно, по этапам, с построением траектории точки состояния на плоскости $\sigma \sim \varepsilon$, так и после завершения анализа кинетики неупругого деформирования. Таким образом, расчетчик может выбрать наиболее подходящий в каждом конкретном случае порядок действий.

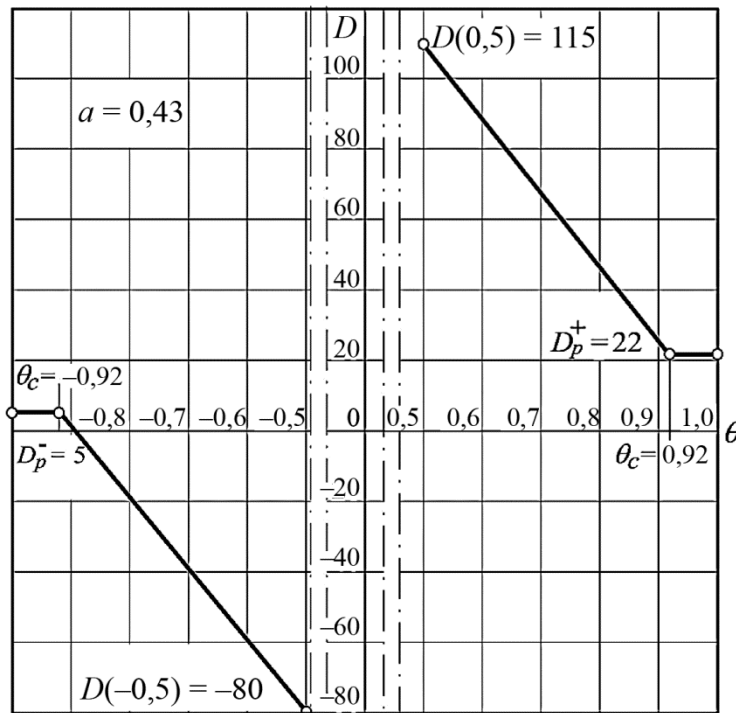


Рис. 9. Функция повреждаемости модельного материала, принятая для сплава ХН55ВМТКЮ

Расчет повреждения начинается с этапа AB , быстрого с постоянной скоростью нагружения, на котором параметр p_* изменяется в пределах $0 \leq p_* \leq p_B$. Этот интервал можно несколько расширить, учитывая, что на участке BC в начале выдержки значение параметра θ изменяется от 1,0 до 0,92 (рис. 6); при этом значении происходит смена механизма повреждаемости. Всем этим значениям отвечает постоянная $D_p^+ = 22$ функции повреждаемости (рис. 9).

Ввиду отсутствия экспериментальных данных функция повреждаемости сплава ХН55ВМТКЮ задана приближенно, исходя из характеристик, типичных для жаропрочных никелевых сплавов.

В итоге повреждение на участке ABC составит

$$\omega_p = \int_0^{1,7 \cdot 10^{-3}} 22 \cdot p_*^{0,43} dp_* = \frac{22}{1,43} \left(1,7 \cdot 10^{-3}\right)^{1,43} = 1,685 \cdot 10^{-3}.$$

Иллюстрировать результаты расчета кинетики повреждения удобно с использованием параметра Удквиста, представляющего путь неупругого (как пластического, так и вязкого) деформирования:

$$U = \int_0^{\varepsilon_{p+c}} |d\varepsilon_{p+c}|.$$

На рис. 10 показано изменение усталостного повреждения ω и его составляющих ω_p и ω_c в функции параметра Удквиста на протяжении всего цикла деформирования.

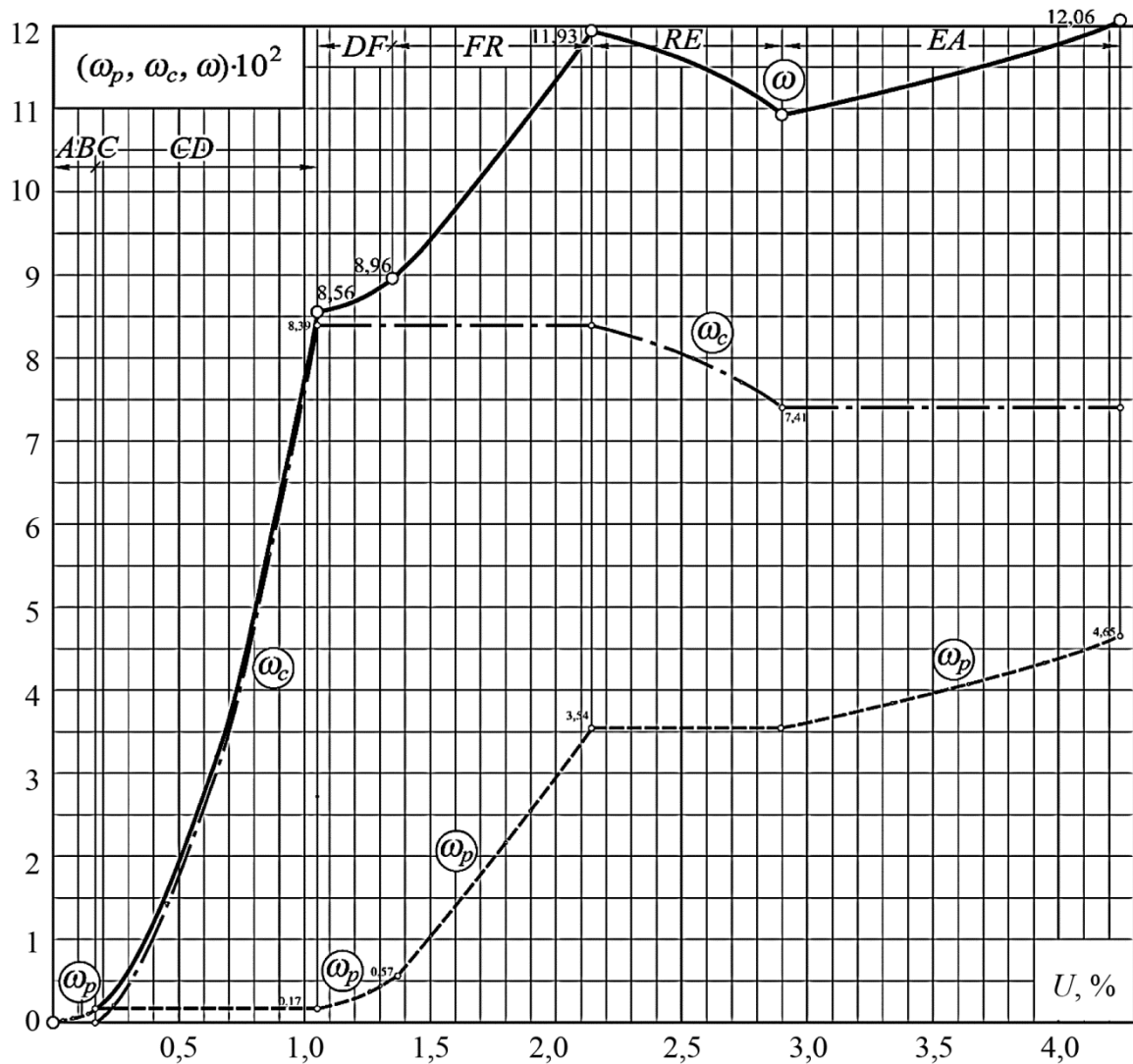


Рис. 10. Изменение усталостного повреждения ω (сплошная линия) и его составляющих ω_p (штриховая) и ω_c (штрих-пунктирная) по этапам на протяжении цикла деформирования (U – путь неупругого деформирования)

На участке вязкого деформирования CD относительная нагруженность θ переменна, поэтому подсчет соответствующего (вязкого) повреждения ω_c придется производить по шагам. Параметр θ переменен и в пределах шага, он принимает минимальное значение к концу интервала интегрирования. Выполняя численное интегрирование, будем использовать имен-

но это значение; таким образом, приращение повреждения в шаге окажется несколько большим, чем в случае переменной на интервале величины θ , что соответствует ошибке «в запас» (уточнить это значение можно, увеличив количество шагов):

$$\Delta \omega_c^{\square CD} = \sum_{i=1}^4 \int_{p_{*(i-1)}^{*i}}^{p_{*i}^{*i}} D(\theta_i) p_*^a dp_*^{\square} = \frac{1}{a+1} \sum_{i=1}^4 D(\theta_i) (p_{*i}^{a+1} - p_{*(i-1)}^{a+1}).$$

Здесь $D(\theta)$ – постоянная (и, как условились, минимальная) величина на каждом i -ом интервале интегрирования. Очевидно, она может быть вынесена из-под знака интеграла. Количество шагов выбирают в зависимости от величины деформации на этапе выдержки и ее характера, которым определяется интенсивность изменения функции повреждаемости, а следовательно, и скорость повреждения.

В табл. 6 приведены изменения составляющих усталостного повреждения на каждом из этапов неупругого (пластического, вязкого) деформирования и в целом усталостного повреждения нарастающим итогом.

Таблица 3

Поэтапное изменение усталостного повреждения ω и его составляющих ω_p и ω_c в течение цикла деформирования

Повреждения ($\omega, \omega_p, \omega_c$) · 10 ²	Этап деформирования					
	ABC	CD	DF	FR	RE	EA
$\Delta \omega_p$	0,17	–	0,40	2,97	–	1,11
ω_p	0,17	0,17	0,57	3,54	3,54	4,65
$\Delta \omega_c$	–	8,39	–	–	–0,98	–
ω_c	–	8,39	8,39	8,39	7,41	7,41
ω	0,17	8,56	8,96	11,93	10,95	12,06

В точке реверса D отсчет неупругой (пластической) деформации начинается с нуля и продолжается до момента F забывания части предыстории. Приращение повреждения $\Delta \omega_p$ вычисляется аналогично тому, как это делается на начальном этапе ABC :

$$\Delta \omega_p^{\square} = \int_0^{3,1 \cdot 10^{-3}} 22 \cdot p_*^{0,43} dp_*^{\square} = \frac{22}{1,43} (3,1 \cdot 10^{-3})^{1,43} = 3,98 \cdot 10^{-3} \cong 0,4 \cdot 10^{-2}.$$

Затем начало отсчета параметра p_* восстанавливается, а быстрое пластическое деформирование продолжается до завершения полуцикла реверсом в точке R . Изменение повреждения $\Delta \omega_p$ к этому моменту составит

$$\Delta \omega_p^{\square} = \int_{1,37 \cdot 10^{-2}}^{2,14 \cdot 10^{-2}} 22 \cdot p_*^{0,43} dp_*^{\square} = \frac{22}{1,43} \left[(2,14 \cdot 10^{-2})^{1,43} - (1,37 \cdot 10^{-2})^{1,43} \right] = 2,97 \cdot 10^{-2},$$

а все повреждение ω_p в целом будет равно $3,54 \cdot 10^{-2}$ (табл. 3).

В продолжение программы следует разгрузка и нагружение обратного знака с постоянной скоростью, которой отвечает относительная нагруженность $\theta = -0,82$. Постоянным на этапе *RE* величинам $\dot{\epsilon}$, θ соответствует постоянное (и, подчеркнем, отрицательное) значение функции повреждаемости $D(\theta)$ (рис. 9), в результате чего происходит частичная компенсация («залечивание»), экспериментально этот эффект проявляется как частичный возврат прочностных свойств) накопленного в полупереме растяжения повреждения ω_c :

$$\Delta\omega_c = \int_0^{0,76 \cdot 10^{-2}} (-15) \cdot p_*^{0,43} dp_* = \frac{-15}{1,43} \left(0,76 \cdot 10^{-2}\right)^{1,43} = -0,98 \cdot 10^{-2}.$$

Далее величина вязкого повреждения $\omega_c = 7,41 \cdot 10^{-2}$ до конца цикла остается неизменной.

В иных условиях (короткая выдержка в полупереме растяжения, низкая скорость деформирования в полупереме сжатия и/или более продолжительный этап ползучести в нем) возможна ситуация, когда все накопленное в полупереме растяжения повреждение ω_c окажется полностью скомпенсировано «залечиванием» в полупереме сжатия. Тогда оставшаяся часть участка вязкого деформирования не окажет никакого влияния на повреждение ω_c . Это автоматически следует из уравнений состояния (11) модели повреждаемости.

Завершающий этап *EA* деформирования с исходной высокой скоростью увеличивает общее повреждение лишь за счет составляющей ω_p :

$$\Delta\omega_p = \int_{0,76 \cdot 10^{-2}}^{2,14 \cdot 10^{-2}} 5 \cdot p_*^{0,43} dp_* = \frac{5}{1,43} \left[\left(2,14 \cdot 10^{-2}\right)^{1,43} - \left(0,76 \cdot 10^{-2}\right)^{1,43} \right] = 1,11 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, общее повреждение (сумма составляющих ω_p и ω_c), накопленное за цикл, будет равно $\omega = 12,06 \cdot 10^{-2}$ (рис. 10, табл. 3).

3.3. Прогноз долговечности

Полагая, что рассмотренный цикл деформирования соответствует циклически стабилизированному состоянию материала и реализуется в процессе стационарного регулярного нагружения без изменения до момента нарушения сплошности (образования макротрещины), а также полагая критическое повреждение в условиях растяжения–сжатия $\omega_{кр} = 1$, нетрудно оценить число циклов до разрушения

$$N_f = \frac{1}{\Delta\omega_{цикл}} = \frac{1}{12,06 \cdot 10^{-2}} = 8,3 \text{ цикла}.$$

Значения долговечности такого порядка относятся к области ультрамалоциклового усталости и для реальных конструкций являются скорее исключением. В связи с этим размах неупругой деформации более двух процентов, априори заданный в рассмотренном примере, носит демонстрационный характер.

4. Заключение

Таким образом, предложена методика, направленная на повышение эффективности использования конструкционных материалов применительно к условиям малоциклового нагружения теплонапряженных и высоконагруженных конструкций [10]. Методикой преду-

считается использование адекватных, доказавших свою работоспособность математических моделей деформационных и прочностных свойств материала. Уравнения состояния, описывающие кинетику малоциклового усталостного повреждения и неупругое деформирование, используют одни и те же параметры состояния среды, что во многом упрощает анализ обоих процессов и позволяет говорить об их взаимосвязи. Рассмотренный пример подтверждает практическое значение такого подхода при прогнозировании долговечности в условиях циклического неупругого деформирования при повышенной температуре с этапами быстрого и медленного изменения нагрузки.

Литература

1. Гохфельд Д. А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. – М. : Машиностроение, 1970. – 259 с.
2. Гохфельд Д. А., Чернявский О. Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. – М. : Машиностроение, 1979. – 264 с.
3. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. – М. : Машиностроение, 1984. – 256 с.
4. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении : справочник. / Д. А. Гохфельд, Л. Б. Гецов, К. М. Кононов, Е. Т. Кульчихин, Ю. Н. Ребяков, О. С. Садаков, С. А. Тимашев, В. Н. Чепурский. – Екатеринбург : УрО РАН, 1996, – 408 с.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
6. Порошин В. Б. Конструкционная прочность : учебник. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. – 440 с.
7. Порошин В. Б. Влияние формы цикла деформирования на накопление повреждения при различных типах малоциклового нагружения с выдержками // Проблемы прочности. – 1988. – № 1. – С. 38–43.
8. Масленков С. Б. Жаропрочные стали и сплавы: справочник. – М. : Metallurgy, 1983. – 192 с.
9. Ramberg W., Osgood W. R. Description of stress-strain curves by three parameters // Technical Note No. 902. – Washington DC : National Advisory Committee for Aeronautics, 1943. – 13 p.
10. Poroshin V. B., Ufimtsev A. N. Making a parameter map for the inelastic cyclic deformation of coiled tubing pipes by means of a digital model of test equipment // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2024. – Iss. 4. – P. 102–117. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.4.102-117. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-4/2024-4_459.html