Received: 15.01.2024
Revised: 29.02.2024
Accepted: 26.04.2024
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049

EXACT SOLUTIONS TO THE OBERBECK–BOUSSINESQ EQUATIONS FOR CONVECTIVE STOKES FLOWS

L. S. Goruleva[1, 2, a)], I. I. Obabkov[2, b)], and E. Yu. Prosviryakov[1, 2, c)], *

[1]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*
[2]*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

a) https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
b) https://orcid.org/0009-0008-8729-529X;
c) https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

To study large-scale convective flows (fluid motion in a thin layer), it is possible, for initial studies, to consider the Stokes approximation when integrating the Oberbeck–Boussinesq equation. The convective derivative in the momentum transfer equations and in the heat conduction equation is in this case assumed to be identically equal to zero. The paper discusses several approaches to constructing exact solutions for slow (creeping) flows of a non-uniformly heated fluid. Formulas for three-dimensional flows in the Lin–Sidorov–Aristov class are given for steady flows. The hydrodynamic fields are described by polynomials. Exact solutions are given for the velocity field nonlinearly depending on two spatial coordinates (longitudinal, or horizontal) with coefficients of nonlinear forms, which depend on the third coordinate. The study shows how it is possible to automate the computation of unknown coefficients for the formation of hydrodynamic fields (velocities and temperatures).

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, Oberbeck–Boussinesq equation, Stokes approximation, convection

References

1. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem. Technical Memorandum Ser., 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
2. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskii, E.M. *Convective Stability of Incompressible Liquid*, Wiley, Keter Press, Jerusalem, 1976, 330 p.
3. Gershuni, G.Z., Zhukhovitskii, E.M., and Nepomnyashchii, A.A. *Ustoychivost konvektivnykh techeniy* [Stability of Convective Flows]. Nauka Publ., Moscow, 1989, 318 p. (In Russian).
4. Getling, A.V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Sov. Phys. Usp*., 1991, 34 (9), 737–776. DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Andreev, V.K., Gaponenko, Ya.A., Goncharova, O.N., and Pukhnachev, V.V. *Mathematical Models of Convection*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics Ser., Walter De Gruyter, Berlin, 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Aristov, S.N. and Schwarz, K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkkih sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Layers of Liquid]. FGBOU VPO VyatGU Publ., Kirov, 2011, 206 p. (In Russian).
7. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*., 1966, 7, 43–44. DOI: 10.1007/bf00914697.

8. Shliomis, M.I. and Yakushin, V.I. The convection in a two-layer binary system with evaporation. *Uchenye Zapiski Permskogo Gosuniversiteta, Seriya Gidrodinamika*, 1972, 4, 129–140. (In Russian).
9. Gershuni, G.Z. On the stability of plane convective motion of a fluid. *Zh. Tekh. Fiz.*, 1953, 23 (10), 1838–1844. (In Russian).
10. Batchelor, G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math.*, 1954, 12 (3), 209–233. DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz, K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dyn.*, 2014, 49 (4), 438–442. DOI: 10.1134/ S0015462814040036.
12. Knyazev, D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, 52 (2), 212–217. DOI:10.1134/ S0021894411020088.
13. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, 9 (4), 651–657. (In Russian).
14. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (2), 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
15. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychislitelnaya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2015, 8 (4), 445–456. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin, C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, 1, 391–395. DOI:10.1007/BF00298016.
17. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Synopsis of Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
19. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, 48, 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
20. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
22. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, 25 (3), 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
23. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release. *Optics and Spectroscopy*, 2022, 130 (6), 365–370. DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
24. Burmasheva, N., Ershkov, S., Prosviryakov, E., and Leshchenko, D. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction. *Fluids*, 2023, 8 (4), 123. DOI: 10.3390/fluids8040123.
25. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
26. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.

27. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2022, 56 (3), 331–338. DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2022, 48, 258–262, DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for magnetohydrodynamics equations to describe convective flows of binary liquids. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya*, 2023, 25 (4), 447–462. (In Russian). DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
31. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
32. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 5, 39–52. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
33. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Steady convective Coutte flow for quadratic heating of the lower boundary fluid layer. *Nelineinaya Dinamika*, 2018, 14 (1), 69–79. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova, S.S. and Prosviryakov, E.Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronautics*, 2016, 59 (4), 529–535. DOI: 10.3103/S1068799816040140.
35. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2016, 12 (2), 167–178. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Planar linear Bénard-Rayleigh convection under quadratic heating of the upper boundary of a viscous incompressible liquid layer. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2015, 2, 6–13. (In Russian).
37. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of thermocapillary convection during localized heating of a flat layer of viscous incompressible liquid. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2014, 3, 7–12. (In Russian).
38. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Maragoni viscous incompressible fluid. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, 3 (32), 110–118. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, 2, 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. Available at: http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html
40. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, 22 (3), 532–548. DOI: 10.14498/vsgtu1638.

Подана в журнал: 15.01.2024
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЕРБЕКА – БУССИНЕСКА ДЛЯ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СТОКСА

Л. С. Горулева[1, 2, а)], И. И. Обабков[2, б)], Е. Ю. Просвиряков[1, 2, в), *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*
Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
[2]*Уральский федеральный университет,*
ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

а) https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
б) https://orcid.org/0009-0008-8729-529X;
в) https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия
Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

При изучении конвективных крупномасштабных течений (движение жидкости в тонком слое) можно для первоначальных исследований рассматривать приближение Стокса при интегрировании уравнения Обербека – Буссинеска. В этом случае конвективную производную в уравнениях переноса импульса и в уравнении теплопроводности полагают тождественно равной нулю. В статье рассмотрено несколько подходов к построению точных решений для медленных (ползущих) течений неоднородно нагретой жидкости. Для установившихся течений приведены формулы для трехмерных течений в классе Линя – Сидорова – Аристова. Гидродинамические поля описываются полиномами. Приведены точные решения для поля скоростей, нелинейно зависящего от двух пространственных координат (продольных, или горизонтальных) с коэффициентами нелинейных форм, зависящими от третьей координаты. Показано, как можно автоматизировать вычисления неизвестных коэффициентов для формирования гидродинамических полей (скоростей и температуры).

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье – Стокса, уравнение Обербека – Буссинеска, аппроксимация Стокса, конвекция

1. Введение

Подавляющее большинство процессов в природе протекает при изменении температуры [1–6]. В жидкостях и газах при наличии градиента температуры происходит интенсивное вихревое движение – конвекция. Данный вид теплообмена (теплопередачи) является самым распространенным и наблюдаемым способом переноса энергии во Вселенной [4–6]. Безусловно, конвекция индуцируется не только неоднородностью теплового поля. Конвективное движение может быть вызвано неоднородным распределением примесей в растворе, наличием магнитного, электрического полей и других силовых факторов. Механизм конвекции существенно зависит от силового поля, в котором течет жидкость или газ, что позволяет классифицировать конвективное движение на две группы: естественное и вынужденное [2–4].

Для теоретического изучения конвекции используется система Обербека – Буссинеска, которая состоит из уравнений Навье – Стокса, уравнения непрерывности (несжимаемости) и уравнения теплопроводности [2, 3]. Напомним, что система Обербека –Буссинеска является приближенной. В уравнениях Навье – Стокса принята аппроксимация плотности по Буссинеску: плотность зависит от температуры и учитывается только в объемной силе Архимеда [2, 3]. В уравнениях непрерывности линейное распределение плотности от температуры заменяют постоянной плотностью, которую имеет жидкость до нагрева или охлаждения, поэтому используется уравнение несжимаемости [2, 3].

Сложность описания конвективных течений несжимаемых сред мотивирует разрабатывать новые теоретические подходы к интегрированию уравнений Обербека – Буссинеска. Важным вкладом в исследование течения жидкостей является нахождение новых классов класс Остроумова – Бириха и построенное на основе этого класса семейство Шлиомиса [6–13]. точных решений. Первым точным решением для уравнений Обербека –Буссинеска является Кроме того, существует класс точных решений Линя – Сидорова – Аристова для интегрирования трехмерных уравнений естественной и вынужденной конвекции [13–19]. Семейство точных решений Линя – Сидорова – Аристова представляет собой суперпозицию аддитивного и мультипликативного разделения переменных [16–18, 20]. Такой вид позволяет использовать этот класс для геометрически анизотропных областей и для изучения поперечной структуры течений, где затруднено или невозможно экспериментальное исследование полей скорости, давления и температуры [5, 20].

С использованием формул представления гидродинамических полей Линя – Сидорова – Аристова были получены классы точных решений для описания конвективных течений жидкостей с термодиффузией [20], для течений многослойных жидкостей [21, 22], для описания движений с учетом вибрации [6]. Был использован класс Линя – Сидорова – Аристова для изучения течений жидкостей с учетом диссипативной функции Рэлея [23], для решения задач геофизической гидродинамики с учетом объемной силы трения Рэлея [24]. Кроме того, найдены классы точных решений для изотермических и конвективных течений жидкостей с полем скоростей, нелинейным относительно двух координат [25–32].

Можно констатировать, что для теоретического описания нелинейных процессов конвекции имеется довольно большой запас точных решений. Важную роль при изучении конвективных движений играет приближение Стокса [2–5]. Аппроксимацию Стокса используют для описания медленных (ползущих) течений, полагая приближенно равной нулю конвективную производную в уравнениях переноса импульса и теплопроводности [2–5]. Построение точных решений для линейной системы Обербека – Буссинеска имеет самостоятельный интерес. В данной статье рассматриваются точные решения системы Обербека – Буссинеска для течений Стокса в полиномиальных классах точных решений, а для установившихся течений выписаны формулы гидродинамических полей в явном виде.

2. Уравнения движения

Система уравнений Обербека – Буссинеска для описания конвективных течений жидкостей в неоднородном поле температуры записывается в векторной форме следующим образом [2, 3]:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + g\beta T\mathbf{i}_3,$$
$$\frac{dT}{dt} = \chi\Delta T,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \tag{1}$$

В уравнениях (1) использована аппроксимация Буссинеска для плотности $\rho = \rho_0(1 - \propto T)$, где ρ_0 – средняя плотность жидкости, $\propto$ – коэффициент теплового расширения, T – отклонение температуры от равновесного значения; $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости; P – отклонение давления от гидростатического, деленное на ρ_0; ν – кинематическая вязкость; g – ускорение свободного падения; χ – коэффициент температуропроводности;

$\nabla = \mathbf{i}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_3 \dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты декартовой прямоугольной системы координат; $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ – полная производная (индивидуальная производная, материальная производная, производная в частице, производная вдоль траектории), состоящая из суммы локальной (местной) и конвективной производных.

Рассмотрим далее приближение Стокса для системы (1). Полагаем в уравнениях (1) выполнение равенств для конвективных слагаемых $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{V} \cdot \nabla T = 0$ полной производной в эйлеровых координатах. После данной редукции, которая физически является асимптотической, получим следующие линейные уравнения движения:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g\beta T \mathbf{i}_3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \qquad (2)$$

Систему уравнений (2) приведем в координатной форме записи в декартовой прямоугольной системе координат и запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) + g\beta T,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

Точное решение линейной системы уравнений в частных производных (3) будем находить в классе Линя – Сидорова – Аристова [16–18, 20]:

$$V_x = U(z,t) + x u_1(z,t) + y u_2(z,t),$$
$$V_y = V(z,t) + x v_1(z,t) + y v_2(z,t),$$
$$V_z = w(z,t),$$
$$P = P_0(z,t) + P_1(z,t)x + P_2(z,t)y + P_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(z,t)xy + P_{22}(z,t)\frac{y^2}{2},$$
$$T = T_0(z,t) + T_1(z,t)x + T_2(z,t)y + T_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + T_{12}(z,t)xy + T_{22}(z,t)\frac{y^2}{2}. \qquad (4)$$

Выражения (4), полученные суперпозицией применения аддитивного и мультипликативного методов разделения переменных, описывают поле скоростей линейными формами относительно координат x и y, а поля давления и температуры – квадратичными формами этих же координат. Коэффициенты линейных и квадратичных форм (4) зависят от третьей координаты z и времени t.

Отметим, что точное решение (4) может быть обобщено до представления гидродинамических полей следующими формами [25]:

$$V_x = U(z,t) + xu_1(z,t) + yu_2(z,t) + u_3(z,t)\frac{x^2}{2} + u_4(z,t)xy + u_5(z,t)\frac{y^2}{2},$$
$$V_y = V(z,t) + xv_1(z,t) + yv_2(z,t) + v_3(z,t)\frac{x^2}{2} + v_4(z,t)xy + v_5(z,t)\frac{y^2}{2},$$
$$V_z = w(z,t) + xw_1(z,t) + yw_2(z,t),$$
$$P = P_0(z,t) + P_1(z,t)x + P_2(z,t)y + P_3(z,t)\frac{x^2}{2} + P_4(z,t)xy + P_5(z,t)\frac{y^2}{2} +$$
$$+ P_6(z,t)\frac{x^3}{3!} + P_7(z,t)\frac{x^2 y}{2} + P_8(z,t)\frac{xy^2}{2} + P_9(z,t)\frac{y^3}{3!},$$
$$T = T_0(z,t) + T_1(z,t)x + T_2(z,t)y + T_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + T_{12}(z,t)xy + T_{22}(z,t)\frac{y^2}{2}.$$

Изучение свойств данного решения не является целью данной статьи, но иллюстрирует возможность дальнейшего обобщения результатов.

Подставим формулы для гидродинамических полей (4) в систему уравнений (3). Получим следующую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(P_1 + xP_{11} + yP_{12}) + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(P_2 + yP_{22} + xP_{12}) + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + x\frac{\partial P_1}{\partial z} + y\frac{\partial P_2}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial P_{11}}{\partial z} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial P_{22}}{\partial z} + xy\frac{\partial P_{12}}{\partial z}\right) + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} +$$
$$+ g\beta\left(T_0 + xT_1 + yT_2 + \frac{x^2}{2}T_{11} + \frac{y^2}{2}T_{22} + xyT_{12}\right),$$
$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \chi\left(T_{11} + T_{22} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} + xy\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} + u_1 + v_2 = 0. \qquad (5)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x и y в (5), получим следующую систему, состоящую из девятнадцати нестационарных нелинейных уравнений в частных производных, для определения неизвестных девятнадцати функций:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - P_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - P_{11},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - P_{12}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - P_2,$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - P_{12}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - P_{22},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial P_0}{\partial z} - g\beta T_0,$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2,$$
$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = g\beta T_{11}, \quad \frac{\partial P_{12}}{\partial z} = g\beta T_{12}, \quad \frac{\partial P_{22}}{\partial z} = g\beta T_{22},$$
$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + \chi\left(T_{11} + T_{22}\right),$$
$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Система (6) состоит из четырнадцати однородных и неоднородных простейших уравнений типа теплопроводности и пяти уравнений градиентного типа.

3. Установившееся течение

Система уравнений (6) при установившемся течении редуцируется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 T_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_2}{dz^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 T_{11}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_{22}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_{12}}{dz^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 T_0}{dz^2} = -\left(T_{11} + T_{22}\right),$$
$$\frac{dP_1}{dz} = g\beta T_1, \quad \frac{dP_2}{dz} = g\beta T_2,$$
$$\frac{dP_{11}}{dz} = g\beta T_{11}, \quad \frac{dP_{12}}{dz} = g\beta T_{12}, \quad \frac{dP_{22}}{dz} = g\beta T_{22},$$
$$\nu \frac{d^2 U}{dz^2} = P_1, \quad \nu \frac{d^2 u_1}{dz^2} = P_{11},$$
$$\nu \frac{d^2 u_2}{dz^2} = P_{12}, \quad \nu \frac{d^2 V}{dz^2} = P_2,$$
$$\nu \frac{d^2 v_1}{dz^2} = P_{12}, \quad \nu \frac{d^2 v_2}{dz^2} = P_{22},$$
$$\frac{dw}{dz} + u_1 + v_2 = 0,$$
$$\frac{dP_0}{dz} = \nu \frac{d^2 w}{dz^2} + g\beta T_0. \tag{7}$$

Уравнения системы (7) выписаны в том порядке, в котором далее осуществляется аналитическое интегрирование.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений тридцать первого порядка (7) начнем с определения коэффициентов квадратичной формы для поля температуры:

$$T_1 = c_1 z + c_2, \; T_2 = c_3 z + c_4,$$
$$T_{11} = c_5 z + c_6, \; T_{12} = c_7 z + c_8, \; T_{22} = c_9 z + c_{10},$$
$$T_0 = -(c_5 + c_9)\frac{z^3}{3!} - (c_6 + c_{10})\frac{z^2}{2!} + c_{11} z + c_{12}.$$

Таким образом, поле температуры для установившегося конвективного течения Стокса описывается следующим многочленом от трех переменных:

$$T = -(c_5 + c_9)\frac{z^3}{3!} - (c_6 + c_{10})\frac{z^2}{2!} + c_{11} z + c_{12} + (c_1 z + c_2)x + (c_3 z + c_4)y +$$
$$+(c_5 z + c_6)\frac{x^2}{2} + (c_7 z + c_8)xy + (c_9 z + c_{10})\frac{y^2}{2}.$$

Далее определим горизонтальные градиенты давления и коэффициенты, стоящие перед квадратичными мономами:

$$P_1 = g\beta\left(c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z\right) + c_{13},$$
$$P_2 = g\beta\left(c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z\right) + c_{14},$$
$$P_{11} = g\beta\left(c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z\right) + c_{15},$$
$$P_{12} = g\beta\left(c_7 \frac{z^2}{2} + c_8 z\right) + c_{16},$$
$$P_{22} = g\beta\left(c_9 \frac{z^2}{2} + c_{10} z\right) + c_{17}.$$

Для удобства коэффициенты для квадратичной формы, описывающей поле давления, можно записать следующим образом:

$$P_1 = g\beta\left(c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z + c_{13}\right),$$
$$P_2 = g\beta\left(c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z + c_{14}\right),$$
$$P_{11} = g\beta\left(c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z + c_{15}\right),$$

$$P_{12} = g\beta\left(c_7\frac{z^2}{2} + c_8 z + c_{16}\right),$$

$$P_{22} = g\beta\left(c_9\frac{z^2}{2} + c_{10} z + c_{17}\right).$$

Перейдем к интегрированию уравнений для определения фоновых скоростей U и V, а также горизонтальных градиентов скоростей (компонент пространственного ускорения):

$$U = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_1\frac{z^4}{4!} + c_2\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{13}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{18}z + c_{19},$$

$$V = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_3\frac{z^4}{4!} + c_4\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{13}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{20}z + c_{21},$$

$$u_1 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_5\frac{z^4}{4!} + c_6\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{15}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{22}z + c_{23},$$

$$u_2 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{16}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{24}z + c_{25},$$

$$v_1 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{16}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{26}z + c_{27}$$

$$v_2 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_9\frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^3}{3!}\right) + \frac{c_{29}}{\nu}\frac{z^2}{2} + c_{28}z + c_{29},$$

$$w = -\frac{g\beta}{\nu}\left(c_5\frac{z^5}{5!} + c_9\frac{z^5}{5!} + c_6\frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^4}{4!}\right) -$$

$$-\left(c_{15} + c_{17}\right)\frac{z^3}{3!\nu} - \left(c_{26} + c_{28}\right)\frac{z^2}{2} - \left(c_{27} + c_{29}\right)z + c_{30}.$$

Очевидно, что при соответствующей нормировке постоянных интегрирования выражения можно переписать следующим образом:

$$U = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_1\frac{z^4}{4!} + c_2\frac{z^3}{3!} + c_{13}\frac{z^2}{2} + c_{18}z + c_{19}\right),$$

$$V = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_3\frac{z^4}{4!} + c_4\frac{z^3}{3!} + c_{13}\frac{z^2}{2} + c_{20}z + c_{21}\right),$$

$$u_1 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_5\frac{z^4}{4!} + c_6\frac{z^3}{3!} + c_{15}\frac{z^2}{2} + c_{22}z + c_{23}\right),$$

$$u_2 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!} + c_{16}\frac{z^2}{2} + c_{24}z + c_{25}\right),$$

$$v_1 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_7\frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!} + c_{16}\frac{z^2}{2} + c_{26}z + c_{27}\right),$$

$$v_2 = \frac{g\beta}{\nu}\left(c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^3}{3!} + c_{17}\frac{z^2}{2} + c_{28}z + c_{29} \right),$$

$$w = V_z = -\frac{g\beta}{\nu}\left(c_5 \frac{z^5}{5!} + c_9 \frac{z^5}{5!} + c_6 \frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^4}{4!} + \left(c_{15}+c_{17}\right)\frac{z^3}{3!} \right.$$
$$\left. + \left(c_{26}+c_{28}\right)\frac{z^2}{2} + \left(c_{27}+c_{29}\right)z + c_{30} \right).$$

Линейные формы, описывающие горизонтальные скорости, в силу найденных решений являются многочленами трех переменных:

$$\frac{\nu}{g\beta}V_x = \left(c_1 \frac{z^4}{4!} + c_2\frac{z^3}{3!} + c_{13}\frac{z^2}{2} + c_{18}z + c_{19} \right) + x\left(c_5 \frac{z^4}{4!} + c_6\frac{z^3}{3!} + c_{15}\frac{z^2}{2} + c_{22}z + c_{23} \right) +$$
$$+ y\left(c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!} + c_{16}\frac{z^2}{2} + c_{24}z + c_{25} \right),$$

$$\frac{\nu}{g\beta}V_y = \left(c_3 \frac{z^4}{4!} + c_4\frac{z^3}{3!} + c_{13}\frac{z^2}{2} + c_{20}z + c_{21} \right) + x\left(c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8\frac{z^3}{3!} + c_{16}\frac{z^2}{2} + c_{26}z + c_{27} \right) +$$
$$+ y\left(c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10}\frac{z^3}{3!} + c_{17}\frac{z^2}{2} + c_{28}z + c_{29} \right).$$

Выражение для фонового давления после интегрирования имеет вид

$$P_0 = g\beta\left(-2\left(c_5+c_9\right)\frac{z^4}{4!} - 2\left(c_6+c_{10}\right)\frac{z^3}{3!} + c_{11}\frac{z^2}{2} + c_{12}z \right) -$$
$$\nu\left(-\left(c_{15}+c_{17}\right)\frac{z^2}{2!\nu} - \left(c_{26}+c_{28}\right)z - \left(c_{27}+c_{29}\right) \right) + c_{31}.$$

Здесь c_i, где $i=\overline{1;31}$, – постоянные интегрирования точного решения системы уравнений (7). Отметим, что частные случаи краевых задач (плоская конвекция) были рассмотрены в статьях [33–40], где была показана возможность стратификации гидродинамических полей скорости, давления и температуры.

4. Заключение

В статье представлено точное решение для медленных (ползущих) конвективных течений вязкой жидкости. Аппроксимация конвективной производной выполнена по Стоксу. В этом случае нелинейная система Обербека – Буссинеска редуцируется к линейной системе уравнений в частных производных. Было показано, что для установившихся течений поле скорости, поле давления и поле температуры в классе Линя – Сидорова – Аристова описываются многочленами от трех переменных. Эти многочлены иллюстрируют сложную стратификацию гидродинамических полей для широкого класса граничных условий.

Литература

1. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. Ser. Technical Memorandum. – No. 1407. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
3. Гершуни Г. З. Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М. : Наука, 1989. – 318 с.
4. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection // Sov. Phys. Usp. – 1991. – 34 (9). – P. 737–776. – DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Mathematical Models of Convection. Ser. De Gruyter Studies in Mathematical Physics / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin : Walter De Gruyter, 2012. – 417 p. – DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2011, 206 с.
7. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1966. – No. 7. – P. 43–44. – DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского госуниверситета. Сер. Гидродинамика. – 1972. – № 4. – С. 129–140.
9. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного течения жидкости // Журнал технической физики. – 1953. – Т. 23, № 10. – С. 1838–1844.
10. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12, No. 3. – P. 209–233. – DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynaics. – 2014. – Vol. 49, No. 4. – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
12. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2011. – Vol. 52, No. 2. – P. 212–217. – DOI: 10.1134/S0021894411020088.
13. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 651–657.
14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (2). – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.
15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
17. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1989. – Vol. 30, No. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук : 01.02.05. – Владивосток, 1990. – 303 с.
19. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.

20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2022. – Vol. 18, No. 3. – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2021. – Vol. 25 (3). – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.
23. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A New class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with allowance for internal heat release // Optics and Spectroscopy. – 2022. – Vol. 130, No. 6. – P. 365–370. – DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
24. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction / N. Burmasheva, S. Ershkov, E. Prosviryakov, D. Leshchenko // Fluids. – 2023. – Vol. 8 (4). – P. 123. – DOI: 10.3390/fluids8040123.
25. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53, No. 1. – P. 107–114. –10.1134/S0040579518060088.
26. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // Symmetry. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
27. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid // Theor. Found. Chem. Eng. – 2022. – Vol. 56, No. 3. – P. 331–338. – DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // Technical Physics Letters. – 2022. – Vol. 48. – P. 258–262. – DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики для описания конвективных течений бинарных жидкостей // Химическая физика и мезоскопия. – 2023. – Т. 25, № 4. – С. 447–462. – DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
32. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 5. – P. 39–52. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
33. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное конвективное течение Куэтта–Хименца при квадратичном нагреве нижней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 69–79. – DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova S. S., Prosviryakov E. Y. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary // Russian Aeronautics. – 2016. – Vol. 59, No. 4. – P. 529–535. – DOI: 10.3103/S1068799816040140.

http://dream-journal.org ISSN 2410-9908

35. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12, № 2. – С. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Плоская линейная конвекция Бенара-Рэлея при квадратичном нагреве верхней границы слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2015. – № 2. – С. 6–13.
37. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2014. –№ 3. – С. 7–12.
38. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физ.-мат. науки». – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118. – DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html
40. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2018. – Vol. 22 (3). – P. 532–548. – DOI: 10.14498/vsgtu1638.