Received: 31.08.2023
Revised: 15.10.2023
Accepted: 20.10.2023
DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052

EXACT SOLUTIONS FOR THE DESCRIPTION OF NONUNIFORM UNIDIRECTIONAL FLOWS OF MAGNETIC FLUIDS IN THE LIN–SIDOROV–ARISTOV CLASS

L. S. Goruleva[1, 2, a)] and E. Yu. Prosviryakov[1, 2, b), *]

[1]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*
[2]*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

a) https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
b) https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The paper considers the exact integration of magnetic hydrodynamic equations for describing nonuniform unidirectional flows of viscous incompressible fluids. The construction of an exact solution is based on the well-known representation of hydrodynamic fields as the Lin–Sidorov–Aristov class. The 3d magnetic field is described by linear forms with respect to two spatial coordinates (longitudinal, or horizontal). The coefficients of the linear forms depend on the third coordinate and time. In view of the incompressibility condition, the 1D velocity field depends on two coordinates and time. The pressure is shown to be determined by a quadratic form with constant coefficients. These coefficients are determined by pressure distribution on the known (free) boundary. The exact solution is illustrated by the integration of non-1D hydrodynamic fields in the case of the steady motion of a conducting viscous incompressible fluid. This solution is polynomial, and it will be useful for the formulation of new problems of hydrodynamic stability.

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, magnetic hydrodynamics, conducting fluid, nonuniform flow

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790140-5.

References

1. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 p. DOI: 10.1017/cbo9780511526459.
2. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu, Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
3. Pukhnachev, V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, 1, 6–76. (In Russian).
4. Wang, C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Applied Mechanics Review*, 1989, 42 (11S), 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
5. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, 23, 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.

6. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem, 1958, *NASA Technical Memorandum 1407*.
7. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7, 43–44. DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Hartmann, J. and Lazarus, F. Theory of the laminar flow of an electrically conducting liquid in a homogeneous magnetic field. *Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Mathematisk-fysiske Meddelelser*, 1937, 15 (6), 1–28.
9. Lin, C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, 1, 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
10. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
11. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers. Optimization of Boundary and Distributed Controls in Semilinear Hyperbolic Systems: Synopsis of Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
12. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
13. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
14. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
15. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, 25 (3), 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
16. Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, 24 (2), 319–330. DOI: 10.14498/vsgtu1766.
17. Kovalev, V.P. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, 24 (4), 762–768. DOI: 10.14498/vsgtu1814.
18. Kovalev, V.P., Prosviryakov, E.Yu., and Sizykh, G.B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities. *Trudy MFTI*, 2017, 9 (1), 71–88. (In Russian).
19. Zubarev, N.M. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, 60 (6), 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
20. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
21. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56 (3), 331–338. DOI: 10.1134/S0040579522030113.

22. Goruleva, L.S., Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with allowance made for internal heat release. *Chemical Physics and Mesoscopy*, 2022, 24 (1), 82–92. DOI: 10.15350/17270529.2022.1.7. (In Russian).
23. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
24. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34, 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.
25. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34, 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
26. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 1–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
27. Okatev, R.S., Frick, P.G., and Kolesnichenko, I.V. Hartmann flow in a fluid layer with spatially inhomogeneous properties. *Vestnik YuUrGU, Seriya Matematika, Mekhanika, Fizika*, 2023, 15 (3), 34–42. DOI: 10.14529/mmph230304. (In Russian).

Подана в журнал: 31.08.2023
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КЛАССЕ ЛИНЯ – СИДОРОВА – АРИСТОВА

Л. С. Горулева[1, 2, а)], Е. Ю. Просвиряков[1, 2, б), *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*
[2]*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия*

[а)] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[б)] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: +7 (343) 374–53–30

В статье рассматривается точное интегрирование уравнений магнитной гидродинамики для описания неоднородных однонаправленных течений вязкой несжимаемой жидкости. Построение точного решения базируется на известном представлении гидродинамических полей как семейства полей Линя – Сидорова – Аристова. Трехмерное магнитное поле описывается линейными формами относительно двух пространственных координат (продольных, или горизонтальных). Коэффициенты линейных форм зависят от третьей координаты и времени. Одномерное поле скоростей зависит, в силу условия несжимаемости, от двух координат и времени. Давление, как показано в статье, определяется квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются распределением давления на известной (свободной) границе. Для иллюстрации точного решения проведено интегрирование неодномерных гидродинамических полей в случае установившегося движения вязкой проводящей несжимаемой жидкости. Данное решение является полиномиальным и будет полезным для постановки новых задач гидродинамической устойчивости.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье – Стокса, магнитная гидродинамика, проводящая жидкость, неоднородное течение

1. Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение движений вязкой жидкости в различных силовых полях началось с однонаправленных течений. Классическими точными решениями для описания изотермических течений являются формулы Куэтта, Стокса, Пуазейля, Тейлора, Нуссельта и другие [1–5]. С одномерных по скорости точных решений Остроумова – Бириха началось исследование конвективных потоков жидкости. Это семейство точных решений определило на много лет исследовательскую программу теории гидродинамической устойчивости [6, 7]. Если говорить о магнитной гидродинамике, то пионерским точным решением являются соотношения Гартмана для описания гидродинамических полей проводящей жидкости [8]. Различные классификации точных решений уравнений гидродинамики для однонаправленных течений содержатся в научных трудах [1–5].

Развитие математического аппарата точного интегрирования уравнений Навье – Стокса привело к появлению классов точных решений для описания трехмерных вихревых течений жидкости. Первым семейством точных решений являются следующие выражения Линя для гидродинамических полей [9]:

$$V_x = U(z,t) + U_1(z,t)x + U_2(z,t)y,$$

$$V_y = V(z,t) + V_1(z,t)x + V_2(z,t)y,$$

$$V_z = w(z,t),$$

$$B_x = A(z,t) + a_1(z,t)x + a_2(z,t)y,$$

$$B_y = B(z,t) + b_1(z,t)x + b_2(z,t)y,$$

$$B_z = b(z,t),$$

$$P = P_0(z,t) + P_1(z,t)x + P_2(z,t)y + P_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(z,t)xy + P_{22}(z,t)\frac{y^2}{2}.$$

Класс точных решений Линя описывает поле скоростей $V = (V_x, V_y, V_z)$ и магнитное поле $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} = (B_x, B_y, B_z)$, нормированное к размерности скорости, линейными формами относительно двух пространственных координат. Коэффициенты форм зависят от третьей координаты и времени. Поле давления является квадратичной формой.

Представление вектора скоростей [9] было дважды открыто независимо от Ц. Ц. Линя академиком РАН А. Ф. Сидоровым и профессором С. Н. Аристовым для решения задач конвекции сжимаемых и несжимаемых жидкостей и газов [10, 11]. Отметим, что в работе [10] были учтены только горизонтальные градиенты температуры для описания конвективных процессов. В работе [11] было не только выведено выражение для температуры в виде

$$T = T_0(z,t) + T_1(z,t)x + T_2(z,t)y + T_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + T_{12}(z,t)xy + T_{22}(z,t)\frac{y^2}{2}$$

для описания течений проводящих жидкостей в рамках магнитной гидродинамики, но и построены точные решения с учетом внутреннего тепловыделения. Значительно позже было показано, что семейство Линя – Сидорова – Аристова можно использовать для описания термодиффузии и течений микрополярных жидкостей [12–15]. Для полноты изложения отметим, что для решения задач магнитной гидродинамики часто используется семейство Громеки – Бельтрами – Тркала [16–18], но в современных исследованиях большинство точных решений принадлежат семейству Линя – Сидорова – Аристова. Обобщения класса Линя – Сидорова – Аристова для нелинейных форм поля скоростей содержатся в [19–21].

Очевидно, что точные решения для трехмерных течений очень важны, но интерес все еще представляют однонаправленные течения. В недавно опубликованных статьях были построены точные решения для неоднородных одномерных по скорости течений типа Куэтта и Пуазейля [22–26]. В [26] было показано, как модифицировать точные решения [22, 23] для описания течений жидкости с проницаемыми границами. В статье [27] была подчеркнута важность изучения одномерных течений проводящих жидкостей и построено семейство точных решений. Поскольку при решении задач гидродинамики проводящих жидкостей магнитное поле практически всегда является трехмерным, то необходимо расширять запас точных решений для неоднородных однонаправленных течений вязких жидкостей в классе Линя – Сидорова – Аристова.

2. Уравнения движения

Для исследования конвективных течений проводящей бинарной вязкой несжимаемой жидкости запишем уравнения Навье – Стокса, уравнение непрерывности и дополним уравнением магнитного поля. В векторном виде уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=-\nabla P+\nu\Delta\mathbf{V}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{B}=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\nu_m\Delta\mathbf{B},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0. \qquad (1)$$

В системе уравнений (1) введены следующие обозначения: $V = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости; P – отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность ρ; ν – кинематическая вязкость проводящей смеси; $\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона; **i**, **j**, **k** – орты декартовой прямоугольной системы координат; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; H – напряженность магнитного поля, ν_m – магнитная вязкость (диссипативный коэффициент, характеризующий диффузию магнитного поля в проводящей среде).

Далее будем рассматривать однонаправленное течение жидкости с полем скоростей, которое задается вектором

$$\mathbf{V}=\left(V_x(x,y,z,t),0,0\right). \qquad (2)$$

При этом скорость $V_x = (x, y, z, t)$ называется горизонтальной (продольной).
Согласно (2), для построения точного решения систему (1), состоящую из векторных и скалярных уравнений, запишем в проекциях на оси выбранной трехмерной системы координат:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)+B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial B_x}{\partial x}=\nu_m\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right)+$$

$$+B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial B_y}{\partial x}=\nu_m\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}\right)+$$

$$+B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_y}{\partial z},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial B_z}{\partial z}=\nu_m\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right)+$$

$$+B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \qquad (3)$$

3. Класс точных решений

Точное решение нелинейной системы уравнений магнитной гидродинамики (3) для продольной скорости и для магнитного поля, нормированного к размерности скорости, о котором идет речь во введении, будем искать в следующем виде [9–11]:

$$V_x=U(z,t)+U_1(z,t)y,$$

$$B_x=A(z,t)+a_1(z,t)x+a_2(z,t)y,$$

$$B_y=B(z,t)+b_1(z,t)x+b_2(z,t)y,$$

$$B_z=b(z,t). \qquad (4)$$

Нетрудно заметить, что выражения (4) являются линейными формами относительно горизонтальных координат x и y, коэффициенты при которых зависят от вертикальной координаты z и времени t. Систему (4) дополним выражением для поля давления, которое описывается квадратичной формой [9–11]:

$$P=P_0(z,t)+P_1(z,t)x+P_2(z,t)y+P_{11}(z,t)\frac{x^2}{2}+P_{12}(z,t)xy+P_{22}(z,t)\frac{y^2}{2}.$$

После подстановки анонсированного выше точного решения в систему (3) получим следующую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial t}y=-(P_1+P_{11}x+P_{12}y)+\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}y\right)+$$

$$+\left(A+a_1x+a_2y\right)a_1+\left(B+b_1x+b_2y\right)a_2+b\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial a_1}{\partial z}x+\frac{\partial a_2}{\partial z}y\right),$$

$$P_2+P_{12}x+P_{22}y=\left(A+a_1x+a_2y\right)b_1+\left(B+b_1x+b_2y\right)b_2+$$

$$+b\left(\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial b_1}{\partial z}x+\frac{\partial b_2}{\partial z}y\right),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z}+\frac{\partial P_1}{\partial z}x+\frac{\partial P_2}{\partial z}y+\frac{\partial P_{11}}{\partial z}\frac{x^2}{2}+\frac{\partial P_{12}}{\partial z}xy+\frac{\partial P_{22}}{\partial z}\frac{y^2}{2}=b\frac{\partial b}{\partial z},$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial a_1}{\partial t}x+\frac{\partial a_2}{\partial t}y+\left(U+U_1y\right)a_1=\left(A+a_1x+a_2y\right)a_1+\left(B+b_1x+b_2y\right)a_2+$$

$$+b\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial a_1}{\partial z}x+\frac{\partial a_2}{\partial z}y\right)+\nu_m\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}x+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2}y\right),$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial b_1}{\partial t}x+\frac{\partial b_2}{\partial t}y+\left(U+U_1y\right)b_1=\left(A+a_1x+a_2y\right)b_1+\left(B+b_1x+b_2y\right)b_2+$$

$$+\nu_m\left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2}x+\frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2}y\right),$$

$$\frac{\partial b}{\partial t}=b\frac{\partial b}{\partial z}+\nu_m\frac{\partial^2 b}{\partial z^2},$$

$$a_1+b_2+\frac{\partial b}{\partial z}=0. \qquad (5)$$

4. Определяющие соотношения

Далее точное решение системы уравнений (5) будет найдено при помощи модификаций метода разделенных переменных [2]. Таким образом, получим следующую систему уравнений (6) для нахождения неизвестных функций U, U_1, A, a_1, a_2, B, b_1, b_2, b, P_0, P_1, P_2, P_{11}, P_{12}, P_{22}:

$$P_{11}=a_1^2+b_1a_2+b\frac{\partial a_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}=-P_{12}+\nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}+a_1a_2+b_2a_2+b\frac{\partial a_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-P_1+\nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+Aa_1+Ba_2+b\frac{\partial A}{\partial z},$$

$$P_{12}=a_1b_1+b_1b_2+b\frac{\partial b_1}{\partial z},$$

$$P_{22}=a_2b_1+b_2^2+b\frac{\partial b_2}{\partial z},$$

$$P_2 = Ab_1 + Bb_2 + b\frac{\partial B}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = b\frac{\partial b}{\partial z},$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = a_1^2 + b_1 a_2 + b\frac{\partial a_1}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + a_1 U_1 = a_1 a_2 + a_2 b_2 + b\frac{\partial a_2}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + a_1 U = Aa_1 + Ba_2 + b\frac{\partial A}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 A}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = a_1 b_1 + b_1 b_2 + \nu_m \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial t} + b_1 U_1 = b_1 a_2 + b_2^2 + \nu_m \frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + b_1 U = Ab_1 + Bb_2 + \nu_m \frac{\partial^2 B}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial z} b + \nu_m \frac{\partial^2 b}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = -(a_1 + b_2). \tag{6}$$

Предположим, что $b = const$. Тогда, согласно последнему уравнению системы (6), получаем следующее равенство: $a_1 + b_2 = 0$, то есть $b_2 = -a_1$. Рассмотрим в точной постановке частный случай представленного выше класса:

$$V_x = U(z,t) + U_1(z,\mathrm{t})\,y,$$

$$B_x = A(z,t) + a_2(z,t)\,y,$$
$$B_y = B(z,t),$$
$$B_z = b = const. \qquad (7)$$

В этой системе уравнений поле скоростей и магнитное поле являются линейными формами относительно одной горизонтальной координаты *y*, коэффициенты при которой зависят от вертикальной координаты *z* и времени *t*. Учитывая $b_2 = -a_1$ и систему уравнений (7), получим редуцированную систему, которую для удобства интегрирования представим в виде трех подсистем:

$$\nu_m \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0,$$
$$P_2 = b\frac{\partial B}{\partial z} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial P_{22}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial P_{12}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = 0,$$
$$P_{12} = 0,$$
$$P_{22} = 0,$$
$$P_{11} = 0 \qquad (9)$$

$$b\frac{\partial a_2}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = 0$$
$$b\frac{\partial A}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + Ba_2 = 0$$
$$\nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + b\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0,$$

$$-P_1+\nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+Ba_2+b\frac{\partial A}{\partial z}=0. \qquad (10)$$

Рассматривая первое уравнение подсистемы (8), получаем

$$B=c_1 z+c_2.$$

Тогда $\frac{\partial B}{\partial z}=c_1$ и, соответственно, $P_2=c_1 b$.

Рассматривая вторую подсистему (9), получаем следующие решения: P_0 = *const*, P_2 = *const*, $P_{11}=0$, $P_{12}=0$, $P_{22}=0$.

Решая первое уравнение подсистемы (10), которое представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, получаем

$$a_2=c_4-\frac{c_3}{k}e^{-kz},$$

где $k=\frac{b}{\nu_m}$. Тогда $\frac{\partial a_2}{\partial z}=c_3 e^{-kz}$.

Рассмотрим второе уравнение подсистемы (10). Зная B и a_2, можем найти A. Для нахождения A получаем следующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+k\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{\nu_m}(c_1 z+c_2)\left(c_4-\frac{c_3}{k}e^{-kz}\right)=0.$$

Получаем следующее решение:

$$A=-\frac{c_1c_4}{2b}z^2-\frac{c_2c_4}{b}z+c_6-\frac{c_1c_3\nu_m}{2b^2}z^2e^{-kz}-\frac{c_2c_3\nu_m}{b^2}ze^{-kz}+\frac{c_1c_4\nu_m}{b^2}-\frac{c_5\nu_m}{b}e^{-kz}-$$
$$-\frac{c_1c_3\nu_m^2}{b^3}ze^{-kz}-\frac{c_2c_3\nu_m^2}{b^3}e^{-kz}-\frac{c_1c_3\nu_m^3}{b^4}e^{-kz},$$

или

$$A=-\frac{c_1c_4}{2k\nu_m}z^2-\frac{c_2c_4}{k\nu_m}z+c_6-\frac{c_1c_3}{2k^2\nu_m}z^2e^{-kz}-\frac{c_2c_3}{k^2\nu_m}ze^{-kz}+\frac{c_1c_4}{k^2\nu_m}-\frac{c_5}{k}e^{-kz}-$$
$$-\frac{c_1c_3}{k^3\nu_m}ze^{-kz}-\frac{c_2c_3}{k^3\nu_m}e^{-kz}-\frac{c_1c_3}{k^4\nu_m}e^{-kz}.$$

Третье уравнение подсистемы (10) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}=-\frac{b}{\nu}\frac{\partial a_2}{\partial z}.$$

Тогда решение представлено в виде

$$U_1 = c_7 z + c_8 - \frac{\nu_m^2}{b\nu} c_3 e^{-kz}$$

$$U_1 = c_7 z + c_8 - \frac{\nu_m}{k\nu} c_3 e^{-kz}.$$

Подставив в четвертое уравнение подсистемы (10) выражения для B, a_2, A и P_1, найденные ранее, получим следующее дифференциальное уравнение для нахождения последнего выражения для U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu}\left(P_1 - Ba_2\right) - p\frac{\partial A}{\partial z}$$

$$U = c_9 z + c_{10} + \frac{P_1}{2\nu} z^2 - \frac{c_1 c_4 \nu_m}{2b\nu} z^2 - \frac{c_1 c_3 \nu_m^2}{2b^2\nu} z^2 e^{-kz} - \frac{c_2 c_3 \nu_m^2}{b^2\nu} z e^{-kz} - \frac{c_5 \nu_m^2}{b\nu} e^{-kz} -$$

$$-\frac{c_1 c_3 \nu_m^3}{b^3\nu} z e^{-kz} - \frac{c_2 c_3 \nu_m^3}{b^3\nu} e^{-kz} - \frac{c_1 c_3 \nu_m^4}{b^4\nu} e^{-kz},$$

или

$$U = c_9 z + c_{10} + \frac{P_1}{2\nu} z^2 - \frac{c_1 c_4}{2k\nu} z^2 - \frac{c_1 c_3}{2k^2\nu} z^2 e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^2\nu} z e^{-kz} - \frac{c_5 \nu_m}{k\nu} e^{-kz} -$$

$$-\frac{c_1 c_3}{k^3\nu} z e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^3\nu} e^{-kz} - \frac{c_1 c_3}{k^4\nu} e^{-kz}.$$

Найденные выражения для U, U_1, A, a_2, B, P_0, P_1, P_2, P_{11}, P_{12} и P_{22} подставим в систему уравнений семейства точных решений (7) и получим следующее решение:

$$V_x = c_9 z + c_{10} + \frac{P_1}{2\nu} z^2 - \frac{c_1 c_4}{2k\nu} z^2 - \frac{c_1 c_3}{2k^2\nu} z^2 e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^2\nu} z e^{-kz} - \frac{c_5 \nu_m}{k\nu} e^{-kz} -$$

$$-\frac{c_1 c_3}{k^3\nu} z e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^3\nu} e^{-kz} - \frac{c_1 c_3}{k^4\nu} e^{-kz} + \left(c_7 z + c_8 - \frac{\nu_m}{k\nu} c_3 e^{-kz}\right) y,$$

$$B_x = -\frac{c_1 c_4}{2k\nu_m} z^2 - \frac{c_2 c_4}{k\nu_m} z + c_6 - \frac{c_1 c_3}{2k^2\nu_m} z^2 e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^2\nu_m} z e^{-kz} + \frac{c_1 c_4}{k^2\nu_m} - \frac{c_5}{k} e^{-kz} -$$

$$-\frac{c_1 c_3}{k^3\nu_m} z e^{-kz} - \frac{c_2 c_3}{k^3\nu_m} e^{-kz} - \frac{c_1 c_3}{k^4\nu_m} e^{-kz} + \left(c_4 - \frac{c_3}{k} e^{-kz}\right) y,$$

$$B_y = c_1 z + c_2,$$

$$B_z = b = const.$$

Очевидно, что наибольший интерес для исследования при постановке краевых задач представляют фоновые компоненты поля скорости и магнитного поля, нормированного к размерности скорости.

5. Заключение

В статье предложен новый класс точных решений уравнений Навье – Стокса для описания неоднородных однонаправленных течений проводящих жидкостей. В статье рассмотрено точное интегрирование частного случая для медленных изобарических течений в магнитном поле с одной компонентой, являющейся постоянной величиной. Получено полиномиальное точное решение, которое описывает стратификацию гидродинамических полей.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № АААА-А18-118020790140-5.

Литература

1. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 196 p. – DOI: 10.1017/cbo9780511526459.
2. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53, No. 4. – P. 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
3. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. – 2006. – Т. 4, № 1. – С. 6–76.
4. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Review. – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
5. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
6. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. – 1958. – NASA Technical Memorandum 1407.
7. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1966. – Vol. 7 (3). – P. 43–44. – DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Hartmann J., Lazarus F. Theory of the laminar ow of an electrically conducting liquid in an homogeneous magnetic field // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Mathematisk-fysiske Meddelelser. – 1937. – 15 (6). – P. 1–28.
9. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
10. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1989. – Vol. 30 (2). – 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
11. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук. – Владивосток, 1990. – 303 с.
12. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (3). – 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
13. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // Symmetry. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
14. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol. 18, No. 3. – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
15. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Univer-

siteta. Seriya «Fiziko-Matematicheskie Nauki». – 2021. – Vol. 25, No. 3. – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.
16. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya «Fiziko-Matematicheskie Nauki» – 2020. – Vol. 24, No. 2. – P. 319–330. – DOI: 10.14498/vsgtu1766.
17. Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya «Fiziko-Matematicheskie Nauki». – 2020. – Vol. 24, No. 4. – P. 762–768. – DOI: 10.14498/vsgtu1814.
18. Ковалёв В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // Труды МФТИ. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 71–88.
19. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Vol. 60 (6). – P. 1031–1037. – DOI: 10.1134/S0021894419060075.
20. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
21. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2022. – Vol. 56 (3). – P. 331–338. – DOI: 10.1134/S0040579522030113.
22. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with allowance made for internal heat release // Chemical Physics and Mesoscopy. – 2022. – Vol. 24, No. 1. – P. 82–92. – DOI: 10.15350/17270529.2022.1.7. (In Russian).
23. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
24. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34. – 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.
25. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34. – 123104. – DOI: 10.1063/5.0127990.
26. Goruleva L. S. and Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
27. Окатьев Р. С., Фрик П. Г., Колесниченко И. В. Течение Гартмана в слое жидкости с пространственно неоднородными свойствами // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 34–42. – DOI: 10.14529/mmph230304.