
Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

Editor-in-Chief: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**, **Sergey V. Gladkovsky**

Editorial Council

Chairman: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Konvalov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Elena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н.
Заместители главного редактора: **Сергей Витальевич Смирнов**, д.т.н.; **Сергей Викторович Гладковский**, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – **Горкунов Эдуард Степанович**, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Смирнов Сергей Витальевич**, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Гладковский Сергей Викторович**, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазиский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УРО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

Burmasheva N. V. and Prosviryakov E. Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary.....	6
Andreyachshenko V. A. Experience of applying shot-term intermediate anneals in equal-channel angular pressing of aluminum alloys	43
Volkov S. S. and Struzhanov V. V. Optimal wall thickness of metal pipe encased in a fiber polymer shell	55
Solovei V. D. Variational principle for the velocities of particles of a viscoplastic strip under rolling	64
Tsareva I. N., Berdnik O. B., and Kirikov S. V. A study of fatigue processes in the material of the compressor blades of a gas turbine engine after long-term operation	70

СОДЕРЖАНИЕ

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Исследование температурного поля в слоистых течениях вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости при задании двух термокапиллярных сил на свободной границе	6
Андреященко В. А. Опыт применения краткосрочных промежуточных отжигов при РКУПП алюминиевых сплавов	43
Волков С. С., Стружанов В. В. Оптимальная толщина стенки металлической трубы с волокнистой оболочкой	55
Соловей В. Д. Вариационный принцип для скоростей частиц вязкопластической полосы при прокатке	64
Царева И. Н., Бердник О. Б., Кириков С. В. Исследование процессов усталости в материале компрессорных лопаток газотурбинного двигателя после длительной эксплуатации	70

Received: 29.11.2018

Revised: 25.01.2019



Accepted: 15.02.2019



DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042

TEMPERATURE FIELD INVESTIGATION IN LAYERED FLOWS OF A VERTICALLY SWIRLING VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID UNDER TWO THERMOCAPILLAR FORCES AT A FREE BOUNDARY

N. V. Burmasheva^{a)*} and E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: nat_burm@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

The exact solution of the Oberbeck–Boussinesq equations, which describes the influence of the thermocapillary effect on the convective flows of a viscous incompressible fluid, is discussed. The class of exact solutions is chosen in such a way that it allows one to solve an overdetermined system of equations for the motion of a fluid by identically satisfying the incompressibility condition. Heat sources at both boundaries, which heat (cool) the fluid, are selected as the boundary conditions. The exact solution has been obtained and the temperature field has been studied. It is shown that the structure of the exact solution does not allow one to reduce the dimension of the boundary value problem under study. It is also shown that the obtained exact solution admits the presence of countercurrents in the fluid.

Keywords: layered flow, exact solution, counterflows, Marangoni convection, vertical swirl, vortex flow, system of Oberbeck–Boussinesq equations.

References

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 p.
2. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52.
3. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dingler's Politech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324.
4. Ekman V.W. Über Horizontazirkulation bei winder-reugten Meeresströmungen. *Arkiv Mat., Astr., Phys.*, 1923, vol. 17, no. 26, pp. 1–74.
5. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1987, 710 p.
6. Haeusser T.M., Leibovich S. Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 479, pp. 125–144. DOI: 10.1017/S0022112002003415.
7. Schwarz K.G. Stability of thermocapillary advective flow in a slowly rotating liquid layer under microgravity conditions. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, iss. 1, pp. 37–49. DOI: 10.1134/S001546281201005X.
8. Aristov S.N., Frik P.G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194.

9. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Ekman Convective Layer Flow of a Viscous Incompressible Fluid. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 189–195. DOI: 10.1134/S0001433818020081.
10. Kryukov N.D., Shmatkov V.A. A review of studies of wind-generated surface currents. *Eurasian Union of Scientists*, 2015, № 6–2 (15), pp. 109–113. (In Russian).
11. Shvarts K.G. On an exact solution of the Navier-Stokes equations describing non-isothermal large-scale flow in a rotating fluid layer with a free upper boundary. *Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, no. 2 (33), pp. 118–124. (In Russian).
12. Shvarts K.G. Exact solution of the Navier–Stokes equation describing nonisothermal largescale flows in a rotating layer of liquid with free upper surface. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 813–817. DOI: 10.1007/s10958-018-3796-y.
13. Brown R. A. *Analytical Methods in Planetary Boundary-Layer Modelling*. Hilger, 1974.
14. Welander P. The thermocline problem. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 1971, vol. 270, pp. 415–421. DOI: 10.1098/rsta.1971.0081.
15. Chefranov S.G. Cyclone–anticyclone vortex asymmetry mechanism and linear Ekman friction. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2016, vol. 122, no. 4, pp. 759–768. DOI: 10.1134/S1063776116040038.
16. Riabouchinsky D. Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d’un liquid. *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, 1924, vol. 179, pp. 1133–1136.
17. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2007. DOI: 10.1201/9781420011623.
18. Pukhnachev V.V. Group Properties of the Navier-Stokes Equations in a Plane Case. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, no. 1, pp. 83–90. (In Russian).
19. *Atlas osesimmetrichnykh kavitatsionnykh techeniy tipa Ryabushinskogo* [Atlas of Axisymmetric Cavitation Ryabushinsky-Type Flows]. Novosibirsk, Institut Gidrodinamiki SO AN SSSR, 1968. (In Russian).
20. Guzevsky L.G. Osesimmetrichnye zadachi obtekaniya so svobodnymi granitsami. In: *Issledovaniya po razvitoi kavitatsii* [Advanced Cavitation Research]. Novosibirsk, Izdatelstvo SO AN SSSR, 1976. (In Russian).
21. Aristov S.N., Knyazev D.V. Viscous fluid flow between moving parallel plates. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, iss. 4, pp 476–482. DOI: 10.1134/S0015462812040060.
22. Petrov A.G. Exact solution of the Navier-Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 642–646. DOI: 10.1134/S0021894412050021.
23. Vlasova S.S., Prosviryakov E.Yu. Two-dimensional convection of an incompressible viscous fluid with the heat exchange on the free border. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 3, pp. 567–577. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1483>. (In Russian).
24. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Benard–Maragoni viscous incompressible fluid. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, vol. 3, no. 32, pp. 110–118. DOI: [10.14498/vsgtu1205](https://doi.org/10.14498/vsgtu1205). (In Russian).
25. Aristov S.N., Privalova V., Prosviryakov E.Y. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167–178. DOI: 10.20537/nd1602001.
26. Fomin A.A, Fomina L.N. On the solution of fluid flow and heat transfer problem in a 2D channel with backward-facing step. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 2, pp. 362–375. DOI: 10.14498/vsgtu1545.
27. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge, Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.

28. Stuart J.T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959, vol. 26, no. 2, pp. 124–125. DOI: 10.2514/8.7963.
29. Dorrepaal J.M. An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes nonorthogonal stagnation-point flow in two dimensions. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 163, no. 1, pp. 141–147. DOI: 10.1017/s0022112086002240.
30. Riesco-Chueca P., de la Mora J.F. Brownian motion far from equilibrium: a hypersonic approach. *J. of Fluid Mech.*, 1990, vol. 214, pp. 639–663. DOI: 10.1017/S0022112090000301.
31. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, iss. 5, pp. 581–587. DOI: 10.1134/S001546281605001X.
32. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Layered Benard–Marangoni convection during heat transfer according to the Newton’s law of cooling. *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940. (In Russian).
33. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
34. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
35. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for layered large-scale convection induced by tangential stresses specified on the free boundary of a fluid layer. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 208, conf. 1. DOI: 10.1088/1757-899X/208/1/012010.
36. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 4, pp. 16–31. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.016-031. Available at: http://dream-journal.org/DREAM_Issue_4_2017_Burmasheva_N.V._et_al._016_031.pdf
37. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, iss. 1. DOI: 10.1063/1.5017353.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568. (In Russian).
39. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
41. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, p. 43.
42. Napolitano L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids. *Acta Astronautica*, 1980, vol. 7, no. 4, pp. 461–478.
43. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogues of the Birikh solution. *Izvestiya AltGU*, 2011, nos. 1–2, pp. 62–69. (In Russian).
44. Goncharova O.N., Rezanova E.V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 247–257. DOI: 10.1134/s0021894414020072.

45. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004.
46. Schwarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, iss. 4, pp. 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
47. Bratsun D.A., Vyatkin V.A., Mukhamatullin A.R. On exact nonstationary solutions of equations of vibrational convection. *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 433–444. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35.
48. Schwarz K.G. Plane parallel advective flow in a horizontal layer of incompressible fluid with an internal linear heat source. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 25–30. (In Russian).
49. Aristov S.N., Shvarts K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, iss. 3, pp. 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
50. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. In: *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mechanics and Mathematics of RAS, Ural Branch, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 32–41]. (In Russian).
51. Rafiq Sh., Nawaz M., Mustahsan M. Casson Fluid Flow due to Non-Coaxial Rotation of a Porous Disk and the Fluid at Infinity Through a Porous Medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, iss. 4, pp. 601–607. DOI: 10.1134/S0021894418040053.
52. Andreev V.K. *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotorye ego obobshcheniya: preprint* [Birikh Solutions of Convection Equations and Some of its Generalizations: Preprint]. Krasnoyarsk, 2010, № 1–10. (In Russian).
53. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
54. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in the convection problems. In: *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, M.D. Todorov and C.I. Christov, eds., American Institute of Physics, CP 1404, Melville, NY, 2011, pp. 31–42.
55. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, iss. 2, pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
56. Aristov S.N., Shvarts K.G. Advective flow in a rotating liquid film. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
57. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
58. Aristov S.N., Frik P.G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194. DOI: 10.1007/BF00858033.
59. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye Techeniya Advektivnoy Prirody vo Vrashchayushchemsya Sloe Zhidkosti* [Vortex Flows of Advective Nature in the Rotary Layer of Fluid]. Perm, Perm Univ. Publ., 2006. (In Russian).
60. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye Techeniya v Tonkikh Sloyakh Zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, VyatGU, 2011, 207 pp. (In Russian).
61. Ingel L.Kh., Aristov S.N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere. *Tr. In-ta Eksperim. Meteorol.*, 1996, no. 27 (162), pp. 142–157. (In Russian).
62. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004.
63. Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Boston, De Gruyter Publ., 2012, 417 p.

64. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Evaporative convection problems (review). *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 219–260. (In Russian).
65. Galkin V.A., Dubovik A.O. About Layered Flow Modeling of Magnetic Viscous Incompressible Fluid in the Rotating Coaxial Pipe. *Vestnik Kibernetiki*, 2017, no. 4 (28), pp. 56–61. (In Russian).
66. Kraiko A.N., Vatazhin A.B., Lyubimov G.A. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izbrannoe* [Fluid Mechanics. Selected, ed. by A.N. Kraiko]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 752 p. (In Russian).
67. Vatazhin A.B., Klimenko A.Yu., Lebedev A.B., Sorokin A.A. Homogeneous condensation in turbulent submerged isobaric jets. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, iss. 2, pp. 194–203. DOI: 10.1007/BF01051887.
68. Vasil'kov A.P. Calculation of a turbulent two-phase isobaric stream. *Fluid Dynamics*, 1976, vol. 11, iss. 5, pp. 699–704. DOI: 10.1007/BF01012960.
69. Shmiglevskiy Yu.D. On isobaric plane flows of a viscous incompressible fluid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, iss. 6, pp. 191–193. DOI: 10.1016/0041-5553(85)90030-8.
70. Shmyglevskiy Yu. D. *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti*. [Analytical Studies of Gas and Liquid Dynamics]. Moscow, 1999, 232 p. (In Russian).
71. Koterov V.N., Shmiglevskiy Yu.D., Scheprov A.V. A survey of analytical studies of steady viscous incompressible flows (2000–2004). *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 5, pp. 867–888.
72. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004.
73. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Stokes waves in vortical fluid. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318. DOI: 10.20537/nd1403005.
74. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics (IzVUZ)*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
75. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
76. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
77. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. Instability of a system of horizontal layers of immiscible fluids heated from above. *Fluid Dynamics*, 1980, vol. 15, iss. 6, pp. 816–822. DOI: 10.1007/BF01096629.
78. Fikhtengolts G.M., *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A Course in Differential and Integral Calculus]. Moscow, Fizmatlit, 2001. (In Russian).
79. Kostrikin, A. I. *Vvedenie v algebru. Chast I. Osnovy algebry: Uchebnik dlya vuzov* [Introduction to algebra. Part 1. Bases of algebra: Textbook for institutions of higher learning]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 272. (In Russian).

Подана в журнал: 29.11.2018



УДК 539



DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАДАНИИ ДВУХ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Н. В. Бурмашева^{a)*}, Е. Ю. Просвиряков^{b)}

*Институт машиноведения УрО РАН,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: nat_burm@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: +7 (343) 374–53–30

В статье рассмотрено точное решение уравнений Обербека-Буссинеска, описывающее влияние термокапиллярного эффекта на конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости. Класс точных решений выбран таким образом, что позволяет разрешить переопределенную систему уравнений движения жидкости за счет тождественного удовлетворения условию несжимаемости. В качестве граничных условий выбраны источники тепла на обеих границах, осуществляющие нагрев (охлаждение) жидкости. В статье получено точное решение и произведено исследование температурного поля. Показано, что структура точного решения не позволяет снизить размерность исследуемой краевой задачи, а также показано, что полученное точное решение допускает наличие противотечений в жидкости.

Ключевые слова: слоистое течение, точное решение, противотечения, конвекция Марангони, вертикальная закрутка, вихревое течение, система уравнений Обербека-Буссинеска.

1. Введение

Известно, что основой конвекции является движение молекул среды в противоположных направлениях под действием неравномерного нагревания/охлаждения этой среды. Само понятие конвекции было предложено для описания тепловых масс в нагретых движущихся жидкостях. На сегодняшний момент задача исследования особенностей конвективных движений является достаточно распространенной и встречается во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Наиболее распространенным подходом для описания таких движений при нормальной гравитации является подход Обербека, подразумевающий линейную зависимость плотности жидкости от температуры. В результате объемные силы оказываются зависящими только от температуры [1]. Входящие в состав системы Обербека-Буссинеска уравнения Навье-Стокса обладают квадратичной нелинейностью, в результате чего порой даже в изотермическом случае их решения могут описывать появление застойных зон внутри жидкости.

Исторически первыми изотермическими точными решениями были решения Экмана [2] и Хименца [3], описывающие существование застойных точек и противотечений в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Известно, что точное решение Экмана является основным инструментом для описания локализованных течений в океане и атмосфере. Модификации спиралевидного течения Экмана в горизонтальном бесконечном слое изотермической и не-изотермической жидкости приведены в статьях, обзорах и монографиях [4–15].

Течение Хименца, описываемое нелинейной начально-краевой задачей для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости, является очень популярным объектом исследования в математической и теоретической гидродинамике. Стоит отметить, что в классической статье Хименца [3] рассматривались установившиеся течения. Нестационарные аналоги точного решения Хименца были исследованы Рябушинским в [16]. Многочисленные исследования по аналитическому и численному интегрированию течений типа Хименца-Рябушинского отражены в библиографических источниках [17–20]. Во всех публикациях [21–22], посвященных исследованию изотермических течений типа Хименца-Рябушинского, при определенных значениях управляющих параметров краевых и начально-краевых задач наблюдались противотоки в течении жидкости.

Исследования конвективных течений с помощью поля скоростей Хименца-Рябушинского показали, что влияние температурной стратификации может существенно изменить структуру поля скоростей [23–25]. В сравнении с изотермическим случаем в жидкости могут появиться дополнительные застойные точки и, как следствие, новые зоны с обратным (возвратным) течением [26–30]. В работах [31–38] представлены примеры краевых и начально-краевых задач конвекции и термодиффузии с различными краевыми условиями, индуцирующими течение жидкости.

При моделировании крупномасштабных движений несжимаемых сред (течений в тонком слое) можно пренебрегать изменением поперечной скорости, полагая ее равной нулю [39]. В этом случае система уравнений Навье-Стокса становится переопределенной. Первым нетривиальным точным решением переопределенной системы уравнений Навье-Стокса является упоминавшееся уже течение Экмана [2]. Для невращающихся жидкостей при учете конвекции точными решениями для переопределенной системы уравнений Обербека-Буссинеска точными решениями является класс Остроумова-Бириха и его модификации и обобщения [40–52]. В статьях [53–64] рассмотрены приложения точного решения Остроумова-Бириха к вращающейся жидкости. Все течения, о которых шла речь выше, зависят от распределения давления.

Изобарические плоские течения вязкой несжимаемой жидкости (поле скоростей состоит из двух скоростей, которые зависят от двух координат и времени) начали изучать в [66]. В статьях [67–68] было построено много точных решений для изобарических течений. Систематическое исследование плоских течений жидкости было выполнено Шмыглевским [69–71].

Сравнительно недавно было показано существование точных решений для крупномасштабных сдвиговых течений вязкой несжимаемой жидкости [72–75]. Любопытно, что полученные решения описывают течения жидкости с вертикальной компонентой завихренности без учета вращения жидкости. В статье [76] показано, как изотермические точные решения могут быть использованы для исследования конвективных вихрей в вертикально завихренной жидкости. Решения, анонсированные в [31, 72–76], описывают конвективных течения типа Куэтта, индуцированные заданием скоростей и горизонтальных градиентов температуры на верхней границе бесконечного слоя жидкости. Основные обобщения течения Остроумова-Бириха были получены при учете термокапиллярных сил на межфазной недеформируемой границе. К настоящему времени не изучена конвекция Марангони для решений, представленных в [31], где предложено новое точное решение, описывающее движение вязкой несжимаемой вертикально завихренной жидкости под действием заданных на верхней границе термокапиллярных сил.

2. Постановка задачи и методы решения

Рассматривается течение жидкости в бесконечном горизонтальном слое толщиной h . При исследовании крупномасштабных движений в сдвиговых потоках вязкой несжимаемой жидкости (z -компонента V_z вектора скорости $\mathbf{V}(x, y, z)$ полагается равной нулю) используется система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}
 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \nu \Delta V_x - \frac{\partial P}{\partial x}; \\
 V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \nu \Delta V_y - \frac{\partial P}{\partial y}; \\
 \frac{\partial P}{\partial z} &= g \beta \Delta T; \\
 V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \Delta T; \\
 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введены обозначения: $V_x(x, y, z)$; $V_y(x, y, z)$ – соответственно x - и y - компоненты вектора скорости $\mathbf{V}(x, y, z)$; $P(x, y, z)$ – деленное на среднюю плотность отклонение давления от гидростатического; $T(x, y, z)$ – отклонение температуры от отсчетного значения; ν, χ – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости и ее температуропроводность; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Первые три уравнения системы (1) – это уравнения Навье-Стокса в проекциях на координатные оси, четвертое уравнение – это уравнение теплопроводности, последнее уравнение – это уравнение несжимаемости, в которых учтено условие $V_z = 0$.

Особенностью системы (1) помимо ее нелинейности является ее переопределенность (число неизвестных меньше числа уравнений). Можно показать, что система (1) оказывается разрешимой в классе скоростей вида [57, 62]:

$$V_x = U(z) + yu(z), \quad V_y = V(z), \tag{2}$$

поскольку при подстановке класса (2) в уравнение несжимаемости системы (1) последнее обращается в тождество.

Поля давления и температуры полагаем линейными формами относительно горизонтальных (продольных) x, y [59, 60]:

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y, \quad P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y. \tag{3}$$

Подстановка класса (2)–(3) в систему (1) при использовании метода неопределенных коэффициентов приводит последнюю к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 u''(z) &= 0, \quad T_1''(z) = 0, \quad P_1'(z) = g \beta T_1(z), \quad \chi T_2''(z) = u(z)T_1(z); \\
 P_2'(z) &= g \beta T_2(z), \quad \nu V''(z) = P_2(z), \quad \nu U''(z) = V(z)u(z) + P_1(z);
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\chi T_0''(z) = U(z)T_1(z) + V(z)T_2(z), \quad P_0'(z) = g \beta T_0(z).$$

Здесь и далее штрихом обозначена полная производная по вертикальной координате z . Уравнения системы (4) интегрируются в том порядке, в котором они приведены. Среди уравнений системы (4) только первые два уравнения являются изолированными (т. е. интегрируются независимо от других), остальные уравнения являются пассивными (т. е. их решения следует искать только после того, как найдены решения изолированных уравнений). Общее решение системы (4), полученное последовательным интегрированием входящих в состав системы уравнений, имеет вид:

$$u = C_1 z + C_5;$$

$$T_1 = C_2 z + C_3;$$

$$P_1 = g\beta \left(\frac{1}{2} z^2 C_2 + z C_3 \right) + C_4;$$

$$T_2 = \frac{\frac{1}{2} z^4 C_1 C_2 + 3z^2 C_3 C_5 + z^3 (C_1 C_3 + C_2 C_5) + 6z\chi C_6}{6\chi} + C_7;$$

$$P_2 = \frac{g\beta \left(\frac{1}{5} z^5 C_1 C_2 + 2z^3 C_3 C_5 + \frac{1}{2} z^4 (C_1 C_3 + C_2 C_5) + 6z^2 \chi C_6 + 12z\chi C_7 \right)}{12\chi} + C_8$$

$$V = \frac{\frac{1}{7} gz^7 \beta C_1 C_2 + 3gz^5 \beta C_3 C_5 + \frac{1}{2} gz^6 \beta (C_1 C_3 + C_2 C_5)}{360\nu\chi} +$$

$$+ \frac{gz^4 \beta \chi C_6 + 4gz^3 \beta \chi C_7 + 12z^2 \chi C_8 + 24z\nu\chi C_9}{24\nu\chi} + C_{10};$$

$$U = \frac{1}{362880\nu^2 \chi} \left[15120gz^4 \beta \nu \chi C_2 + \frac{8}{5} gz^{10} \beta C_1^2 C_2 + 60480gz^3 \beta \nu \chi C_3 + \right. \\ \left. + 9gz^8 \beta C_5 (7C_1 C_3 + C_2 C_5) + gz^9 \beta C_1 (7C_1 C_3 + 9C_2 C_5) + 72gz^7 \beta (C_3 C_5^2 + 5\chi C_1 C_6) + 3024gz^5 \beta \chi C_5 C_7 + \right. \\ \left. + 504gz^6 \beta \chi (C_5 C_6 + 4C_1 C_7) + 9072z^5 \chi C_1 C_8 + 15120z^4 \chi (C_5 C_8 + 2\nu C_1 C_9) + \right. \\ \left. + 60480z^3 \nu \chi (C_5 C_9 + C_1 C_{10}) + 181440z^2 \nu \chi (C_4 + C_5 C_{10}) + 362880z\nu^2 \chi C_{11} \right] + C_{12};$$

$$T_0 = \frac{1}{119750400\nu^2 \chi^3} \left[\frac{22}{13} gz^{13} \beta (15\nu + 2\chi) C_1^2 C_2^2 + \frac{1}{2} gz^{12} \beta C_1 C_2 ((330\nu + 43\chi) C_1 C_3 + \right. \\ \left. + (330\nu + 45\chi) C_2 C_5) + 3gz^{11} \beta (7(12\nu + \chi) C_1^2 C_3^2 + (492\nu + 72\chi) C_1 C_2 C_3 C_5 + (84\nu + 9\chi) C_2^2 C_5^2) + \right. \\ \left. + 33gz^{10} \beta ((84\nu + 7\chi) C_1 C_3^2 C_5 + (84\nu + 9\chi) C_2 C_3 C_5^2 + (156\nu + 40\chi) \chi C_1 C_2 C_6) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+330gz^9\beta((21\nu+\chi)C_3^2C_5^2+(42\nu+5\chi)\chi C_1C_3C_6+(42\nu+7\chi)\chi C_2C_5C_6+(72\nu+28\chi)\chi C_1C_2C_7)+ \\
 &+2970gz^8\beta\chi((21\nu+\chi)C_3C_5C_6+(21\nu+4\chi)C_1C_3C_7+(21\nu+6\chi)C_2C_5C_7)+ \\
 &+23760gz^7\beta\chi(5\nu\chi C_2^2+5\nu\chi C_6^2+(11\nu+\chi)C_3C_5C_7)+ \\
 &+831600gz^6\beta\nu\chi^2(C_2C_3+C_6C_7)+997920gz^5\beta\nu\chi^2(C_3^2+C_7^2)+17820z^8\chi(5\nu+3\chi)C_1C_2C_8+ \\
 &+23760z^7\chi((10\nu+3\chi)C_1C_3C_8+(10\nu+5\chi)C_2C_5C_8+10\nu(\nu+\chi)C_1C_2C_9)+ \\
 &+166320z^6\chi((6\nu+\chi)C_3C_5C_8+2\nu(2\nu+\chi)C_1C_3C_9+4\nu(\nu+\chi)C_2C_5C_9+2\nu(\nu+2\chi)C_1C_2C_{10})+ \\
 &+997920z^5\nu\chi(3\chi C_2C_4+3\chi C_6C_8+(3\nu+\chi)C_3C_5C_9+(\nu+\chi)C_1C_3C_{10}+(\nu+3\chi)C_2C_5C_{10})+ \\
 &+4989600z^4\nu\chi(\chi C_3C_4+\chi C_7C_8+2\nu\chi C_6C_9+(\nu+\chi)C_3C_5C_{10}+2\nu\chi C_2C_{11})+ \\
 &+19958400z^3\nu^2\chi^2(C_7C_9+C_6C_{10}+C_3C_{11}+C_2C_{12})+ \\
 &+59875200z^2\nu^2\chi^2(C_7C_{10}+C_3C_{12})+119750400z\nu^2\chi^3C_{13} \Big] + C_{14}; \\
 &P_0 = \frac{g\beta}{3113510400\nu^2\chi^3} \left[\frac{22}{7}gz^{14}\beta(15\nu+2\chi)C_1^2C_2^2 + \right. \\
 &+gz^{13}\beta C_1C_2((330\nu+43\chi)C_1C_3+(330\nu+45\chi)C_2C_5)+ \\
 &+\frac{13}{2}gz^{12}\beta((4\nu+7\chi)C_1^2C_3^2+(492\nu+72\chi)C_1C_2C_3C_5+(84\nu+9\chi)C_2^2C_5^2)+ \\
 &+78gz^{11}\beta((84\nu+7\chi)C_1C_3^2C_5+(84\nu+9\chi)C_2C_3C_5^2+(156\nu+40\chi)C_1C_2C_6)+ \\
 &+858gz^{10}\beta((21\nu+\chi)C_3^2C_5^2+(42\nu+5\chi)\chi C_1C_3C_6+ \\
 &+(42\nu+7\chi)\chi C_2C_5C_6+(72\nu+28\chi)\chi C_1C_2C_7)+ \\
 &+8580gz^9\beta\chi((21\nu+\chi)C_3C_5C_6+(21\nu+4\chi)C_1C_3C_7+(21\nu+6\chi)C_2C_5C_7)+ \\
 &+3088800gz^7\beta\nu\chi^2(C_2C_3+C_6C_7)+77220gz^8\beta\chi(5\nu\chi C_2^2+5\nu\chi C_6^2+(11\nu+\chi)C_3C_5C_7)+ \\
 &+4324320gz^6\beta\nu\chi^2(C_3^2+C_7^2)+51480z^9\chi(5\nu+3\chi)C_1C_2C_8+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+77220z^8\chi((10\nu+3\chi)C_1C_3C_8+(10\nu+5\chi)C_2C_5C_8+10\nu(\nu+\chi)C_1C_2C_9)+ \\
 &+617760z^7\chi((6\nu+\chi)C_3C_5C_8+2\nu(2\nu+\chi)C_1C_3C_9+4\nu(\nu+\chi)C_2C_5C_9+2\nu(\nu+2\chi)C_1C_2C_{10})+ \\
 &+4324320z^6\nu\chi(3\chi C_2C_4+3\chi C_6C_8+(3\nu+\chi)C_3C_5C_9+(\nu+\chi)C_1C_3C_{10}+(\nu+3\chi)C_2C_5C_{10})+ \\
 &+25945920z^5\nu\chi(\chi C_3C_4+\chi C_7C_8+2\nu\chi C_6C_9+(\nu+\chi)C_3C_5C_{10}+2\nu\chi C_2C_{11})+ \\
 &+129729600z^4\nu^2\chi^2(C_7C_9+C_6C_{10}+C_3C_{11}+C_2C_{12})+ \\
 &+518918400z^3\nu^2\chi^2(C_7C_{10}+C_3C_{12})+1556755200z^2\nu^2\chi^3C_{13}+3113510400z\nu^2\chi^3C_{14}]+C_{15}.
 \end{aligned}$$

Для определения возникших в ходе интегрирования системы (4) констант C_i , где $i = 1, \dots, 15$, необходимо задать соответствующее число граничных условий. Будем полагать, что нижняя поверхность $z = 0$ рассматриваемого бесконечного горизонтального слоя является абсолютно твердой, верхняя поверхность $z = h$ – свободной и недеформируемой [77]. Рассмотрим далее краевую задачу, описывающую термокапиллярный эффект на верхней границе слоя, т. е. на верхней границе слоя действуют термокапиллярные силы, генерирующие конвективные течения вертикально завихренной жидкости:

$$\eta V'_x(h) = -\sigma \frac{\partial T}{\partial x}(h), \quad \eta V'_y(h) = -\sigma \frac{\partial T}{\partial y}(h).$$

На обеих границах заданы источники тепла

$$T(x, y, 0) = Ax + By, \quad T(x, y, h) = \mathcal{G} + Cx + Dy.$$

Здесь A, B и C, D – значения продольных градиентов температуры, принимаемые на нижней и верхней границах рассматриваемого бесконечного слоя соответственно, \mathcal{G} – значение температуры на свободной границе.

При этом нижнюю границу $z = 0$ считаем отсчетным уровнем температуры, аналогичным образом верхнюю границу $z = h$ – отсчетным уровнем давления:

$$P(x, y, h) = 0.$$

Также полагаем, что нижняя граница движется со скоростью, определяемой выражениями

$$V_x = W \cos \alpha + \Omega y; \quad V_y = W \sin \alpha;$$

где Ω – значение горизонтального градиента скорости V_x на нижней границе (пространственное ускорение); W – модуль однородной составляющей скорости на неподвижной границе слоя жидкости.

Подставим выбранный класс решений (2)–(3) в первое обозначенное краевое условие. Получим

$$\eta V'_x(h) = -\sigma \frac{\partial T}{\partial x}(h),$$

здесь σ – температурный коэффициент поверхностного натяжения.

Подставим в это граничное условие скорости (2):

$$\eta \frac{\partial}{\partial z} (U(z) + yu(z)) \Big|_{z=h} = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} (T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z)) \Big|_{z=h},$$

откуда в силу метода неопределенных коэффициентов следуют условия

$$\eta U'(h) = -\sigma T_1(h); \quad u'(h) = 0.$$

Аналогичным образом получаем

$$\eta V'(h) = -\sigma T_2(h).$$

С учетом структуры класса (2)–(3) окончательно приходим к системе из пятнадцати краевых условий:

$$u(0) = \Omega, \quad u'(h) = 0;$$

$$T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = A, \quad T_2(0) = B$$

$$T_0(h) = \mathcal{G}, \quad T_1(h) = C, \quad T_2(h) = D$$

$$P_0(h) = 0, \quad P_1(h) = 0, \quad P_2(h) = 0 \tag{5}$$

$$U(0) = W \cos \alpha, \quad V(0) = W \sin \alpha$$

$$\eta U'(h) = -\sigma T_1(h), \quad \eta V'(h) = -\sigma T_2(h).$$

Формулы (5) характеризуют неоднородное распределение скоростей на нижней границе. Отметим, что выбор граничных условий (5) обусловлен масштабами изучаемого течения.

Рассмотрим далее частный случай нагрева (охлаждения) верхней границы ($A = B = 0$) и проанализируем поведение температурного поля. Решения большинства уравнений системы (4) зависят от градиента температуры T_1 , а следовательно и от принимаемых им на границах слоя значений. Различие этих значений ведет к большему разнообразию свойств решений остальных рассматриваемых в задаче полей. При задании двух в общем случае различных тепловых источников на верхней границе получаем две отличные друг от друга термокапиллярные силы, которые в свою очередь индуцируют потоки, оказывающие различное влияние на формирование результирующего течения.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Точное решение краевой задачи

Найдем, используя систему ограничений (5), точное решение поставленной краевой задачи (4)–(5). Начнем с продольного градиента скорости u . Подставляя в найденное решение

$$u = C_1 z + C_5$$

значения аргумента $z = 0$ и $z = h$, приходим к системе

$$\begin{cases} C_5 = \Omega, \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$u = \Omega.$$

Стоит отметить, что если при рассмотрении обобщенных классов для поля температуры, нелинейно зависящей от продольных координат, градиент скорости u мог бы линейно зависеть от поперечной координаты z даже при аналогичном задании термокапиллярных сил на верхней границе.

Далее переходим к продольному градиенту температуры

$$T_1 = \tilde{N}_2 z + C_3.$$

Значения констант интегрирования C_2 , C_3 определяются из граничных условий:

$$A = T_1(0) = C_2 \cdot 0 + C_3; \quad \tilde{N} = T_1(h) = \tilde{N}_2 \cdot h + C_3.$$

Разрешая эту систему, легко находим

$$C_3 = A; \quad \tilde{N}_2 = \frac{C - A}{h}.$$

А значит, окончательно функция T_1 принимает вид:

$$T_1 = A + \frac{C - A}{h} z.$$

Подставляя найденные значения констант C_2 , C_3 и пользуясь соответствующим граничным условием для давления, находим константу

$$C_4 = -\frac{g\beta h(A + C)}{2},$$

входящую в выражение для градиента давления P_1 , в силу чего P_1 принимает вид:

$$P_1 = \frac{g\beta}{2h} \left((C - A)z^2 + 2Ahz - (A + C)h^2 \right).$$

Интегрируя аналогичным образом остальные уравнения системы (4), получаем точное решение краевой задачи (4)–(5):

$$\begin{aligned}
 u &= \Omega; \\
 T_1 &= A + \frac{C-A}{h} z; \\
 P_1 &= \frac{g\beta}{2h} ((C-A)z^2 + 2Ahz - (A+C)h^2); \\
 T_2 &= B + \frac{D-B}{h} z + \frac{\Omega z}{6h\chi} ((C-A)z^2 + 3Ahz - (2A+C)h^2); \\
 P_2 &= \frac{g\beta}{2h} ((D-B)z^2 + 2Bhz - (B+D)h^2) + \frac{g\beta\Omega}{24h\chi} ((C-A)z^4 + 4Ahz^3 - 2(2A+C)h^2z^2 + (A+C)h^4) \\
 V &= W\sin\alpha - \frac{D\sigma}{\eta} z + \frac{g\beta z}{24hv} ((D-B)z^3 + 4Bhz^2 - 6(B+D)h^2z + 4(B+2D)h^3) - \\
 &\quad - \frac{g\beta\Omega}{720hv\chi} z ((C-A)z^5 - 6Ahz^4 + 5(2A+C)h^2z^3 - 15(A+C)h^4z + 2(7A+8C)h^5); \\
 U &= W\cos\alpha - \frac{C\sigma}{\eta} z + \frac{g\beta}{24hv} z ((C-A)z^3 + 4Ahz^2 - 6(A+C)h^2z + 4(A+2C)h^3) - \\
 &\quad - \frac{g\beta\Omega}{720hv^2} z ((D-B)z^5 - 6Bhz^4 + 15(B+D)h^2z^3 - 20(B+2D)h^3z^2 + 6(4B+11D)h^5) - \\
 &\quad - \frac{W\sin\alpha\Omega}{2\nu} (2h-z)z + \frac{D\sigma\Omega}{6\eta\nu} (3h^2 - z^2)z + \frac{g\beta\Omega^2 z}{120960hv^2\chi} [3(-A+C)z^7 + 24Ahz^6 - 28(2A+C)h^2z^5 + \\
 &\quad + 210(A+C)h^4z^3 - (392A+448C)h^5z^2 + (528A+648C)h^7]; \\
 T_0 &= \frac{z^9}{h} - \frac{g\beta}{5040h^2\nu\chi} (h-z)z [5(A^2 + B^2 - 2AC + C^2 - 2BD + D^2)z^5 + \\
 &\quad + 5(-6A^2 - 6B^2 + 5AC + C^2 + 5BD + D^2)hz^4 + + (75A^2 + 75B^2 + 25AC - 58C^2 + 25BD - 58D^2)h^2z^3 + \\
 &\quad + (-100A^2 - 100B^2 - 150AC + 82C^2 - 150BD + 82D^2)h^3z^2 + \\
 &\quad + (40A^2 + 40B^2 + 130AC + 82C^2 + 130BD + 82D^2)h^4z + \\
 &\quad + (40A^2 + 40B^2 + 130AC + 82C^2 + 130BD + 82D^2)h^5] -
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Wz}{6h\chi} \left((2B+D)h^2 \sin\alpha - 3(A\cos\alpha + B\sin\alpha)hz + ((A-C)\cos\alpha + (B-D)\sin\alpha)z^2 \right) + \\
 & + \frac{\sigma(h-z)z}{12h\eta\chi} \left((-AC+C^2-BD+D^2)z^2 + (AC+C^2+BD+D^2)hz + (AC+C^2+BD+D^2)h^2 \right) + \\
 & + \frac{g\beta\Omega(h-z)z}{120960h^2v\chi^2} \left[14(-AB+BC+AD-CD)z^7 + (112AB-49BC-49AD-14CD)hz^6 + \right. \\
 & + (-352AB+31BC-89AD+146CD)h^2z^5 + (554AB+59BC+639AD-78CD)h^3z^4 - \\
 & - (338AB+67BC+999AD+456CD)h^4z^3 + (-184AB-221BC+317AD+328CD)h^5z^2 + \\
 & \left. + (208AB+227BC+317AD+328CD)h^6z + (208AB+227BC+317AD+328CD)h^7 \right] + \\
 & + \frac{W\sin\alpha\Omega(h-z)z}{360h\chi^2} \left(3(A-C)z^3 - 3(4A+C)hz^2 + (8A+7C)h^2z + (8A+7C)h^3 \right) - \\
 & - \frac{D\sigma\Omega(h-z)z}{360h\eta\chi^2} \left(2(A-C)z^4 - (7A+2C)hz^3 + 3(A+C)h^2z^2 + 3(A+C)h^3z + 3(A+C)h^4 \right) + \\
 & + \frac{g\beta\Omega(h-z)z}{362880h^2v^2\chi} \left[7(-AB+BC+AD-CD)z^7 + (56AB-47BC-2AD-7CD)hz^6 + \right. \\
 & + (-196AB+133BC-182AD+173CD)h^2z^5 + (392AB-203BC+742AD-499CD)h^3z^4 - \\
 & - (112AB+203BC+266AD+499CD)h^4z^3 + (-1120AB+805BC-3038AD+2273CD)h^5z^2 + \\
 & \left. + (896AB+805BC+2506AD+2273CD)h^6z + (896AB+805BC+2506AD+2273CD)h^7 \right] + \\
 & + \frac{W\sin\alpha\Omega(h-z)z}{120hv\chi} \left(3(A-C)z^3 + (-12A+7C)hz^2 + (8A+7C)h^2z + (8A+7C)h^3 \right) - \\
 & - \frac{D\sigma\Omega(h-z)z}{360h\eta v\chi} \left(2(A-C)z^4 - (A+2C)hz^3 + (-16A+13C)h^2z^2 + (14A+13C)h^3z + (14A+13C)h^4 \right) - \\
 & - \frac{g\beta\Omega^2(h-z)z}{33916800h^2v\chi^3} \left[84(A^2-2AC+C^2)z^9 + (-840A^2+756AC+84C^2)hz^8 + \right. \\
 & + (3010A^2-14AC-686C^2)h^2z^7 - (3920A^2+3479AC+686C^2)h^3z^6 + \\
 & + (-2820A^2+921AC+3714C^2)h^4z^5 + (15352A^2+15397AC-1214C^2)h^5z^4 - \\
 & \left. - (17912A^2+27569AC+8144C^2)h^6z^3 + (3648A^2+7851AC+4176C^2)h^7z^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (3648A^2 + 7851AC + 4176C^2)h^8z + (3648A^2 + 7851AC + 4176C^2)h^9 \Big] - \\
 & - \frac{g\beta\Omega^2(h-z)z}{119750400h^2\nu^2\chi^2} \Big[27(A^2 - 2AC + C^2)z^9 + (-270A^2 + 243AC + 27C^2)hz^8 + \\
 & + (830A^2 - 142AC - 358C^2)h^2z^7 - (160A^2 + 637AC + 358C^2)h^3z^6 + \\
 & + (-5110A^2 - 637AC + 4592C^2)h^4z^5 + (14756A^2 + 8141AC - 10192C^2)h^5z^4 - \\
 & - (4648A^2 + 14035AC + 10192C^2)h^6z^3 + (-48208A^2 - 23935AC + 43268C^2)h^7z^2 + \\
 & + (38912A^2 + 82985AC + 43268C^2)h^8z + (38912A^2 + 82985AC + 43268C^2)h^9 \Big], \\
 P_0 = & \frac{g^2\beta^2(h-z)^2}{40320h^2\nu\chi} \Big[5(A^2 + B^2 - 2AC + C^2 - 2BD + D^2)z^6 + 10(-3A^2 - 3B^2 + 2AC + C^2 + 2BD + D^2)hz^5 + \\
 & + (75A^2 + 75B^2 + 50AC - 69C^2 + 50BD - 69D^2)h^2z^4 + \\
 & + 4(-25A^2 - 25B^2 - 50AC + 19C^2 - 50BD + 19D^2)h^3z^3 + \\
 & + (5A^2 + 5B^2 + 110AC + 221C^2 + 110BD + 221D^2)h^4z^2 + \\
 & + (110A^2 + 110B^2 + 420AC + 336C^2 + 420BD + 336D^2)h^5z + \\
 & + (55A^2 + 55B^2 + 210AC + 183C^2 + 210BD + 183D^2)h^6 \Big] - \frac{g\beta g(h-z)(h+z)}{2h} + \\
 & + \frac{Wg\beta(h-z)^2}{24h\chi} \Big[((-A+C)\cos\alpha + (-B+D)\sin\alpha)z^2 + 2((A+C)\cos\alpha + (B+D)\sin\alpha)hz + \\
 & + ((A+C)\cos\alpha + (B+D)\sin\alpha)h^2 \Big] - \frac{g\beta\sigma(h-z)^2}{120h\eta\chi} \Big[(-2AC + 2C^2 - 2BD + 2D^2)z^3 + \\
 & + (AC + 4C^2 + BD + 4D^2)hz^2 + 2(2AC + 3C^2 + 2BD + 3D^2)h^2z + (2AC + 3C^2 + 2BD + 3D^2)h^3 \Big] - \\
 & - \frac{g^2\beta^2\Omega(h-z)^2}{1209600h^2\nu\chi^2} \Big[14(-AB + BC + AD - CD)z^8 + (112AB - 42BC - 42AD - 28CD)hz^7 + \\
 & + (-342AB + 2BC - 148AD + 158CD)h^2z^6 + (484AB + 86BC + 786AD + 24CD)h^3z^5 - \\
 & - 10(16AB + 4BC + 101AD + 74CD)h^4z^4 - (496AB + 474BC + 174AD - 64CD)h^5z^3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(148AB+212BC+662AD+868CD)h^6z^2+(792AB+898BC+1498AD+1672CD)h^7z+ \\
 &+(396AB+449BC+749AD+836CD)h^8]-\frac{g\beta W\sin\alpha\Omega(h-z)^2}{720h\chi^2}[4(A-C)z^4-2(2A+C)hz^3+ \\
 &+(A+2C)h^2z^2+6(A+C)h^3z+3(A+C)h^4]+\frac{g\beta D\sigma\Omega(h-z)^2}{5040h\eta\chi^2}[4(A-C)z^5-(13A+8C)hz^4+ \\
 &+2(-A+C)h^2z^3+(9A+12C)h^3z^2+2(10A+11C)h^4z+(10A+11C)h^5]- \\
 &-\frac{g^2\beta^2\Omega(h-z)^2}{3628800h^2v^2\chi^2}[7(-AB+BC+AD-CD)z^8+(56AB-46BC+4AD-14CD)hz^7+ \\
 &+(-196AB+126BC-224AD+204CD)h^2z^6+(392AB-182BC+868AD-538CD)h^3z^5+ \\
 &+(140AB-490BC+280AD-1280CD)h^4z^4+(-2128AB+1218BC-5852AD+3522CD)h^5z^3+ \\
 &+(644AB+2926BC+1876AD+8324CD)h^6z^2+(3416AB+4634BC+9604AD+13126CD)h^7z+ \\
 &+(1708AB+2317BC+4802AD+6563CD)h^8]-\frac{g\beta W\sin\alpha\Omega(h-z)^2}{240hv\chi}[(A-C)z^4+ \\
 &+2(-2A+C)hz^3+(A+5C)h^2z^2+2(3A+4C)h^3z+(3A+4C)h^4]+ \\
 &+\frac{g\beta D\sigma\Omega(h-z)^2}{5040h\eta v\chi}[4(A-C)z^5+(A-8C)hz^4+2(-22A+15C)h^2z^3+4(4A+17C)h^3z^2+ \\
 &+2(38A+53C)h^4z+(38A+53C)h^5]+\frac{g^2\beta^2\Omega^2(h-z)^2}{79833600h^2v\chi^3}[14(A^2-2AC+C^2)z^{10}+ \\
 &+(-140A^2+112AC+28C^2)hz^9+(476A^2+98AC-112C^2)h^2z^8-(448A^2+686AC+252C^2)h^3z^7+ \\
 &+(-1097A^2-370AC+708C^2)h^4z^6+(3446A^2+4082AC+260C^2)h^5z^5- \\
 &- (3099A^2+5788AC+2498C^2)h^6z^4-(1020A^2+1490AC+328C^2)h^7z^3+ \\
 &+(1059A^2+2808AC+1842C^2)h^8z^2+(3138A^2+7106C+4012C^2)h^9z+ \\
 &+(1569A^2+3553AC+2006C^2)h^{10}]+ \\
 &+\frac{g^2\beta^2\Omega^2(h-z)^2}{479001600h^2v^2\chi^2}[9(A^2-2AC+C^2)z^{10}+9(-10A^2+8AC+2C^2)hz^9+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (251A^2 + 8AC - 127C^2)h^2z^8 + (152A^2 - 276AC - 272C^2)h^3z^7 + \\
 & + (-2422A^2 - 560AC + 2058C^2)h^4z^6 + (6356A^2 - 4172AC - 4060C^2)h^5z^5 + \\
 & + (2198A^2 - 5880AC - 10178C^2)h^6z^4 + (-36808A^2 - 23852AC + 26472C^2)h^7z^3 + \\
 & + (11306A^2 + 65096AC + 63122C^2)h^8z^2 + (59420A^2 + 154044AC + 99772C^2)h^9z + \\
 & + (29710A^2 + 77022AC + 49886C^2)h^{10} \Big].
 \end{aligned}$$

3.2. Случай нагрева верхней границы

Проанализируем приведенное выше точное решение (6) в частном случае задания источников тепла только на верхней границе слоя. Для этого необходимо положить $A = B = 0$, в результате чего общее решение (6) принимает вид:

$$u = \Omega;$$

$$T_1 = \frac{C}{h} z;$$

$$P_1 = \frac{g\beta C}{2h} (z^2 - h^2);$$

$$T_2 = \frac{D}{h} z + \frac{\Omega z C}{6h\chi} (z^2 - h^2);$$

$$P_2 = \frac{g\beta D}{2h} (z^2 - h^2) + \frac{g\beta\Omega C}{24h\chi} (z^4 - 2h^2z^2 + h^4);$$

$$V = W\sin\alpha - \frac{D\sigma}{\eta} z + \frac{g\beta Dz}{24hv} (z^3 - 6h^2z + 8h^3) - \frac{g\beta\Omega C}{720hv\chi} z (z^5 + 5h^2z^3 - 15h^4z + 16h^5);$$

$$U = W\cos\alpha - \frac{C\sigma}{\eta} z + \frac{g\beta C}{24hv} z (z^3 - 6h^2z + 8h^3) - \frac{g\beta\Omega D}{720hv^2} z (z^5 + 15h^2z^3 - 40h^3z^2 + 66h^5) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{W\sin\alpha\Omega}{2\nu} (2h - z)z + \frac{D\sigma\Omega}{6\eta\nu} (3h^2 - z^2)z + \frac{g\beta\Omega^2 Cz}{120960hv^2\chi} [3z^7 - 28h^2z^5 + \\
 & + 210h^4z^3 - 448h^5z^2 + 648h^7];
 \end{aligned}$$

$$T_0 = \frac{z\vartheta}{h} - \frac{g\beta(C^2 + D^2)}{5040h^2\nu\chi} (h - z)z [5z^5 + 5hz^4 - 58h^2z^3 + 82h^3z^2 + 82h^4z + 82h^5] -$$

$$- \frac{Wz}{6h\chi} (Dh^2\sin\alpha - (C\cos\alpha + D\sin\alpha)z^2) + \frac{\sigma(C^2 + D^2)(h - z)z}{12h\eta\chi} (z^2 + hz + h^2) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{g\beta\Omega CD(h-z)z}{120960h^2v\chi^2} \left[14z^7 + 14hz^6 - 146h^2z^5 + 78h^3z^4 + 456h^4z^3 - 328h^5z^2 - 328h^6z^3 - 328h^7 \right] - \\
 & \quad -\frac{W\sin\alpha\Omega C(h-z)z}{360h\chi^2} (3z^3 + 3hz^2 - 7h^2z - 7h^3) + \\
 & \quad +\frac{CD\sigma\Omega(h-z)z}{360h\eta\chi^2} (2z^4 + 2hz^3 - 3h^2z^2 - 3h^3z - 3h^4) - \\
 & -\frac{g\beta\Omega CD(h-z)z}{362880h^2v^2\chi} \left[7z^7 + 7hz^6 - 173h^2z^5 + 499h^3z^4 + 499h^4z^3 - 2273h^5z^2 - 2273h^6z - 2273h^7 \right] - \\
 & \quad -\frac{W\sin\alpha\Omega C(h-z)z}{120hv\chi} (3z^3 - 7hz^2 - 7h^2z - 7h^3) - \\
 & \quad +\frac{CD\sigma\Omega(h-z)z}{360h\eta v\chi} (2z^4 + 2hz^3 - 13h^2z^2 - 13h^3z - 13h^4) - \\
 & -\frac{g\beta\Omega^2 C^2(h-z)z}{33916800h^2v\chi^3} \left[84z^9 + 84hz^8 - 686h^2z^7 - 686h^3z^6 + 3714h^4z^5 - 1214h^5z^4 - \right. \\
 & \quad \left. -8144h^6z^3 + 4176h^7z^2 + 4176h^8z + 4176h^9 \right] - \\
 & -\frac{g\beta\Omega^2 C^2(h-z)z}{119750400h^2v^2\chi^2} \left[27z^9 + 27hz^8 - 358h^2z^7 - 358h^3z^6 + 4592h^4z^5 - 10192h^5z^4 - \right. \\
 & \quad \left. -10192h^6z^3 + 43268h^7z^2 + 43268h^8z + 43268h^9 \right]; \\
 P_0 = & \frac{g^2\beta^2(C^2 + D^2)(h-z)^2}{40320h^2v\chi} \left[5z^6 + 10hz^5 - 69h^2z^4 + 76h^3z^3 + 221h^4z^2 + 336h^5z + 183h^6 \right] - \\
 & -\frac{g\beta\vartheta(h-z)(h+z)}{2h} + \frac{Wg\beta(C\cos\alpha + D\sin\alpha)(h-z)^2}{24h\chi} \left[z^2 + 2hz + h^2 \right] - \\
 & -\frac{g\beta\sigma(C^2 + D^2)(h-z)^2}{120h\eta\chi} \left[2z^3 + 4hz^2 + 6h^2z + 3h^3 \right] + \\
 & +\frac{g^2\beta^2\Omega CD(h-z)^2}{1209600h^2v\chi^2} \left[14z^8 + 28hz^7 - 158h^2z^6 - 24h^3z^5 + 740h^4z^4 - 64h^5z^3 - 868h^6z^2 - 1671h^7z - \right. \\
 & \quad \left. -836h^8 \right] + \frac{g\beta W\sin\alpha\Omega C(h-z)^2}{720h\chi^2} \left[4z^4 + 2hz^3 - 2h^2z^2 - 6h^3z - 3h^4 \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{g\beta CD\sigma\Omega(h-z)^2}{5040h\eta\chi^2} \left[4z^5 + 8hz^4 - 2h^2z^3 - 12h^3z^2 - 22h^4z - 11h^5 \right] + \\
 & + \frac{g^2\beta^2\Omega CD(h-z)^2}{3628800h^2\nu^2\chi} \left[7z^8 + 14hz^7 - 204h^2z^6 + 538h^3z^5 + 1280h^4z^4 - 3522h^5z^3 - \right. \\
 & \quad \left. - 8324h^6z^2 - 13126h^7z - 6563h^8 \right] + \\
 & + \frac{g\beta W\sin\alpha\chi\Omega C(h-z)^2}{240h\nu\chi} \left[z^4 - 2hz^3 - 5h^2z^2 - 8h^3z - 4h^4 \right] - \\
 & - \frac{g\beta CD\sigma\Omega(h-z)^2}{5040h\eta\nu\chi} \left[4z^5 + 8hz^4 - 30h^2z^3 - 68h^3z^2 - 106h^4z - 53h^5 \right] + \\
 & + \frac{g^2\beta^2\Omega^2 C^2(h-z)^2}{79833600h^2\nu\chi^3} \left[14z^{10} + 28hz^9 - 112h^2z^8 - 252h^3z^7 + 708h^4z^6 + 260h^5z^5 - \right. \\
 & \quad \left. - 2498h^6z^4 - 328h^7z^3 + 1842h^8z^2 + 4012h^9z + 2006h^{10} \right] + \\
 & + \frac{g^2\beta^2\Omega^2 C^2(h-z)^2}{479001600h^2\nu^2\chi^2} \left[9z^{10} + 18hz^9 - 127h^2z^8 - 272h^3z^7 + 2058h^4z^6 - 4060h^5z^5 - \right. \\
 & \quad \left. - 10178h^6z^4 + 26472h^7z^3 + 63122h^8z^2 + 99772h^9z + 49886h^{10} \right].
 \end{aligned}$$

В силу структуры выбранного класса решений (2) несимметричность выражений компонент V_x , V_y поля скорости приводит к тому, что становится невозможным построить линейное преобразование, позволяющее снизить размерность исследуемой задачи, как это было проделано, например, в [34–38].

Поставим далее задачу исследования условий существования числа критических точек и возникновения вертикальной стратификации в температурном поле (аналогичное исследование для более простого класса скоростей было проведено авторами ранее, в частности в [36–38]).

3.3. Исследование температурного поля при задании тепловых источников только на верхней границе

Рассмотрим сначала предельный случай – случай задания однородного источника тепла ($A = B = C = D = 0$). Полагая все продольные градиенты температуры нулевыми, получаем, что компоненты температурного поля в изотермическом случае принимают вид:

$$T_1 = T_2 = 0, T_0 = gZ.$$

Очевидно, что данное решение не может описывать стратификацию поля температуры.

Когда источник тепла не является однородным, поле температуры определяется вкладом нескольких потоков, индуцированных различными причинами, среди которых влияние термокапиллярного эффекта, неравномерный нагрев границ слоя жидкости, движение ниж-

ней границы и др. Причем три из этих потоков индуцированы термокапиллярными силами в сочетании с другими факторами.

Введем всюду далее безразмерную координату $Z = z/h \in [0,1]$ и перепишем компоненты температурного поля с учетом введенной замены:

$$T_1 = CZ, \quad T_2 = Z \left[D + \frac{\Omega h^2 C}{6\chi} (Z^2 - 1) \right];$$

$$T_0 = \left(\vartheta - \frac{Wh^2 D \sin \alpha}{6\chi} \right) Z - \frac{g\beta h^5 (C^2 + D^2)}{5040\nu\chi} (1-Z) Z [5Z^5 + 5Z^4 - 58Z^3 + 82Z^2 + 82Z + 82] +$$

$$+ \frac{Wh^2 (C \cos \alpha + D \sin \alpha)}{6\chi} Z^3 + \frac{\sigma (C^2 + D^2) h^3 (1-Z) Z}{12\eta\chi} (Z^2 + Z + 1) -$$

$$- \frac{g\beta\Omega CD h^7 (1-Z) Z}{120960\nu\chi^2} [14Z^7 + 14Z^6 - 146Z^5 + 78Z^4 + 456Z^3 - 328Z^2 - 328Z^3 - 328] -$$

$$- \frac{W \sin \alpha \Omega h^4 C (1-Z) Z}{360\chi^2} (3Z^3 + 3Z^2 - 7Z - 7) +$$

$$+ \frac{CD\sigma\Omega h^5 (1-Z) Z}{360\eta\chi^2} (2Z^4 + 2Z^3 - 3Z^2 - 3Z - 3) -$$

$$- \frac{g\beta\Omega CD h^7 (1-Z) Z}{362880\nu^2\chi} [7Z^7 + 7Z^6 - 173Z^5 + 499Z^4 + 499Z^3 - 2273Z^2 - 2273Z - 2273] -$$

$$- \frac{W \sin \alpha \Omega Ch^4 (1-Z) Z}{120\nu\chi} (3Z^3 - 7Z^2 - 7Z - 7) +$$

$$+ \frac{CD\sigma\Omega h^5 (1-Z) Z}{360\eta\nu\chi} (2Z^4 + 2Z^3 - 13Z^2 - 13Z - 13) -$$

$$- \frac{g\beta\Omega^2 C^2 h^9 (1-Z) Z}{33916800\nu\chi^3} [84Z^9 + 84Z^8 - 686Z^7 - 686Z^6 + 3714Z^5 - 1214Z^4 -$$

$$- 8144Z^3 + 4176Z^2 + 4176Z + 4176] -$$

$$- \frac{g\beta\Omega^2 C^2 h^9 (1-Z) Z}{119750400\nu^2\chi^2} [27Z^9 + 27Z^8 - 358Z^7 - 358Z^6 + 4592Z^5 - 10192Z^4 -$$

$$- 10192Z^3 + 43268Z^2 + 43268Z + 43268].$$

Ввиду несимметричности выражений компонент поля скорости компоненты $T_1(Z)$ и $T_2(Z)$ температурного поля оказываются линейно независимы. Действительно, пусть существует линейное преобразование такое, что градиенты T_1 и T_2 оказываются связаны:

$$T_1 \equiv \lambda T_2, \quad \lambda \neq 0.$$

Подставив полученные выше выражения для градиентов, получим:

$$CZ \equiv \lambda Z \left[D + \frac{\Omega h^2 C}{6\chi} (Z^2 - 1) \right];$$

$$Z \left[\lambda D - \left(\lambda \frac{\Omega h^2}{6\chi} + 1 \right) C + \lambda \frac{\Omega h^2 C}{6\chi} Z^2 \right] \equiv 0$$

В силу принципа неопределенных коэффициентов последнее тождество равносильно системе условий:

$$\begin{cases} \lambda D = \frac{\lambda \Omega h^2 + 6\chi}{6\chi} C, \\ \lambda \frac{\Omega h^2 C}{6\chi} = 0. \end{cases}$$

Данная система совместна только при $C = D = 0$. В рассматриваемом частном случае $A = B = 0$ выполнение условия $C = D = 0$ приводит к предельному случаю однородного источника тепла, разобранный выше. Таким образом, ввести линейную замену, позволяющую снизить размерность задачи без вырождения в нуль градиентов температуры, не представляется возможным.

Исследуем теперь температурное поле на экстремум. Необходимое условие существования стационарной точки [78] поля температуры гласит, что точка (x_0, y_0, Z_0) является стационарной, если в ней выполняется система условий:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0.$$

С учетом структуры класса (3) эти условия равносильны следующей системе:

$$T_1 = 0; \quad T_2 = 0; \quad \frac{\partial}{\partial Z} (T_0 + T_1 x + T_2 y) = 0.$$

Очевидно, $Z_0 = 0$ удовлетворяет первым двум условиям. Подстановка этого значения в третье условие позволит определить подходящие x_0 и y_0 .

Для проверки выполнения достаточного условия существования экстремума необходимо рассмотреть значение в стационарной точке (x_0, y_0, Z_0) квадратичную форму, отвечающую второму дифференциалу функции температуры:

$$dF_T(dx, dy, dZ) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dx^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dy^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dZ^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dx dy + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Z} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dy dZ + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial Z} \Big|_{(x_0, y_0, Z_0)} dx dZ = \\
 & = \left(\frac{d^2 T_0}{dZ^2} \Big|_{Z_0} + \frac{d^2 T_1}{dZ^2} \Big|_{Z_0} x_0 + \frac{d^2 T_2}{dZ^2} \Big|_{Z_0} y_0 \right) dZ^2 + \frac{dT_1}{dZ} \Big|_{Z_0} dx dZ + \frac{dT_2}{dZ} \Big|_{Z_0} dy dZ = \\
 & = \frac{d^2 T_0}{dZ^2} \Big|_{Z_0} dZ^2 + C dx dZ + \left(D - \frac{C \Omega h^2}{6 \chi} \right) dy dZ.
 \end{aligned}$$

Данная квадратичная форма ввиду сильной нелинейности фоновой температуры T_0 не является знакоопределенной, следовательно, экстремума не существует.

Исследуем теперь компоненты температурного поля на предмет наличия критических точек. Очевидно, что компонента $T_1(Z)$ не допускает расслоений, поскольку является строго монотонной (линейной) функцией. Несложно убедиться, что у компоненты $T_2(Z)$ может быть не более одного нуля на интервале $(0,1)$, так как в ее мультипликативную запись входит полином второй степени с ненулевым свободным членом, описывающий параболу с вершиной на границе исследуемого интервала $(0,1)$. Легко выписывается условие на параметры, при выполнении которого у градиента $T_2(Z)$ будет один нуль на исследуемом интервале. Для этого рассмотрим нули функции $T_2(Z)$:

$$T_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0, \\ D + \frac{\Omega h^2 C}{6 \chi} (Z^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Точка $Z_0 = 0$ является нулем функции $T_2(Z)$, но не является критической. Выпишем корни получившегося квадратного уравнения:

$$\frac{\Omega h^2 C}{6 \chi} Z^2 = \frac{\Omega h^2 C}{6 \chi} - D.$$

Если $C \Omega = 0$, градиент T_2 определяется выражением $T_2 = DZ$ и, следовательно, при $D \neq 0$ не обращается в нуль внутри слоя жидкости. Полагая далее $C \Omega \neq 0$, приходим к уравнению

$$Z^2 = 1 - \frac{6 \chi D}{\Omega h^2 C}.$$

Очевидно, что действительные корни существуют, если

$$1 - \frac{6 \chi D}{\Omega h^2 C} \geq 0,$$

что равносильно следующему условию на управляющие параметры задачи:

$$\frac{D}{\Omega C} \leq \frac{h^2}{6\chi}.$$

Если последнее неравенство обратится в равенство (т. е. при $D = 0$), будет единственный корень – $Z_0 = 0$. Если $\frac{D}{\Omega C} \leq 0$, то оба корня лежат вне исследуемого интервала $(0,1)$.

Изучим теперь поведение фоновой температуры $T_0(Z)$ и ее изменение по толщине слоя жидкости. Из приведенного выше точного решения видно, что фоновая температура описывается полиномом одиннадцатой степени с переменными коэффициентами. Известно [79], что число корней многочлена не превосходит его степени, в данном случае одиннадцати. Один корень выделяется явно – это $Z_0 = 0$, поскольку фоновая температура, очевидно, может быть представлена в мультипликативном виде:

$$T_0 = F(Z)Z,$$

где $F(Z)$ есть линейная комбинация вида

$$F = k_0 + \sum_i k_i t_i(Z).$$

Остальные десять корней многочлена $F(Z)$ могут лежать вне исследуемого интервала $(0,1)$ или же быть комплексными.

Очевидно, что любая критическая точка $Z_j \neq 0$ ($j = \overline{1, m}$) фоновой температуры $T_0(Z)$ является также нулем функции $F(Z)$, так как справедливо равенство:

$$0 = T_0(Z_j) = F(Z_j)Z_j.$$

Что в свою очередь приводит к равенству

$$k_0 + \sum_i k_i t_i(Z_j) = 0 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Эти m условий можно рассматривать как систему m однородных уравнений относительно коэффициентов k_i . Причем среди строк матрицы получившейся линейной системы нет пропорциональных в силу строгой монотонности функций $t_i(Z)$ на интервале $(0,1)$. У такой системы всегда существует нетривиальное решение, если число условий m меньше числа неизвестных, в роли которых выступают коэффициенты k_i .

В качестве иллюстрации приведенных выше рассуждений представлены профили фоновой температуры $T_0(Z)$ при различном числе критических точек у нее (рис. 1–10).

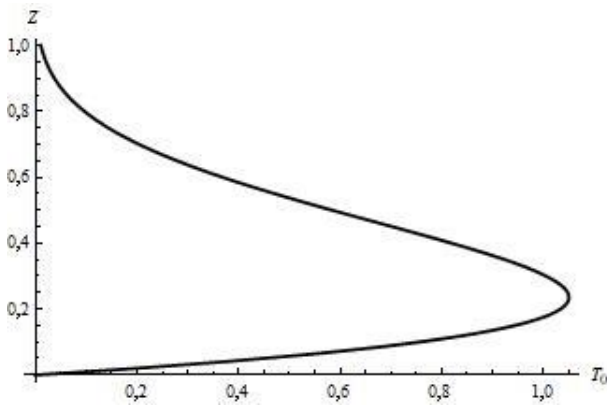


Рис. 1. Профиль температуры T_0 при отсутствии у нее критических точек

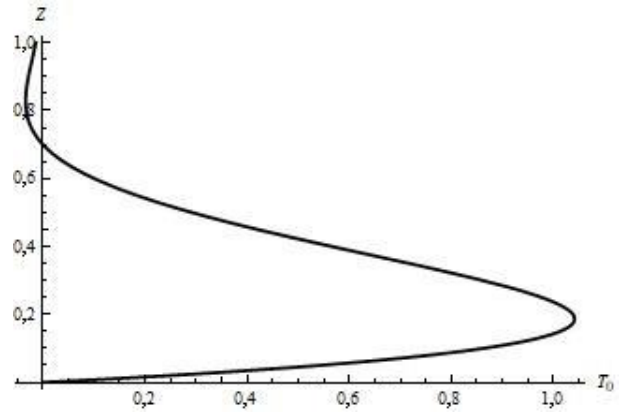


Рис. 2. Профиль температуры T_0 при наличии единственной критической точки

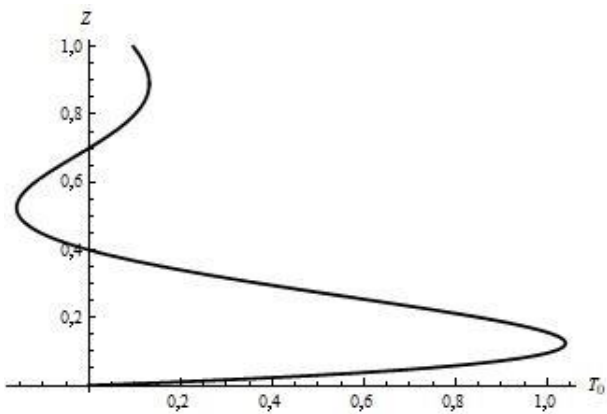


Рис. 3. Профиль температуры T_0 при наличии двух критических точек

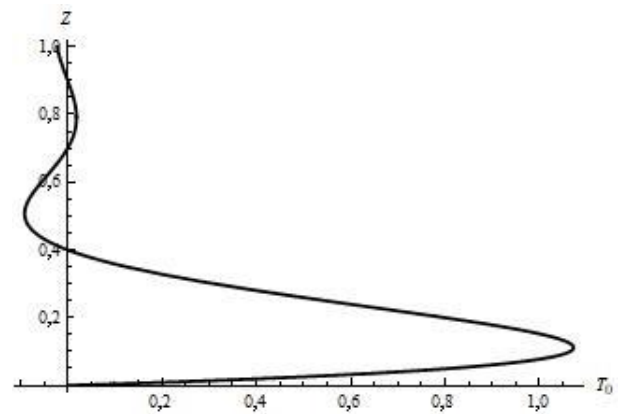


Рис. 4. Профиль температуры T_0 при наличии трех критических точек

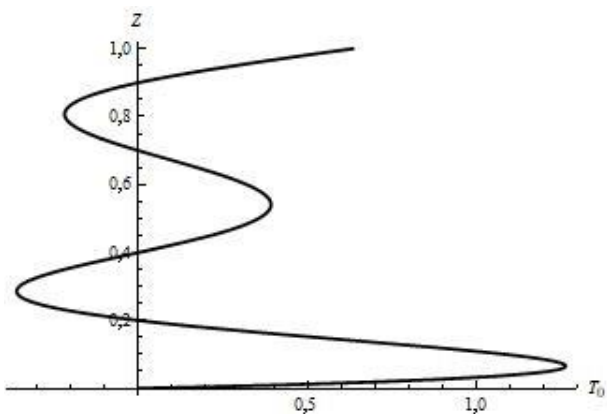


Рис. 5. Профиль температуры T_0 при наличии четырех критических точек

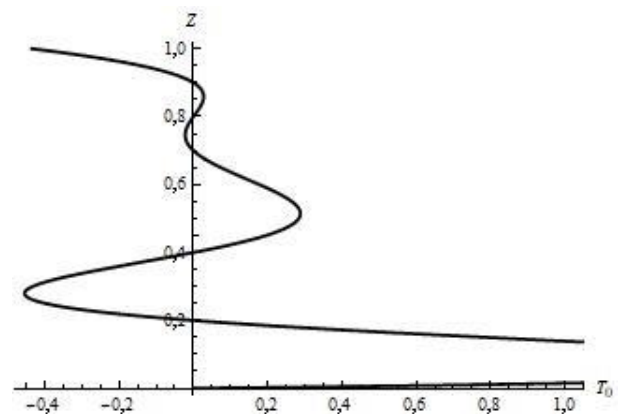


Рис. 6. Профиль температуры T_0 при наличии пяти критических точек

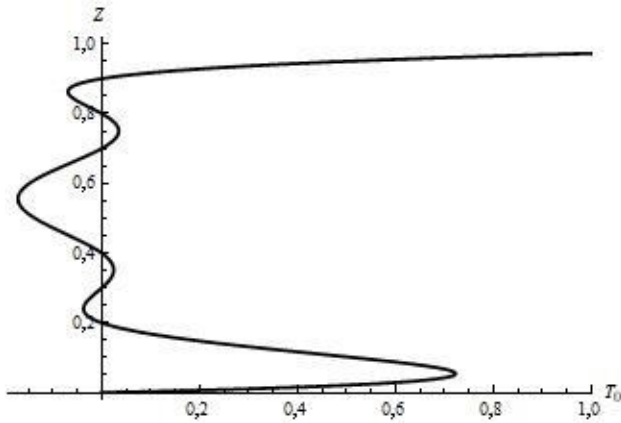


Рис. 7. Профиль температуры T_0 при наличии шести критических точек

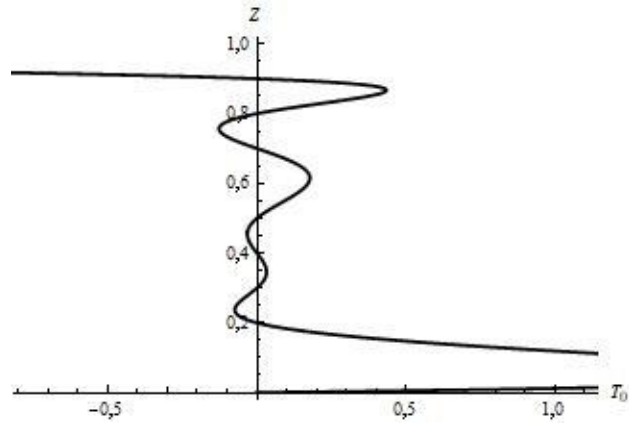


Рис. 8. Профиль температуры T_0 при наличии семи критических точек

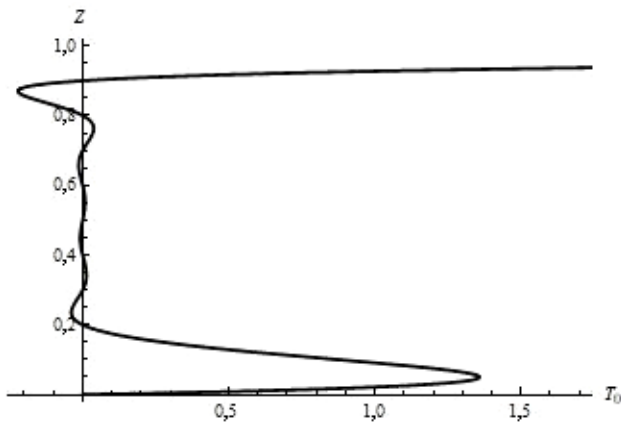


Рис. 9. Профиль температуры T_0 при наличии восьми критических точек

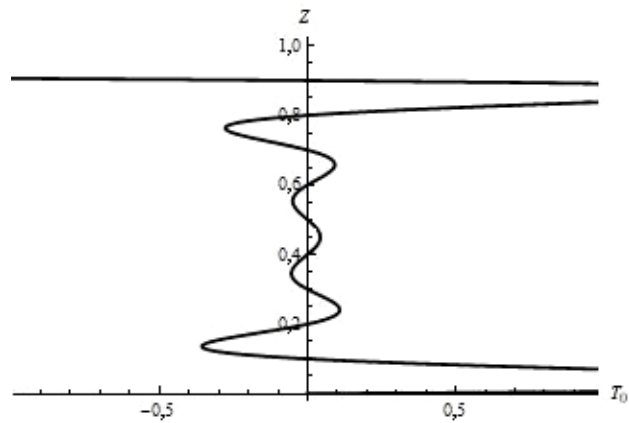


Рис. 10. Профиль температуры T_0 при наличии девяти критических точек

Рассмотрим далее поведение температурного поля T с учетом рассмотренных выше особенностей его отдельных составляющих T_0 , T_1 и T_2 . Визуализация данного поля в общем случае не представляется возможной, так как температурному полю отвечает поверхность в четырехмерном пространстве. Чтобы снизить размерность, рассмотрим некоторые сечения, а точнее линии уровня температурного поля в двух характерных сечениях рассматриваемого слоя – $x=0$ (рис. 11 и 12) и $y=0$ (рис. 13). Как уже упоминалось выше, градиент $T_1(Z)$ не допускает расслоений, а у градиента $T_2(Z)$ может быть не более одного нуля на интервале $(0,1)$.

На рис. 11–12 четко видно, что изменение свойств температурного градиента T_2 (т. е. появление у него критической точки) качественным образом меняет распределение температуры по рассматриваемому сечению $x=0$. Прежде всего линии уровня меняют форму. Кроме того, пропадает ярко выраженная центральная зона, позволяющая разделить линии уровня на четыре группы в соответствии с их локализацией в сечении (рис. 11); линии уровня становятся качественно подобными, все сечение $x=0$ заполнено однотипными кривыми (рис. 12).

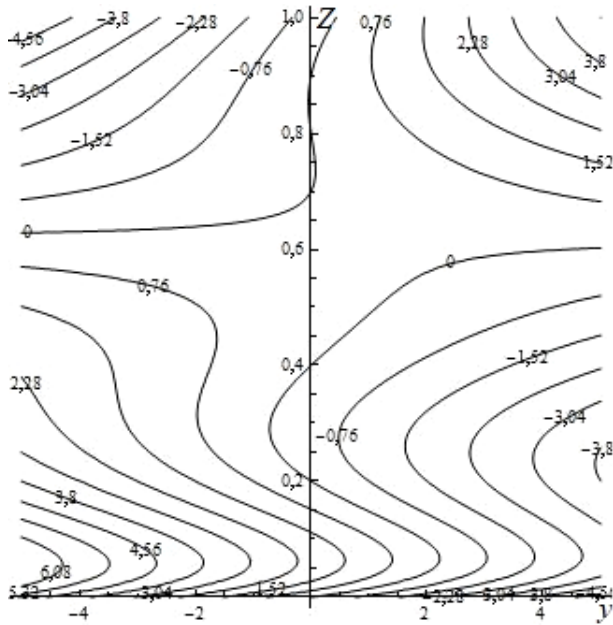


Рис. 11. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

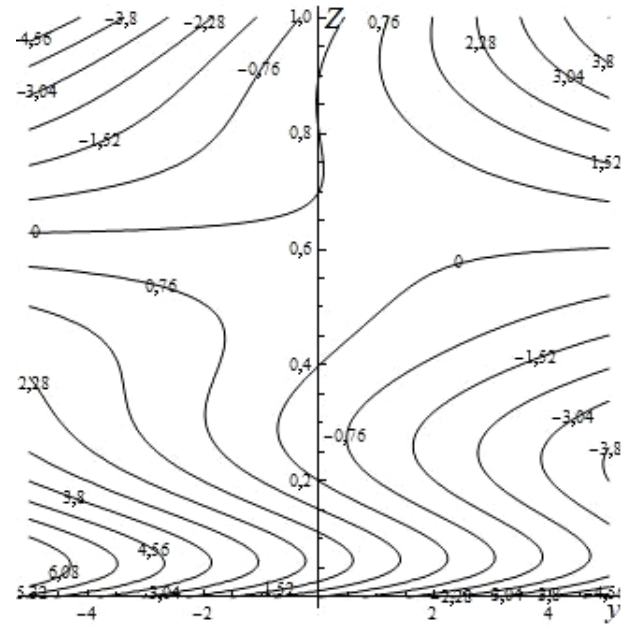


Рис. 12. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна)

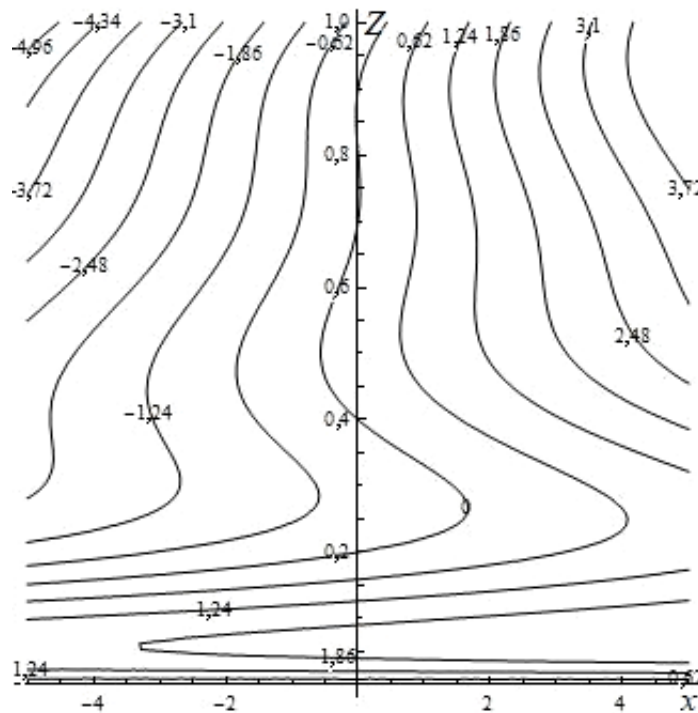


Рис. 13. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = 0$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек)

На рис. 14–17 представлено изменение распределения температурного поля при переходе от сечения $x = -0,7$ к сечению $x = 0,7$ при отсутствии критических точек у градиента T_2 ; на рис. 18–21 – при наличии одной критической точки у градиента T_2 .

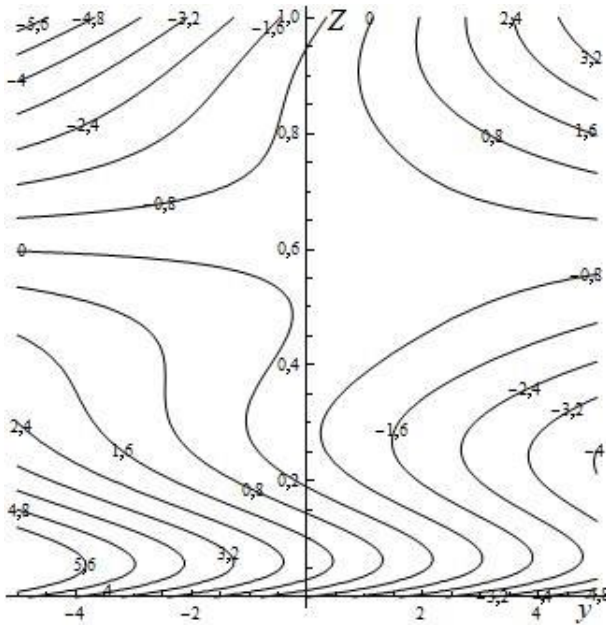


Рис. 14. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = -0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

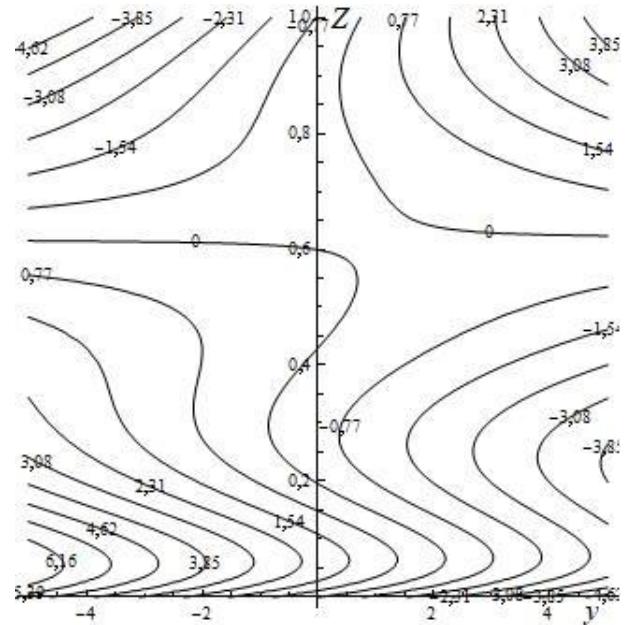


Рис. 15. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = -0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

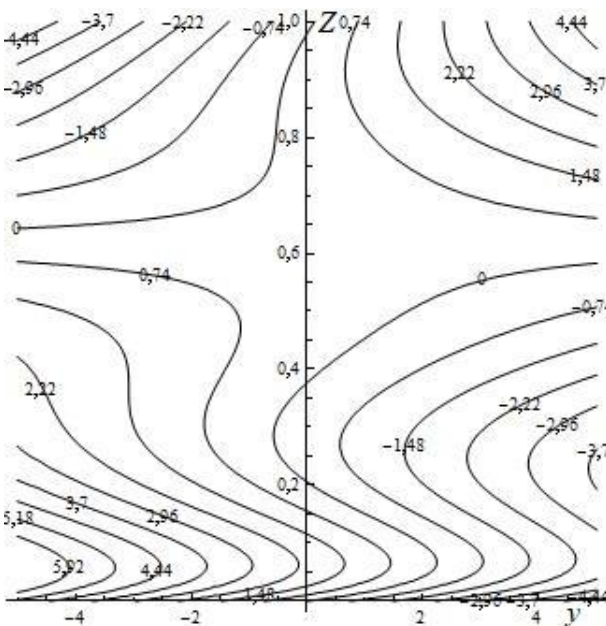


Рис. 16. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

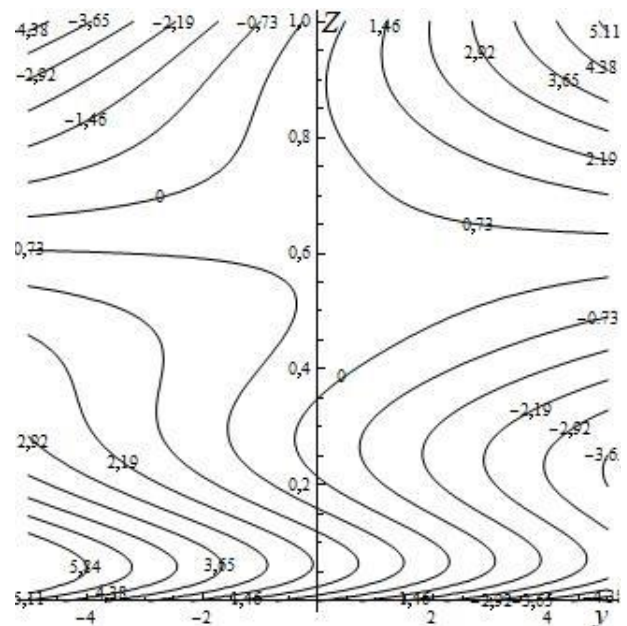


Рис. 17. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

Из рис. 14–17 следует, что обнаруженная на рис. 11 центральная зона не пропадает при переходе от сечения к сечению вдоль оси Ox . Она несколько деформируется, но тем не менее также позволяет разделять сечение на четыре подобласти, в каждой из которых линии уровня имеют подобную форму.

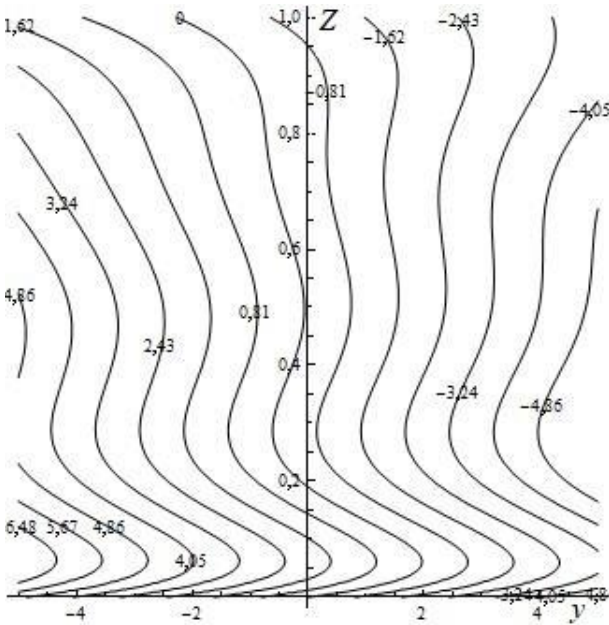


Рис. 18. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = -0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

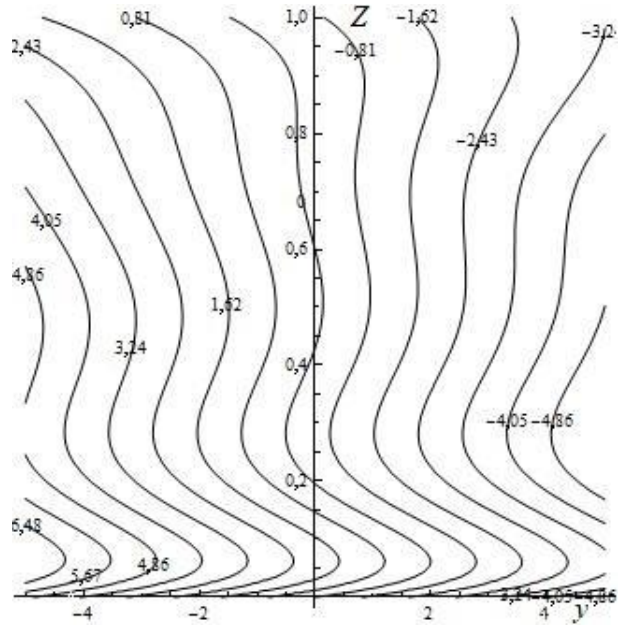


Рис. 19. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = -0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

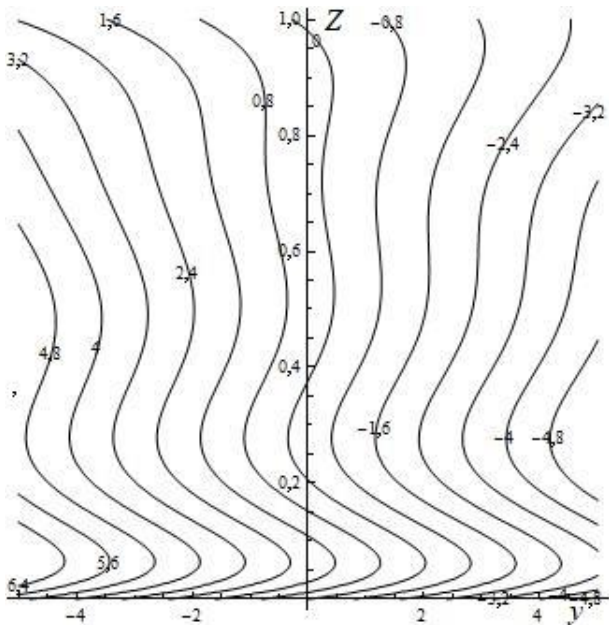


Рис. 20. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

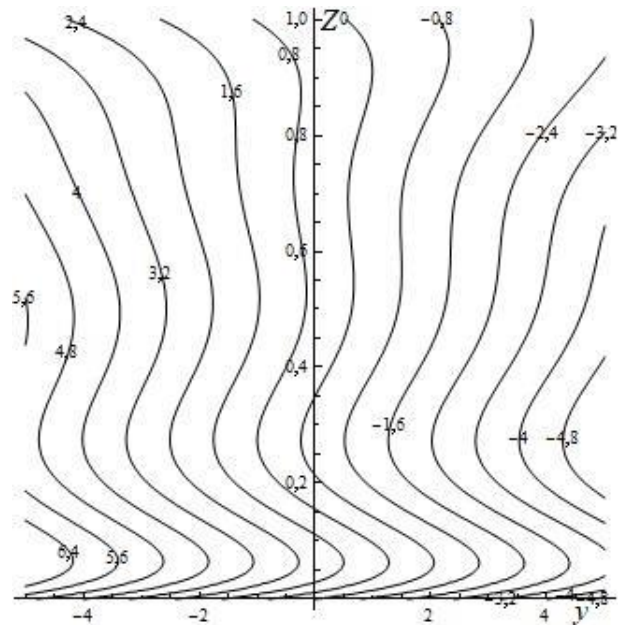


Рис. 21. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $x = 0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

Рис. 12, 18–21 демонстрируют качественное сохранение формы линий уровня и их движение по профилю при смене сечений.

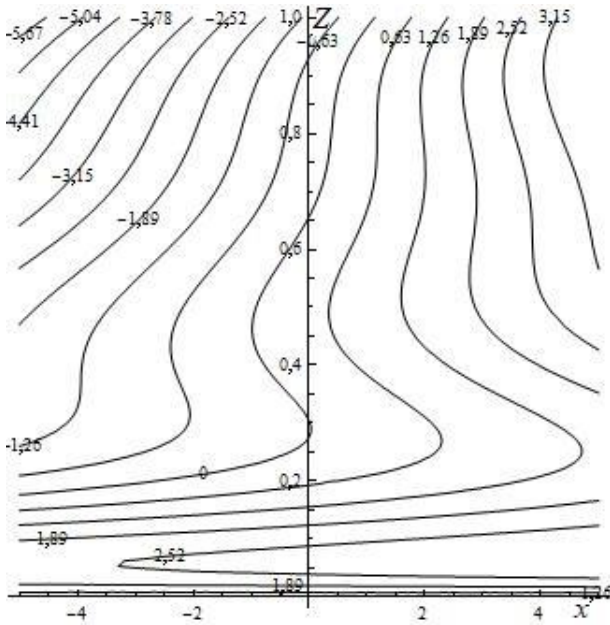


Рис. 22. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = -0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

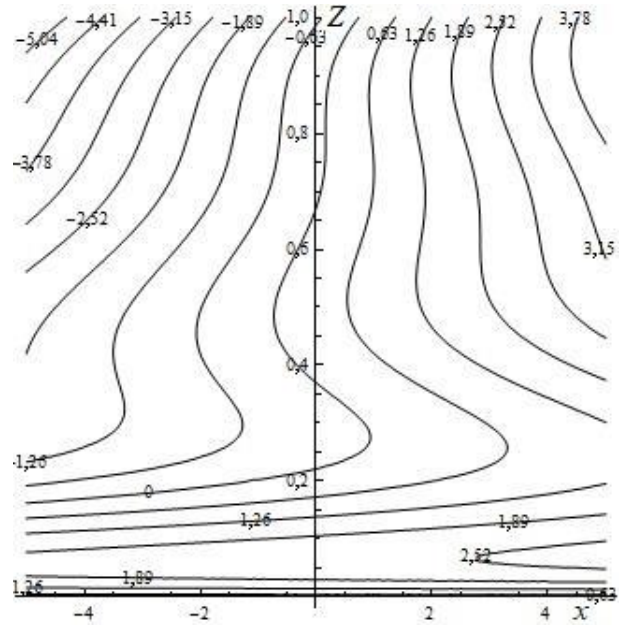


Рис. 23. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = -0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

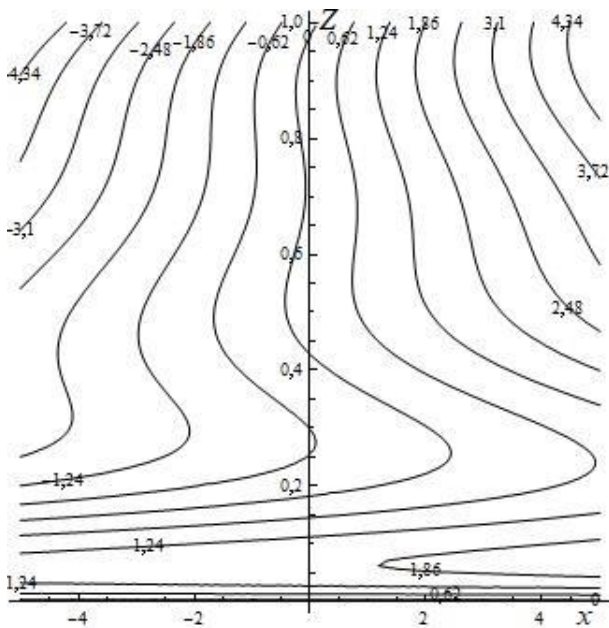


Рис. 24. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = 0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

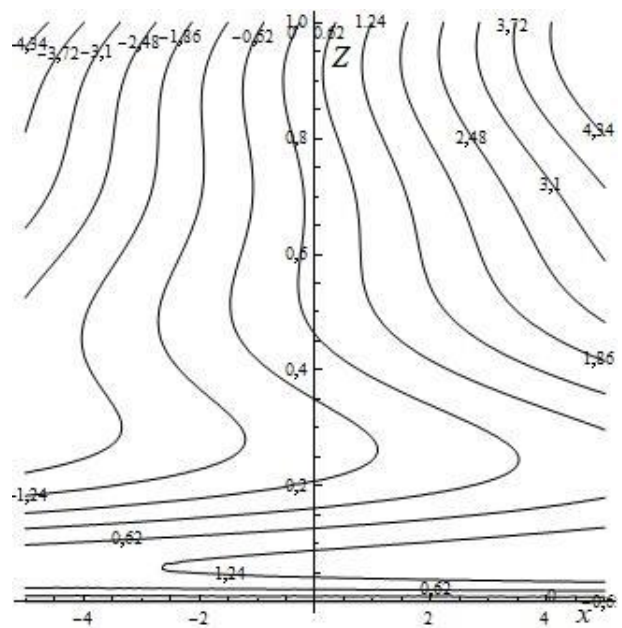


Рис. 25. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = 0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 их нет)

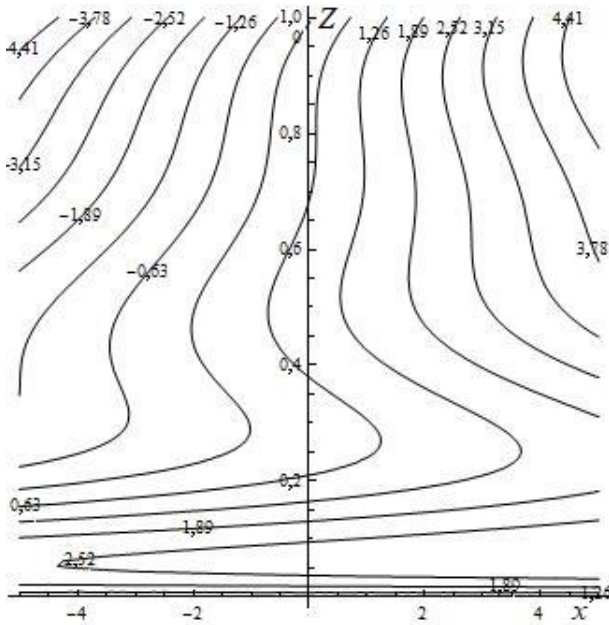


Рис. 26. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = -0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

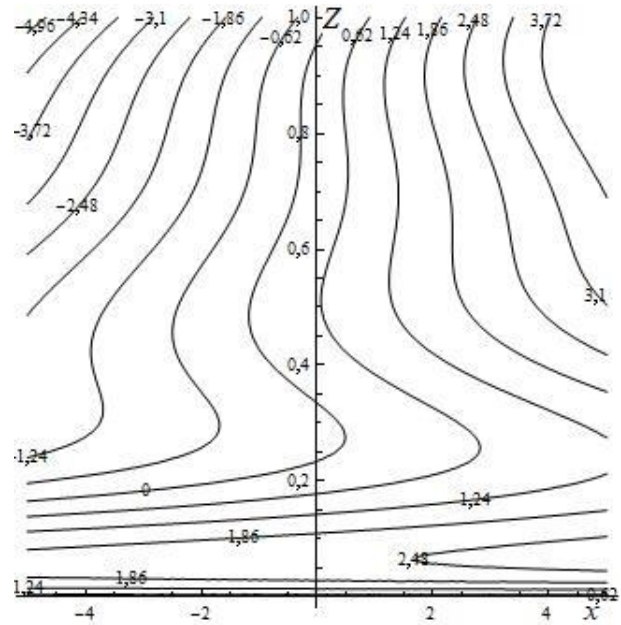


Рис. 27. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = -0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

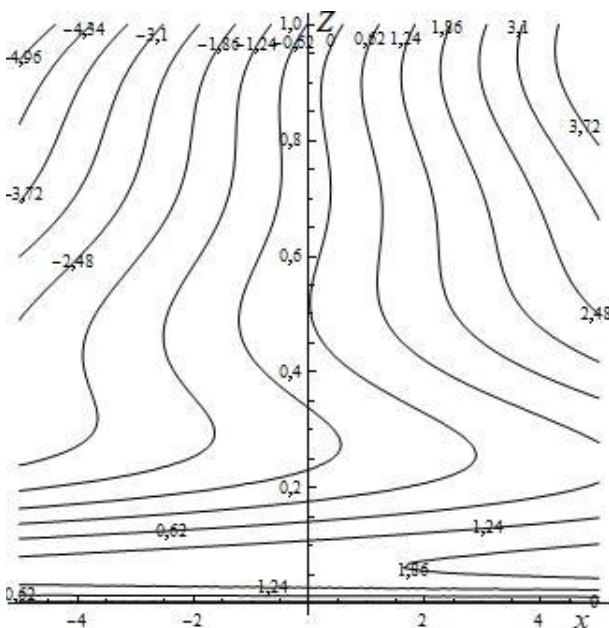


Рис. 28. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = 0,3$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

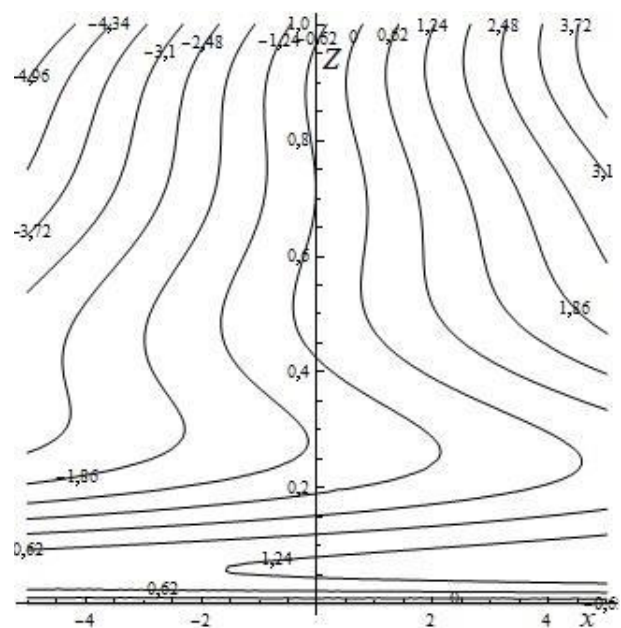


Рис. 29. Распределение линий уровня температурного поля в сечении $y = 0,7$ (у фоновой температуры T_0 пять критических точек, у градиента T_2 – одна критическая точка)

Аналогично изменение распределения температуры при переходе от сечения $y = -0,7$ к сечению $y = 0,7$ при отсутствии критических точек у градиента T_2 приведено на рис. 22–25; на рис. 26–29 – при наличии одной критической точки у градиента T_2 .

Сравнение рис. 22–25 и рис. 26–27 показывает, что линии уровня имеют качественно подобную форму и представленные профили отличаются только распределением значений поля температуры по этим линиям уровня. Из этого следует, что при данном сочетании управляющих параметров вклад градиента T_1 превалирует.

Непостоянство кривизны линий уровня в рассмотренных сечениях также подчеркивает факт существенно нелинейного характера распределения температуры в исследуемом слое. Отдельно отметим, что в случаях, когда термокапиллярный эффект вырождается, структура температурного поля становится несколько более простой, но также отражает нелинейность распределения температурного поля.

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние термокапиллярного эффекта на одной из границ слоя вязкой несжимаемой жидкости на свойства слоистых крупномасштабных течений, индуцированных градиентами температуры. Для выбранных краевых условий было получено точное решение системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска. Внимание в статье уделено температурному полю. Для полученного решения, описывающего изменение температуры, было показано, что соответствующая поверхность в четырехмерном фазовом пространстве не имеет точек экстремума. Кроме того, были исследованы на предмет возможных расслоений все компоненты температурного поля. Было показано, что один из градиентов температуры ни при каких условиях не обращается в нуль внутри исследуемого слоя жидкости, а для остальных компонент при некоторых условиях найдется толщина слоя жидкости, при которой в слое появляются точки, при переходе через которые эти компоненты меняют знак на противоположный. Показано, что такие точки могут быть не единственными.

Литература

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 532 с.
2. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents // *Ark. Mat. Astron. Fys.* – 1905. – Vol. 2, no. 11. – P. 1–52.
3. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dingler's Politech. J.* – 1911. – Vol. 326. – P. 321–324.
4. Ekman V. W. Uber Horizontazirkulation bei winder-reugten Meeresströmungen // *Arkiv Mat., Astr., Phys.* – 1923. – Vol. 17, no. 26. – P. 1–74.
5. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics.* – New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1987. – 710 p.
6. Haeusser T. M., Leibovich S. Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer // *J. Fluid Mech.* – 2003. – Vol. 479. – P. 125–144. – DOI: 10.1017/S0022112002003415.
7. Schwarz K. G. Stability of thermocapillary advective flow in a slowly rotating liquid layer under microgravity conditions // *Fluid Dynamics.* – 2012. – Vol. 47, iss. 1. – P. 37–49. – DOI: 10.1134/S001546281201005X.
8. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1991. – Vol. 32, no. 2. – P. 189–194.

9. Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Y. Ekman Convective Layer Flow of a Viscous Incompressible Fluid // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. – 2018. – Vol. 54, no. 2. – P. 189–195. – DOI: 10.1134/S0001433818020081.
10. Крюков Н. Д., Шматков В. А. Обзор исследований поверхностных течений, генерируемых ветром // *Евразийский союз ученых*. – 2015. – № 6–2 (15). – С. 109–113.
11. Шварц К. Г. Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса, описывающем неизотермическое крупномасштабное течение во вращающемся слое жидкости со свободной верхней границей // *Вестник пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. – 2016. – Вып. 2 (33). – С. 118–124.
12. Shvarts K. G. Exact solution of the Navier–Stokes equation describing nonisothermal largescale flows in a rotating layer of liquid with free upper surface // *J. Math. Sci.* – 2018. – Vol. 230, no. 5. – P. 813–817. – DOI: 10.1007/s10958-018-3796-y.
13. Brown R. A. *Analytical Methods in Planetary Boundary-Layer Modelling*. – Hilger, 1974.
14. Welander P. The thermocline problem // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. – 1971. – Vol. 270. – P. 415–421. – DOI: 10.1098/rsta.1971.0081.
15. Chefranov S. G. Cyclone–anticyclone vortex asymmetry mechanism and linear Ekman friction // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2016. – Vol. 122, no. 4. – P. 759–768. – DOI: 10.1134/S1063776116040038.
16. Riabouchinsky D. Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquide // *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.* – 1924. – Vol. 179. – P. 1133–1136.
17. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. – Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2007.
18. Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае // *ПМТФ*. – 1960. – № 1. – С. 83–90.
19. Атлас осесимметричных кавитационных течений типа Рябушинского / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – Новосибирск, 1968. – Вып. 1.
20. Гузевский Л. Г. Осесимметричные задачи обтекания со свободными границами // *Исследования по развитой кавитации : сб.* – Новосибирск, СО АН СССР, Ин-т теплофизики, 1976.
21. Aristov S. N., Knyazev D. V. Viscous fluid flow between moving parallel plates // *Fluid Dynamics*. – 2012. – Vol. 47, iss. 4. – P. 476–482. – DOI: 10.1134/S0015462812040060.
22. Petrov A. G. Exact solution of the Navier-Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2012. – Vol. 53, no. 5. – P. 642–646. – DOI: 10.1134/S0021894412050021.
23. Власова С. С., Просвирыков Е. Ю. Плоская конвекция вязкой несжимаемой жидкости при заданной теплоотдаче на свободной границе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 567–577. – DOI: 10.14498/vsgtu1483.
24. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*. – 2013. – 3 (32). – С. 110–118. – DOI: 10.14498/vsgtu1205.
25. Aristov S. N., Privalova V., Prosviryakov E. Y. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2016. – Vol. 12, no. 2. – P. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.

26. Fomin A. A., Fomina L. N. On the solution of fluid flow and heat transfer problem in a 2D channel with backward-facing step // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2017. – Vol. 21, no. 2. – P. 362–375. – DOI: 10.14498/vsgtu1545.
27. Shtern V. Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 469 p. – DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
28. Stuart J. T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // Journal of the Aerospace Sciences. – 1959. – Vol. 26, no. 2. – P. 124–125. DOI: 10.2514/8.7963.
29. Dorrepaal J. M. An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes nonorthogonal stagnation-point flow in two dimensions // Journal of Fluid Mechanics. – 1986. – Vol. 163, no. 1. – P. 141–147. – DOI: 10.1017/s0022112086002240.
30. Riesco-Chueca P., De la Mora J. F. Brownian motion far from equilibrium: a hypersonic approach // Journal of Fluid Mechanics – 1990. – Vol. 214. – P. 639–663. – DOI: 10.1017/S0022112090000301.
31. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, iss. 5. – P. 581–587. – DOI: 10.1134/S001546281605001X.
32. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Слоистая конвекция Бенара-Марангони при теплообмене по закону Ньютона-Рихмана // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8, вып. 6. – С. 927–940.
33. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y., Spevak L. F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid // Computational Continuum Mechanics. – 2015. – Vol. 8, no. 4. – P. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
34. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 21, no. 1. – P. 180–196. – DOI: 10.14498/vsgtu1527.
35. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered large-scale convection induced by tangential stresses specified on the free boundary of a fluid layer // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 208, conf. 1. – DOI: 10.1088/1757-899X/208/1/012010.
36. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2017. – Iss. 4. – P. 16–31. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.016-031. – URL: http://dream-journal.org/DREAM_Issue_4_2017_Burmasheva_N.V._et_al._016_031.pdf
37. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1915, iss. 1. – DOI: 10.1063/1.5017353.
38. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Самарск. гос. техн. унив. Сер. физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, №. 4. – С. 736–751. – DOI: 10.14498/vsgtu1568.
39. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyandin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical

- Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, no. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. – Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
41. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1966. – Vol. 7, no. 3. – P. 43.
42. Napolitano L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible // Acta Astronautica. – 1980. – Vol. 7, no. 4. – P. 461–478.
43. Пухначёв В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. АлтГУ. – 2011. – № 69 (1/2). – С. 62–69.
44. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – № 2. – С. 68–79.
45. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. On laminar flows of planar free convection // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2013. – Vol. 9, no. 4. – P. 651–657. – DOI: 10.20537/nd1304004.
46. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynamics. – 2014. – Vol. 49, iss. 4. – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
47. Bratsun D. A., Vyatkin V. A., Mukhamatullin A. R. On exact nonstationary solutions of equations of vibrational convection // Computational Continuum Mechanics. – 2017. – Vol. 10, no. 4. – P. 433–444. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35.
48. Шварц К. Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82, № 1. – С. 25–30.
49. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48, iss. 3. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.
50. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 32–41.
51. Rafiq Sh., Nawaz M., Mustahsan M. Casson Fluid Flow due to Non-Coaxial Rotation of a Porous Disk and the Fluid at Infinity Through a Porous Medium // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – Vol. 59, iss. 4. – P. 601–607. – DOI: 10.1134/S0021894418040053.
52. Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: препринт. – Красноярск, 2010. – № 1–10.
53. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1966. – Vol. 7, no. 3. – P. 43–44.
54. Pukhnachev V. V. Group-theoretical methods in the convection problems // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences / ed. by M. D. Todorov and C. I. Christov. – American Institute of Physics, CP 1404, Melville, NY, 2011. – P. 31–42.
55. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1989. – Vol. 30, iss. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
56. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2016. – Vol. 57, no. 1. – P. 188–194. – DOI: 10.1134/S0021894416010211.

57. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theor. Found. Chem. Eng.* – 2016. – Vol. 50, no. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
58. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1991. – Vol. 32, no. 2. – P. 189–194. – DOI: 10.1007/BF00858033.
59. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Пермский гос. ун-т, 2006. – 155 с.
60. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : Вятский гос. ун-т., 2011. – 207 с.
61. Ингель Л. Х., Аристов С. Н. Класс точных решений нелинейных задач о термических циркуляциях, связанных с объемным тепловыделением в атмосфере // *Труды института экспериментальной метеорологии.* – 1996. – № 27 (162). – С. 142–157.
62. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* – 2013. – Vol. 9, no. 4. – P. 651–657. – DOI: 10.20537/nd1304004.
63. *Mathematical Models of Convection* / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin, Boston : De Gryuter Publ., 2012. – 417 p.
64. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // *ПММ.* – 2018. – Т. 82, вып. 2. – С. 219–260.
65. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании тепловыделения в слоистом течении вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // *Вестник кибернетики.* – 2017. – № 4 (28). – С. 56–61.
66. *Механика жидкости и газа. Избранное* / под общей ред. А. Н. Крайко; ред.-сост. А. Н. Крайко, А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов – М. : Физматлит, 2013. – 752 с.
67. Homogeneous condensation in turbulent submerged isobaric jets / A. B. Vatazhin, A. Yu. Klimenko, A. B. Lebedev, A. A. Sorokin // *Fluid Dynamics.* – 1988. – Vol. 23, iss. 2. – P. 194–203. – DOI: 10.1007/BF01051887.
68. Vasil'kov A. P. Calculation of a turbulent two-phase isobaric stream // *Fluid Dynamics.* – 1976. – Vol. 11, iss. 5. – P. 699–704. – DOI: 10.1007/BF01012960.
69. Shmiglevskiy Yu. D. On isobaric plane flows of a viscous incompressible fluid // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 1985. – Vol. 25, iss. 6. – P. 191–193. – DOI: 10.1016/0041-5553(85)90030-8.
70. Шмыглевский Ю. Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. – М. : УРСС, 1999. – 232 с.
71. Koterov V. N., Shmiglevskiy Yu. D., Scheprov A. V. A survey of analytical studies of steady viscous incompressible flows (2000–2004) // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2005. – Vol. 45, no. 5. – P. 867–888.
72. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Inhomogeneous Couette flow // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* – 2014. – Vol. 10, no. 2. – P. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.
73. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Stokes waves in vortical fluid // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2014. – Vol. 10, no. 3. – P. 309–318. – DOI: 10.20537/nd1403005.
74. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid // *Russian Aeronautics (IzVUZ).* – 2015. – Vol. 58, no. 4. – P. 413–418. – DOI: 10.3103/S1068799815040091.
75. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Unsteady layered vortical fluid flows // *Fluid Dynamics.* – 2016. – Vol. 51, no. 2. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.

76. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. Chem. Eng. – 2009. – Vol. 43, no. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
77. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. Instability of a system of horizontal layers of immiscible fluids heated from above // Fluid Dynamics. – 1980. – Vol. 15, iss. 6. – P. 816–822. – DOI: 10.1007/BF01096629.
78. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М. : Физматлит, 2001. – 616 с.
79. Кострикин А. И. Введение в алгебру. – Москва : Физматлит, 2004. – Ч. 1 : Основы алгебры. – 272 с.

Received: 13.09.2018

Revised: 18.01.2019



Accepted: 15.02.2019

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.043-054

EXPERIENCE OF APPLYING SHOT-TERM INTERMEDIATE ANNEALS IN BACK-PRESSURE EQUAL-CHANNEL ANGULAR PRESSING OF ALUMINUM ALLOYS

V. A. Andreyachshenko*

*Ekibastuz Technical and Engineering Institute Named After Academician K. Satpayev,
54 A Energetikov St. Ekibastuz, 141200, Kazakhstan*

 <https://orcid.org/0000-0001-6933-8163>  Vi-ta.z@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: Vi-ta.z@mail.ru

Address for correspondence: 54 "A" Energetikov St., 141200, Ekibastuz, Kazakhstan
Tel.: +7 (701) 396 29 94

The influence of severe plastic deformation on hypoeutectic silumin is studied. A positive effect of equal-channel angular pressing with back pressure on the mechanical properties of the AL9 alloy of the Al-Si-Mn-Fe system has been found experimentally. The evolution of the microstructure in the process of deformation is estimated. The effect of short-term intermediate anneals on the microstructure, mechanical properties and ultimate plasticity of the alloy is studied. As a result of additional annealing, significant microstructural changes do not succeed, but the coagulation of excess phases proceeds very intensively, which causes a 20 % increase in strength after the second deformation cycle. Fractographic studies demonstrate the presence of coagulated particles on the samples deformed with the use of short-term intermediate anneals. Limiting plasticity also rises to 0.2 as compared to 0.12 for the samples treated with only ECAP-BP.

Keywords: hypoeutectic silumins, AL9, Al-Si-Mn-Fe, equal-channel angular pressing with back pressure.

References

1. Senatorova O.G., Grushko O.E., Tkachenko E.A., Antipov V.V., Molostova I.I., Sidel'nikov V.V., Legoshina S.F. New high-strength aluminum alloys and materials. *Tekhnol. Legk. Splavov*, 2007, no. 2, pp. 17–24. (In Russian).
2. Mironov A.E. Kotova E.G. Development of new marks of welded aluminum antifriction alloys for exchange the bronze in joints of friction. *Izv. Samarsk. Nauch. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 13, pp. 1136–1140. (In Russian).
3. Klochkova Yu.Yu., Grushko O.E., Lantsova L.P., Burlyaeva I.P., Ovsyannikov B.V. The assimilation for industrial production of semi-finished products from advanced aluminum–lithium alloy V-1469. *Aviats. Mater. Technol.*, 2011, no. 1, pp. 8–12. (In Russian).
4. Docenko Yu.V., Seliverstov V.Yu. Features of solidification casting of aluminum alloys with increasing pressure and modification. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2012, no. 1 (5), pp. 18–22. (In Russian).
5. Selivanov A.A., Antipov K.V., Astashkin A.I., Ovsyannikov B.V. Optimization of artificial aging of forged and rolled semi-finished products from heat-resistant aluminum alloy AK4-1h. *Trudy VIAM*, 2018, no. 4 (64), pp. 9–19. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-4-9-19. (In Russian).
6. Marukovich E.I., Stetsenko V.Y., Gutev A.P. Manufacture and use of silumin with globular silicon. *Litiyo i Metallurgiya (Foundry Production and Metallurgy)*, 2017, no. 2 (87), pp. 15–19. DOI: 10.21122/1683-6065-2017-2-15-19. (In Russian).

7. Prudnikov A.N., Popova M.V., Prudnikov V.A. Effect of deformation on the structure and properties of silumin. *Bulletin of the Siberian State Industrial University*, 2017, no. 3 (21), pp. 11–17. (In Russian).
8. Bogatov A.A., Nukhov D.Sh., Leshev I.V. Development of innovative processes metal forming through intensive alternating strain. *Processing of Solid and Laminate Materials*, 2016, no. 1 (44), pp. 35–43. (In Russian).
9. Spuskanyuk V.Z., Berezina A.L., Dubodelov V.I., Davydenko O. A., Fixssen V. N., Sliva K.I., Monastyrskaya T.O., Gangalo A.N. Microstructure and mechanical properties of the hyper-eutectic Al-Si alloy after several plastic deformation. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, 2014, vol. 36, no. 5, pp. 649–660. DOI: 10.15407/mfint.36.05.0649. (In Russian).
10. Bochvar N.R., Rohlin L.L., Tarytina I.E. Combined effect of sever plastic deformation and cold rolling on mechanical properties of the Al-Mg₂Si system alloys. *Perspektivnye Materialy*, 2018, no. 7, pp. 49–56. DOI: 10.30791/1028-978x-2018-7-49-56. (In Russian).
11. Avtokratova E.V., Sitdikov O.Sh., Markushev M.V. Superplasticity of Al-Mg-Sc(Zr) alloys, subjected to intense plastic deformation. *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. 33, no. 1, pp. 19–28. DOI: 10.18720/MPM.3312017_3. (In Russian).
12. Polishchuk S.S., Berezina A.L., Davidenko A.A., Spuskanyuk V.Z., Fixsen V.N., Yashchenko A.V., Burkhovetskii V.V. Structure and Properties of A356-AlCuFe Composite Obtained Using Electromagnetic Agitation. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, 2014, vol. 36, no. 9, pp. 1189–1205. DOI: 10.15407/mfint.36.09.1189. (In Russian).
13. Brodova I.G., Petrova A.N., Razorenov S.V., Shorohov E.V. Resistance of submicro-crystalline aluminum alloys to high-rate deformation and fracture after dynamic channel angular pressing. *The Physics of Metals and Metallography*, 2015, vol. 116, iss. 5, pp. 519–526. DOI: 10.1134/S0031918X15050051.
14. Kocich R., Fiala J., Szurman I., Macháčková A., Mihola M. Twist-channel angular pressing: effect of the strain path on grain refinement and mechanical properties of copper. *Journal of Materials Science*, 2011, vol. 46, no. 24, pp. 7865–7876. DOI: 10.1007/s10853-011-5768-1.
15. Markushev M.V., Sloboda V.N., Kaibyshev O.A. Method for deformation working of materials and apparatus for performing the same. RF Patent 2146571, 2000. (In Russian).
16. Mckenzie P.W.J., Lapovok R. ECAP with back pressure for optimum strength and ductility in aluminium alloy 6016. Part 2: Mechanical properties and texture. *Acta Materialia*, 2010, vol. 58 (9), pp. 3212–3222. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.037.
17. Medvedev Alexander E., Lapovok Rimma, Koch Eric, Höppel Heinz Werner, Göken Mathias. Optimisation of interface formation by shear inclination: Example of aluminium-copper hybrid produced by ECAP with back-pressure. *Materials & Design*, 2018, vol. 146, pp. 142–151. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.03.021.
18. Naizabekov A.B., Andreyashchenko V.A. Evaluation of possibility for increase of mechanical characteristics of the Al-Fe-Si-Mn alloy by equal-channel angular pressing. *Metallurgist*, 2013, vol. 57, no. 1–2, pp. 159–163. DOI: 10.1007/s11015-013-9706-0.
19. Cepeda-Jiménez C.M., García-Infanta J.M., Zhilyaev A.P., Ruano O.A., Carreno F. Influence of the supersaturated silicon solid solution concentration on the effectiveness of severe plastic deformation processing in Al–7wt.% Si casting alloy. *Materials Science and Engineering: A*, 2011, vol. 528, pp 7938–7947. DOI: 10.1016/j.msea.2011.07.016.
20. Mochalov N.A., Galkin A.M., Mochalov S.I., Parfenov D.Yu. *Plastometric Studies of Metals*. Moscow, Internet Engineering Publ., 2003, 318 p. (In Russian).
21. Cepeda-Jimenez C.M., Orozco-Caballero A., Garcia-Infanta J.M., Zhilyaev A.P., Ruano O.A., Carreno F. Assessment of homogeneity of the shear-strain pattern in Al–7wt%Si casting alloy processed by high-pressure torsion. *Materials Science and Engineering A*, 2014, vol. 597, pp. 102–110. DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.072.

22. Andreyachshenko V., Naizabekov A. The technology of equal channel angle backpressure extrusion for deformation iron and aluminium alloys. In: *Proceedings Book of 3rd International Conference NANOCON*, Czech Republic, Tanger Ltd., 2011, pp. 246–252.
23. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al-Si-Fe-Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure. In: *Proceedings of 21st International Conference on Metallurgy and Materials Metal-2012*, Brno Czech Republic, 2012, pp. 391–395.
24. Naizabekov A., Andreyachshenko V. Microstructural and mechanical characteristics of the Al-Fe-Si-Mn alloy subjected to equal-channel angular pressing. In: *Sbornik trudov X Mezhdunarodnoy konferentsii «Perspektivnye tekhnologii, oborudovanie i analiticheskie sistemy dlya materialovedeniya i nanomaterialov»* [Transactions of the 10th International Conference on Advanced Technologies, Equipment and analytical Systems for Materials Science and Nanomaterials]. Almaty, Kazakhstan, 2013, pp. 114–122. (In Russian).

Подана в журнал: 13.09.2018



УДК 621.771

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.043-054

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОТЖИГОВ ПРИ РАВНОКАНАЛЬНОМ УГЛОВОМ ПРЕССОВАНИИ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

В. А. Андреященко

*Екибастузский инженерно-технический институт им. академика К. Сатпаева,
г. Экибастуз, Казахстан*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0001-6933-8163>  Vi-ta.z@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: Vi-ta.z@mail.ru

Адрес для переписки: 141208, г. Экибастуз, ул. Энергетиков 54 «А», Республика Казахстан

Тел.: +7 (701) 396–29–94

Изучено влияние интенсивной пластической деформации на доэвтектические силумины. Опытным путем установлено положительное влияние равноканального углового прессования с противодавлением на механические свойства сплава системы Al-Si-Mn-Fe типа АЛ9. Оценена эволюция микроструктуры в процессе деформирования. Изучен эффект применения краткосрочных промежуточных отжигов на микроструктуру, механические свойства и предельную пластичность сплава. В результате проведения дополнительных отжигов существенные микроструктурные изменения не успевают реализоваться, однако процесс коагуляции избыточных фаз протекает весьма интенсивно, что вызывает рост прочности в целом на 20 % после второго цикла. Фрактографические исследования демонстрируют присутствие коагулированных частиц на образцах, деформируемых с использованием краткосрочных промежуточных отжигов. Предельная пластичность также повышается до 0,2 в сравнении с образцами, обработанными только РКУПП с противодавлением – 0,12.

Ключевые слова: доэвтектические силумины, АЛ9, Al-Si-Mn-Fe, равноканальное угловое прессование с противодавлением.

1. Введение

В технике алюминиевые сплавы находят все большее и большее распространение. Отчасти это связано с разработкой новых сплавов [1–3], применением модифицирования [4], отработкой режимов производства [5, 6] и т. д. Повышенный интерес к алюминиевым сплавам вызван прежде всего их уникальными свойствами, сочетающими прочность, пластичность, коррозионную стойкость, герметичность, жидкотекучесть, стойкость в различных кислотах и, особенно, малый вес.

Именно за счет этих характеристик алюминиевые сплавы успешно применяются для производства деталей и узлов в космической технике, машиностроении и др. Особенно популярны литейные алюминиевые сплавы типа АЛ9, применяемые для изготовления разнообразных литых деталей машин. Ряд деталей, таких как поршни и др., можно изготавливать как методами литья, так и деформационными методами. В последнем случае литейные алюминиевые сплавы малоприспособны. Однако существует опыт повышения комплекса физико-механических характеристик литейных сплавов методами термомеханической обработки [7]. Кроме того, в качестве упрочняющих деформационных методов хорошо зарекомендовали себя методы, реализующие интенсивные пластические деформации [8–11], одним из которых является равноканальное угловое прессование [12]. При этом помимо классических методов РКУПП также известны их вариации [13], например, Twist-канальное угловое прессование [14], РКУПП

с сужающимся или расширяющимся каналом [15], РКУПП с противодавлением [16], обеспечиваемым вторым пуансоном, движущимся противоположно течению металла [17], РКУПП со ступенью в выходном канале инструмента [18]. Варианты реализации РКУПП направлены, как правило, на устранение растягивающих напряжений, которые образуются в области внутреннего угла при переходе из входного канала в выходной, и на устранение эффекта не полного заполнения выходного канала инструмента, что в свою очередь связано с частичным переходом периферийных слоев материала заготовки с торцевой поверхности на боковую, что вызывает также искажение формы переднего торца заготовки и повышение объема обреза. Эффективность РКУПП для обработки доэвтектических силуминов уже подтверждена [19]. Ранее уже был изучен положительный опыт улучшения литейных алюминиевых сплавов типа АЛ9 методом равноканального углового прессования со ступенью в выходном канале инструмента. Причем обработка велась как в холодном, так и в горячем состояниях. Также выполнен анализ влияния этих обработок на предельную пластичность сплава.

Цель настоящей работы – исследование влияния краткосрочных промежуточных отжигов при реализации РКУПП для повышения ресурса доэвтектического алюминиевого сплава типа АЛ9.

2. Материалы и методы исследования

В качестве материала исследования выбран литейный алюминиевый сплав типа АЛ9 со следующим составом: 4,0 % Si – 1,12 % Mn – 0,5 % Fe – 0,32 % Cu, остальное Al. Все образцы были предварительно отожжены. В дальнейшем для измельчения микроструктуры и улучшения свойств сплава проведено РКУПП в инструменте со ступенью в выходном канале при комнатной температуре. Проведение операции отжига имело две цели: 1) растворение хрупких интерметаллических составляющих и 2) сфероидизация избыточных фаз. Была изучена микроструктура сплава, определены механические свойства при испытании на разрыв. Микроструктура до и после обработки исследована на поперечных микрошлифах на оптическом микроскопе Leica и на просвечивающем электронном микроскопе JEM2100, микрофотографические исследования выполнены на сканирующем электронном микроскопе JSM5910. Механические испытания проводились на крутильно-разрывной машине МИ-40КУ. Первичная диаграмма нагрузка-перемещение переведена в координаты напряжение-деформация. Напряжение определено отношением нагрузки к начальной площади поперечного сечения образцов. Деформации вычислены при помощи соотношения: $\varepsilon = \Delta l / l_0 \cdot 100 \%$. Пластичность в области однородной деформации (до образования шейки) определена из выражения [20] $\Lambda = 1,73 \ln[100/(100 - \delta)]$, где δ – относительное удлинение; предельная пластичность в области неоднородной деформации из выражения: $\Lambda_p = 1,73 \ln[100/(100 - \psi)]$, где ψ – относительное сужение. Суммарная степень деформации при РКУПП определена по методике, приведенной в работе [18].

3. Обсуждение результатов

Характерной предеформационной обработкой доэвтектических силуминов является отжиг с медленным охлаждением в печи. Отожженные образцы сплава имеют высокое содержание коагулированных кремниевых выделений размером до 10 мкм и выделения избыточных фаз размером менее 1 мкм. При исследовании на оптическом микроскопе выделения размером менее 1 мкм плохо выявляются. Наиболее отчетливо такая микроструктура наблюдается на фотографии, полученной при помощи просвечивающей электронной микроскопии (рис. 1). Кремниевые частицы имеют форму неправильных призм со скругленными очертаниями. Интерметаллидные фазы представлены преимущественно игольчатыми железосодержащими частицами и сферическими включениями, содержащими медь и марганец. Высокая концентрация включений не позволяет выявить границы зерен α -твердого

раствора основной матрицы. В общем, данные результаты согласуются с ранее проведенными исследованиями [21].

Отожженные образцы далее были подвергнуты РКУПП при комнатной температуре с количеством циклов деформирования от 1 до 3. Проведение большего количества циклов затруднительно в связи с образованием поперечных трещин и разрывов на образцах. Такое деформационное поведение вызвано прежде всего спецификой микроструктуры. Образцы, имеющие деформационные дефекты, выявляемые невооруженным взглядом, к дальнейшему деформированию не допускаются. На рис. 2 представлено изображение микроструктуры, полученное при помощи оптической микроскопии. На всех образцах наблюдается высокая дисперсность структуры. Увеличение количества циклов деформирования приводит к образованию «квазиэвтектического» рисунка, причем на микрошлифах, полученных без применения промежуточных отжигов, этот эффект заметен более отчетливо.

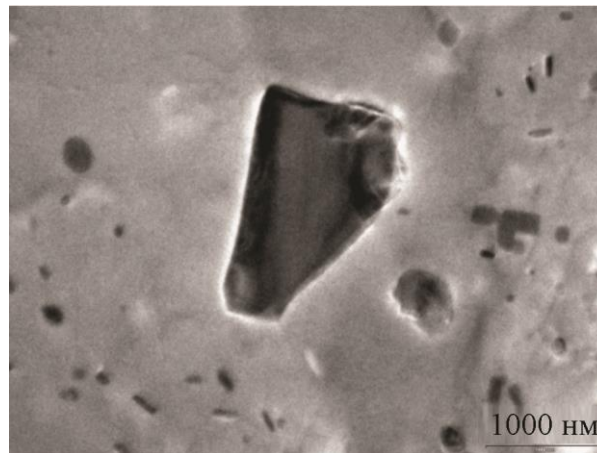


Рис. 1. Микроструктура отожженного образца, ПЭМ

С увеличением количества циклов прочностные характеристики сплава имеют тенденцию к увеличению, однако наблюдается снижение характеристик пластичности (рис. 3). Такая тенденция характерна для материалов, обработанных методами интенсивной пластической деформации [22], в том числе доэвтектических сплавов системы Al-Si-Mn-Fe [23].

С целью повышения ресурса сплава решено использовать кратковременные промежуточные отжиги при температуре 200 °С в течение 5 мин после каждого цикла. Первый промежуточный отжиг осуществлен между первым и вторым циклами деформирования, таким образом, отличия заметны уже после двух циклов деформирования. Использование промежуточных отжигов позволило повысить предел прочности после двух циклов РКУПП до 455 МПа, что превышает режим без отжига более чем на 20 %. Однако это вызвало резкое сокращение относительного удлинения (на 90 %) до величины 11 %. Хотя для рассматриваемого сплава это значение является вполне приемлемым. Как показывают изображения микроструктуры, приведенные на рис. 2, в результате проведения отжигов изменений микроструктуры не происходит. Несмотря на то, что температура соответствует температуре старения, в течение 5 мин интенсивного распада твердого раствора не происходит. Учитывая, что в качестве предварительной обработки использован отжиг, твердый раствор не является пересыщенным, а кратковременный отжиг способствует коагуляции интерметаллидных фаз и частиц кремния.

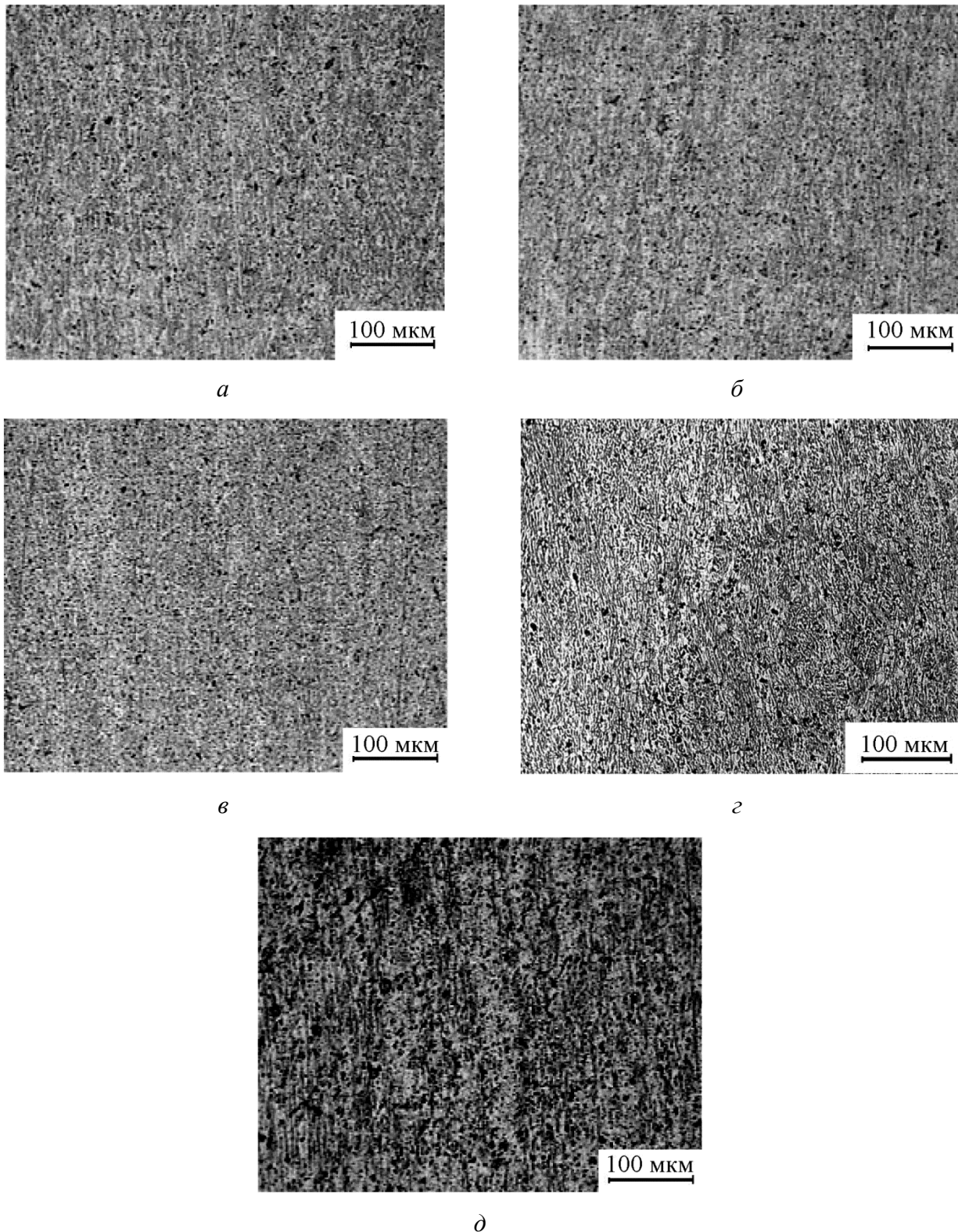


Рис. 2. Микроструктура после РКУПП: *a* – после первого цикла деформирования;
б, в – после второго цикла; *г, д* – после третьего цикла;
в, д – с применением промежуточных отжигов

Снижение временного сопротивления после 3 циклов РКУПП обусловлено наличием микротрещин, объединением их в глобальную трещину и последующим преждевременным разрушением. Как видно, образцы, подвергавшиеся промежуточному отжигу, и после второ-

го и после третьего циклов деформирования, показывают более высокие показатели прочности при сохранении достаточного уровня относительного удлинения, по сравнению с образцами без промежуточных отжигов. Увеличение свойств вызвано частичной коагуляцией включений.

Анализ рельефа поверхностей разрушения образцов после растяжения показал, что на всех образцах после РКУПП без отжига присутствуют следы грубого волокнистого излома, поверхность разрушения расположена в двух и трех плоскостях. Поверхности разрушения образцов, обработанных с применением кратковременных отжигов, содержат сферические (коагулированные) частицы.

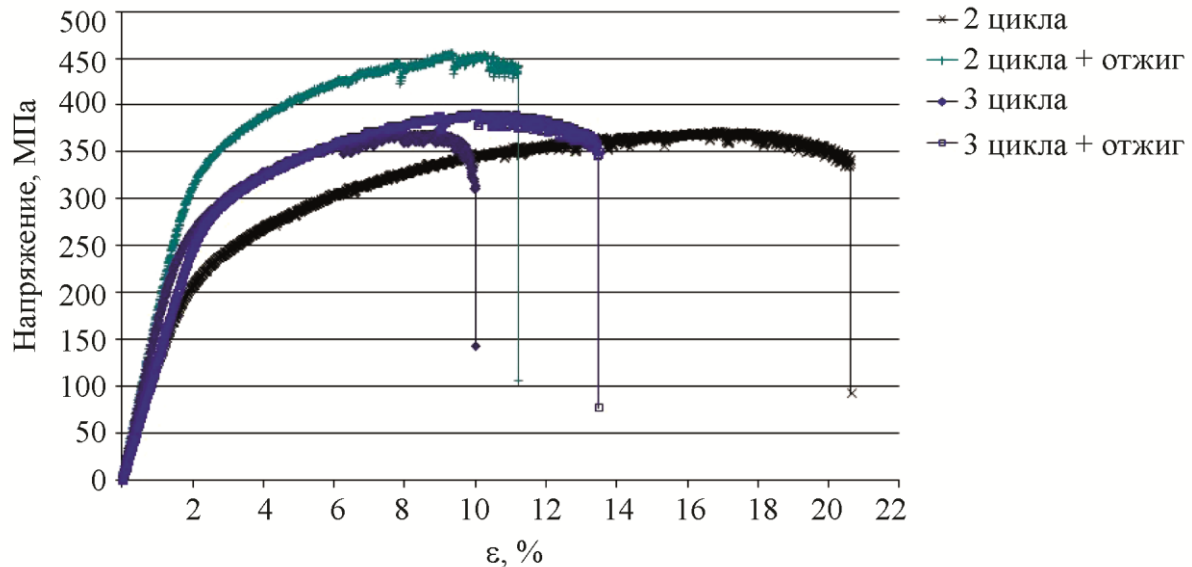


Рис. 3. Механические свойства сплава после РКУПП

При исследовании выявлено, что в результате реализации РКУПП происходит изменение значения пластичности. На рис. 5 приведены диаграммы зависимости Λ_p от степени деформации при РКУПП.

По данным, приведенным на рис. 5, видно, что кривые хорошо аппроксимируются полиномом второго порядка:

в области монотонных деформаций

$$y = -2,0814x^2 + 3,0636x - 0,6499 - R^2 = 1 - \text{РКУПП};$$

$$y = -0,6237x^2 + 0,9276x - 0,0467 - R^2 = 1 - \text{РКУПП} + \text{отжиг};$$

в области немонотонных деформаций

$$y = -0,8498x^2 + 1,1262x - 0,0411 - R^2 = 1 - \text{для } T = 20 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$y = 0,3549x^2 - 0,6568x + 0,4642 - R^2 = 1 - R^2 = 1 - \text{РКУПП} + \text{отжиг}.$$

Появление экстремума на кривых зависимости пластичности от степени деформации связано прежде всего со структурными изменениями, протекающими под влиянием РКУПП [24]. При увеличении степени деформации протекают два процесса, снижающие пластичность: упрочнение развитой дислокационной структурой и охрупчивание вторичными фазами, присутствующими в структуре металла. Существенной локализации деформации при испытании на растяжение не наблюдается.

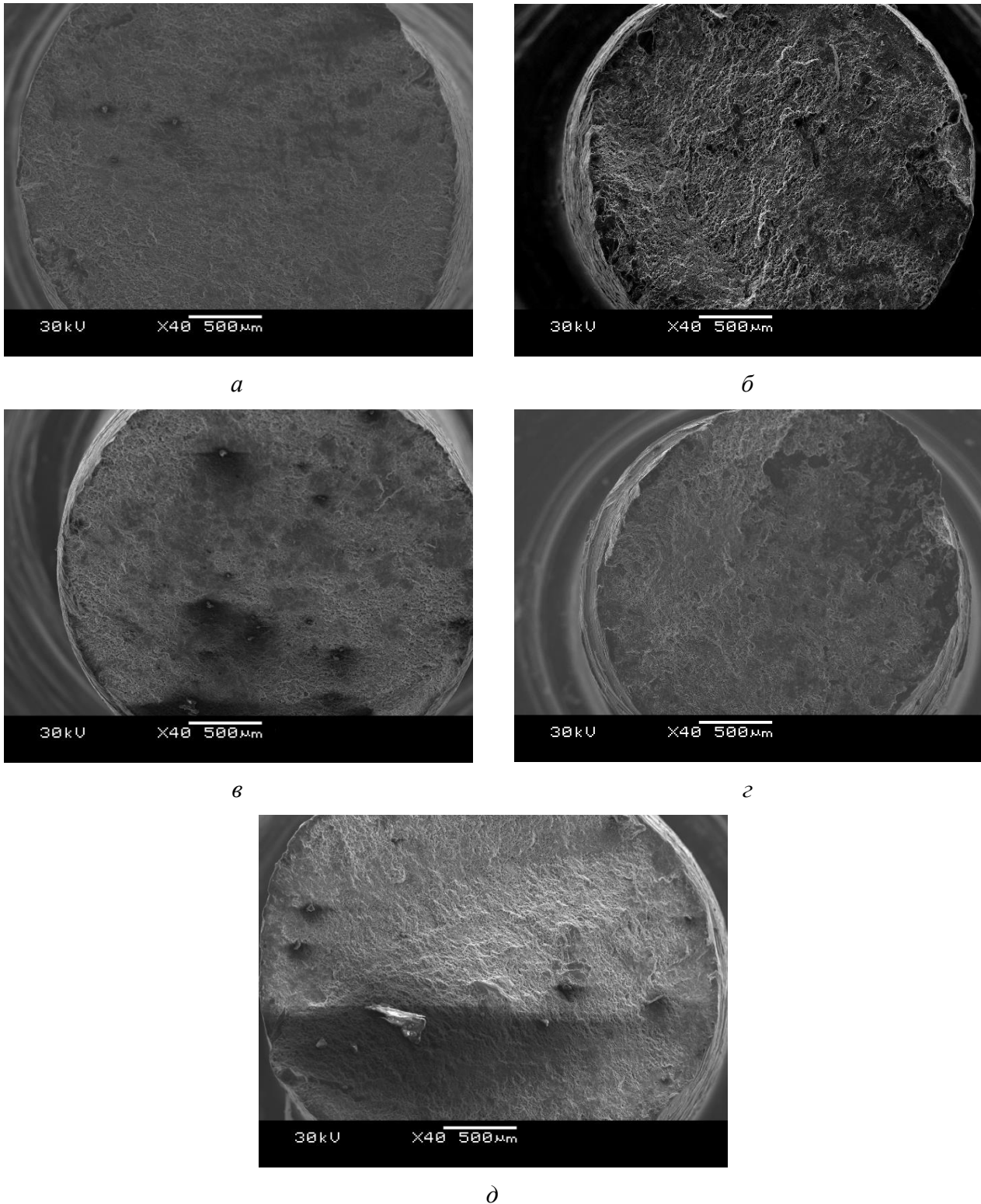


Рис. 4. Микрофрактография образцов после разрыва: *a* – после первого цикла деформирования; *б, в* – после второго цикла; *г, д* – после третьего цикла; *в, д* – с применением промежуточных отжигов

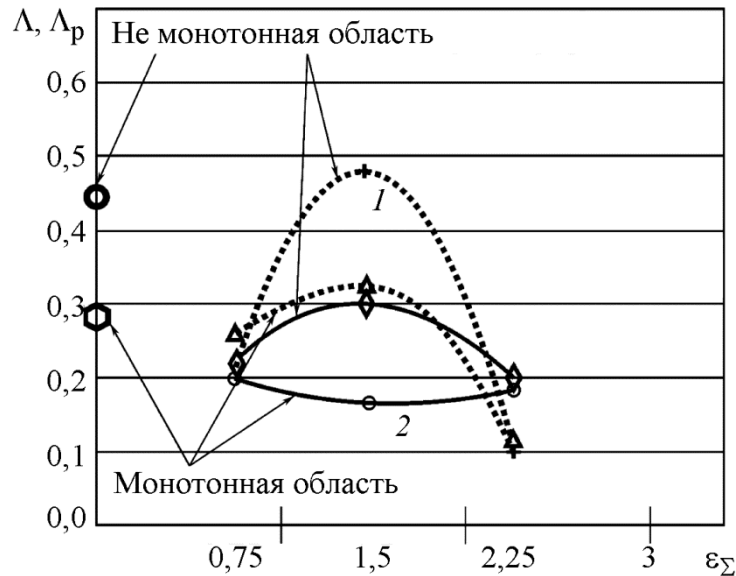


Рис. 5. Влияние суммарной степени деформации на пластичность:
1 – РКУПП; 2 – РКУПП + отжиг

В результате проведения двух циклов деформирования происходит формирование равномерной субультрамелкозернистой микроструктуры, что вызывает появление экстремума на кривых в состоянии после РКУПП и после деформирования с проведением дополнительных промежуточных отжигов. За счет повышения степени деформации происходит разрушение интерметаллидов и кремниевых частиц, зарождение микротрещин, что вызывает снижение пластичности.

В связи с тем, что при испытании на растяжение сплав не проявляет достаточную пластичность, также рассчитана величина Δ в области монотонных деформаций, т.е. до образования шейки. Проведение первого промежуточного отжига вызывает падение пластичности в области монотонной деформации, образование шейки наступает достаточно рано. Благоприятное влияние дополнительных отжигов особо значительно после реализации 3 циклов РКУПП несмотря на провал пластичности после второго цикла РКУПП. Величина Δ_p после обработки ниже исходного значения, что вызвано упрочнением в результате реализации РКУПП. Экстремумы на кривых пластичности в области монотонной деформации совпадают с экстремумами на кривых в области неоднородных деформаций (с образованием шейки).

4. Выводы

Показана целесообразность применения равноканального углового прессования для обработки доэвтектических сплавов. Проведение отжига способствует растворению упрочняющих интерметаллидных фаз и коагуляции кремниевых частиц. Высокая концентрация включений не позволяет выявить границы зерен α -твердого раствора основной матрицы. При реализации РКУПП наблюдается рост прочностных свойств вплоть до 375 МПа, однако после трех циклов деформирования происходит резкое снижение относительного удлинения практически без увеличения прочности.

Проведенные исследования показали эффективность применения краткосрочных промежуточных отжигов при РКУПП при температуре 200 °С в течение 5 мин. В результате такой обработки дальнейший распад твердого раствора не успевает произойти, в связи с тем что твердый раствор не был пересыщен перед обработкой. Кратковременные отжики способствуют коагуляции интерметаллидных включений, первичных и вторичных кремни-

евых частиц. В результате обработки предел прочности после двух циклов РКУПП достигает 455 МПа при относительном остаточном удлинении 11 %. При проведении трех циклов деформирования наблюдается снижение прочности, но при этом значения остаются выше, чем у образцов, деформируемых без применения промежуточных отжига. Предельная пластичность образцов с дополнительными отжигами, также превышает состояние после РКУПП без отжига, 0,2 и 0,12 соответственно.

В целом, с целью сохранения ресурса и улучшения доэвтектического силумина рекомендовано использование РКУПП с промежуточными отжигами с двумя циклами деформирования.

Литература

1. Новые высокопрочные алюминиевые сплавы и материалы / О. Г. Сенаторова, О. Е. Грушко, Е. А. Ткаченко, В. В. Антипов, И. И. Молостова, В. В. Сидельников, С. Ф. Легошина // Технология легких сплавов. – 2007. – № 2. – С. 17–24.
2. Миронов А. Е., Котова Е. Г. Разработка новых марок литейных алюминиевых антифрикционных сплавов для замены бронз в узлах трения // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4–3. – С. 1136–1140.
3. Освоение в промышленном производстве полуфабрикатов из перспективного алюминийлитиевого сплава В-1469 / Ю. Ю. Клочкова, О. Е. Грушко, Л. П. Ланцова, И. П. Бурляева, Б. В. Овсянников // Авиационные материалы и технологии. – 2011. – № 1 (18). – С. 8–12.
4. Доценко Ю. В., Селиверстов В. Ю. Особенности затвердевания отливок из алюминиевых сплавов при нарастающем давлении и модифицировании // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – № 1 (5). – С. 18–22.
5. Оптимизация режимов искусственного старения кованных и катаных полуфабрикатов из жаропрочного алюминиевого сплава АК4-1Ч / А. А. Селиванов, К. В. Антипов, А. И. Асташкин, Б. В. Овсянников // Труды ВИАМ. – 2018. – № 4 (64). – С. 9–19. – DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-4-9-19.
6. Марукович Е. И., Стеценко В. Ю., Гутев А. П. Производство и применение силумина с глобулярным кремнием // Литье и металлургия. – 2017. – № 2 (87). – С. 15–19. – DOI: 10.21122/1683-6065-2017-2-15-19.
7. Прудников А. Н., Попова М. В., Прудников В. А. Воздействие деформации на структуру и свойства силуминов // Вестник Сибирского государственного индустриального университета. – 2017. – № 3 (21). – С. 11–17.
8. Богатов А. А., Нухов Д. Ш., Лещев И. В. Разработка инновационных процессов обработки металлов давлением на основе интенсивной знакопеременной деформации // Обработка сплошных и слоистых материалов. – 2016. – № 1 (44). – С. 35–43.
9. Микроструктура и механические свойства заэвтектического сплава Al—Si после интенсивной пластической деформации / В. З. Спусканюк, А. Л. Березина, В. И. Дубоделов, А. А. Давиденко, В. Н. Фикссен, К. И. Слива, Т. А. Монастырская, А. Н. Гангало // Металлофизика и новейшие технологии. – 2014. – Т. 36, № 5. – С. 649–660.
10. Бочвар Н. Р., Рохлин Л. Л., Тарытина И. Е. Совместное влияние интенсивной пластической деформации и холодной прокатки на механические свойства алюминиевых сплавов на основе системы Al-Mg 2 Si // Перспективные материалы. – 2018. – № 7. – С. 49–56. – DOI: 10.30791/1028-978x-2018-7-49-56.
11. Автократова Е. В., Ситдииков О. Ш., Маркушев М. В. Сверхпластичность Al-Mg-Sc (Zr) сплавов, подвергнутых интенсивной пластической деформации // Физика и механика материалов. – 2017. – Т. 33, № 1. – С. 19–28. – DOI: 10.18720/MPM.3312017_3.
12. Структура и свойства композита A356-AlCuFe, полученного с использованием электромагнитного перемешивания / С. С. Полищук, А. Л. Березина, А. А. Давиденко, В. З. Спус-

- канюк, В. Н. Фиксен, А. В. Яценко, В. В. Бурховецкий // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2014. – С. 1189–1205.
13. Resistance of submicrocrystalline aluminum alloys to high-rate deformation and fracture after dynamic channel angular pressing / I. G. Brodova, A. N. Petrova, S. V. Razorenov, E. V. Shorokhov // *The Physics of Metals and Metallography*. – 2015. – Vol. 116, iss. 5. – P. 519–526. – DOI: 10.1134/S0031918X15050051.
14. Twist-channel angular pressing: effect of the strain path on grain refinement and mechanical properties of copper / R. Kocich, J. Fiala, I. Szurman, A. Macháčková, M. Mihola // *Journal of Materials Science*. – 2011. – Vol. 46, no. 24. – P. 7865–7876. – DOI: 10.1007/s10853-011-5768-1.
15. Способ деформационной обработки материалов и устройство для его осуществления: пат. 2146571 Рос. Федерация / Маркушев М. В., Слобода В. Н., Кайбышев О. А., Ин-т проблем сверхпластичности металлов РАН. – № 98107870/02 ; заявл. 17.04.1998 ; опубл. 20.03.00, Бюл. № 8.
16. McKenzie P. W. J., Lapovok R. ECAP with back pressure for optimum strength and ductility in aluminium alloy 6016. Part 2: Mechanical properties and texture // *Acta Materialia*. – 2010. – Vol. 58 (9). – P. 3212–3222. – DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.037.
17. Optimisation of interface formation by shear inclination: Example of aluminium-copper hybrid produced by ECAP with back-pressure / Alexander E. Medvedev, Rimma Lapovok, Eric Koch, Heinz Werner Höppel, Mathias Göken // *Materials & Design*. – 2018. – Vol. 146. – P. 142–151. – DOI: 10.1016/j.matdes.2018.03.021.
18. Naizabekov A. B., Andreyashchenko V. A. Evaluation of possibility for increase of mechanical characteristics of the Al–Fe–Si–Mn alloy by equal-channel angular pressing // *Metallurgist*. – 2013. – Vol. 57, no. 1–2. – P. 159–163. – DOI: 10.1007/s11015-013-9706-0.
19. Influence of the supersaturated silicon solid solution concentration on the effectiveness of severe plastic deformation processing in Al–7 wt. % Si casting alloy / C. M. Cepeda-Jiménez, J. M. García-Infanta, A. P. Zhilyaev, O. A. Ruano, Fernando Carreño, Alexander Zhilyaev, Oscar Ruano // *Materials Science and Engineering: A*. – 2011. – Vol. 528, no. 27. – P. 7938–7947. – DOI: 10.1016/j.msea.2011.07.016.
20. Пластометрические исследования металлов / Н. А. Мочалов, А. М. Галкин, С. Н. Мочалов, Д. Ю. Парфенов. – М. : Интернет Инжиниринг, 2003. – 318 с.
21. Assessment of homogeneity of the shear-strain pattern in Al–7wt % Si casting alloy processed by high-pressure torsion / C. M. Cepeda-Jimenez, A. Orozco-Caballero, J. M. Garcia-Infanta, A. P. Zhilyaev, O. A. Ruano, F. Carreno // *Materials Science and Engineering A*, 2014. – Vol. 597. – P. 102–110. – DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.072.
22. Andreyachshenko V., Naizabekov A. The technology of equal channel angle backpressure extrusion for deformation iron and aluminium alloys // *Proceedings Book of 3rd International Conference NANOCON*. – Czech Republic, Tanger Ltd., 2011. – P. 246–252.
23. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al-Si-Fe-Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure // *21st International Conference on Metallurgy and Materials Metal-2012, Brno Czech Republic : proceedings, 2012*. – P. 391–395.
24. Найзабеков А. Б., Андреященко В. А. Микроструктурные и механические характеристики сплава Al-Fe-Si-Mn подвергнутого равноканальному угловому прессованию // *X Международная научная конференция «Перспективные технологии, оборудование и аналитические системы для материаловедения и наноматериалов» : сб. трудов*. – Алматы, Республика Казахстан, 2013. – С. 114–122.

Received: 09.06.2018

Revised: 28.12.2018



Accepted: 15.02.2019



DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.055-063

OPTIMAL WALL THICKNESS OF METAL PIPE ENCASED IN A FIBER POLYMER SHELL

S. S. Volkov^{a)*} and V. V. Struzhanov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation*

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0002-6481-5052>  volkovss48@yandex.ru;

^{b)}  <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

*Corresponding author: E-mail: volkovss48@yandex.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 362 30 19

An algorithm for calculating the parameters of a compound cylinder with a metal casing and a fiber polymer shell is developed. The inner radius of the casing and the outer radius of the compound cylinder are limited by technological conditions. The compound cylinder under internal pressure deforms as a single unit. It is assumed that the thickness of the metal wall of the casing should be minimized. With the application of the Lamé problem, an optimal relationship between the thickness of the casing and the thickness of its reinforcing shell is determined. Various strength conditions in the critical points of the structure are analyzed and the most comprehensive condition is chosen. An exact analytical solution of the problem is found. The ratio of two radii of a compound cylinder is found through a system of equations that relates the strength condition to the strain compatibility condition at the junction between the casing and the shell. The wall thickness for a closed cylinder with a metal casing and an open fiber polymer shell is calculated as a numerical example.

Keywords: compound cylinder, internal pressure, the Lamé problem, exact solution, polymer fiber, safety factor.

References

1. Fedorov Yu.Yu., Popov S.N., Savvina A.V., Vasilyev S.V., Rodionov A.K. Evaluation of the Axial Stresses of a Gas Pipeline Made of Reinforced Polyethylene Pipes under Conditions of Permafrost Soils. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2017, iss. 3, pp. 36–41. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.3.036-041. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-3/2017-3_122.html (accessed: 22.03.2018).
2. Gorin N.V., Levakov B.G., Taskin V.B., Putyrsky V.P., Volkov S.S. Nuclear reactor vessel. *RF Patent 2031457*, 2002. (In Russian).
3. Struzhanov V.V., Mironov V.I. *Deformatsionnoye razuprochneniye materiala v elementakh konstruksiy* [Work Softening of the Material in Structural Components]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1995, 190 p. (In Russian).
4. Andrasic C.P., Parker A.P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack-face loading. *Eng. Fract. Mech.*, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 187–193.
5. Shannon R.W.E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1974, vol. 2, iss. 2, pp. 19–29. DOI: 10.1016/0308-0161(74)90013-1.

6. Lavit I.M., Nguyen V.T. Thermoelastoplastic deformation of a thick-walled cylinder with a radial crack. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, iss. 3, pp 491–499. DOI: 10.1007/s10808-008-0066-7.
7. Zingerman K. M., Zubov L. M. Exact solutions of problems of the theory of repeated superposition of large strains for bodies created by successive junction of strained parts. *Chebyshevskii Sb.*, 2017, vol. 18, iss. 3, pp. 255–279. (In Russian).
8. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1951.
9. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Mechanics of Materials*, New York, Von Norstrand, Reinhold Co., 1972.
10. Birger I.A., Mavlyutov R.R. *Soprotivlenie materialov [Strength of Materials]*. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 pp. (In Russian).

Подана в журнал: 09.06.2018



УДК 539.3



DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.055-063

ОПТИМАЛЬНАЯ ТОЛЩИНА СТЕНКИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С ВОЛОКНИСТОЙ ОБОЛОЧКОЙ

С. С. Волков^{а)}*, В. В. Стружанов^{б)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
Уральского отделения Российской академии наук
620049, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <http://orcid.org/0000-0002-6481-5052>  volkovss48@yandex.ru;

^{б)}  <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: volkovss48@yandex.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 362–30–19

Разработан алгоритм расчета параметров составного цилиндра из металлического корпуса и полимерной волокнистой оболочки. Внутренний радиус корпуса и внешний радиус составного цилиндра ограничены технологическими условиями. Составной цилиндр деформируется как единое целое под действием внутреннего давления. Предполагается, что толщина металлической стенки корпуса должна быть наименьшей из возможных. С помощью решения задачи Ламе находится оптимальное соотношение между толщиной стенки корпуса и толщиной упрочняющей его оболочки. Проведен анализ различных условий прочности в опасных точках конструкции и выбрано наиболее общее из условий. Найдено точное аналитическое решение задачи. Соотношение радиусов составного цилиндра находится при решении системы уравнений, связывающих условие прочности и условие совместности деформаций на стыке корпуса и оболочки. Приведен числовой пример расчета толщины стенок для закрытого цилиндра с металлическим корпусом и открытой волокнистой оболочкой.

Ключевые слова: составной цилиндр, внутреннее давление, задача Ламе, точное решение, полимерное волокно, запас прочности.

1. Введение

Цилиндрические элементы конструкций, в том числе составные цилиндры, активно используются в технике. Это резервуары различного назначения, трубопроводы, котлы, корпуса двигателей. Разработка методов расчета составных цилиндров на прочность становится актуальной и с появлением новых современных материалов [1, 2]. При этом ставятся задачи прогнозирования ранних стадий разрушения материала и гарантирование работы ответственных конструкций в безопасном диапазоне напряжений и деформаций [3–6]. Наряду с созданием пакетов программ для расчета конструкций сохраняется необходимость и в разработке точного аналитического решения задач [7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндр, боковая поверхность которого имеет полимерную волокнистую оболочку. Цилиндр находится под воздействием высокого внутреннего давления, имеющего характер однократных статических нагрузок. Требуется оценить прочность боковой поверхности. Необходимо найти наименьшую из возможных толщину корпуса, не допустив при этом потери прочности конструкции. Суммарная толщина корпуса и оболочки ограничена технологическими требованиями.

Внутренний радиус корпуса a известен. Его внешний радиус b и внешний радиус оболочки c не известны и должны быть найдены так, чтобы при действии давления внутри цилиндра не возникали пластические деформации ни в корпусе, ни в оболочке. При возрастании давления внутри цилиндра до величины P_a на стыке корпуса и оболочки возникает давление P_b . Величина P_b зависит от соотношения радиусов a, b, c , поэтому заранее неизвестна.

Оболочка плотно прилегает к корпусу, напряжения на стыке корпуса и оболочки при отсутствии внутреннего давления практически отсутствуют. Подобные оболочки надеваются на корпус с натягом, но релаксация высокопрочных волокон обычно такова, что эти напряжения быстро снижаются, поэтому их можно не учитывать при расчете ответственных конструкций.

На рис. 1 представлена схема поперечного сечения составного цилиндра. Толщина металлической стенки корпуса равна $b - a$, толщина полимерной обмотки равна $c - b$.

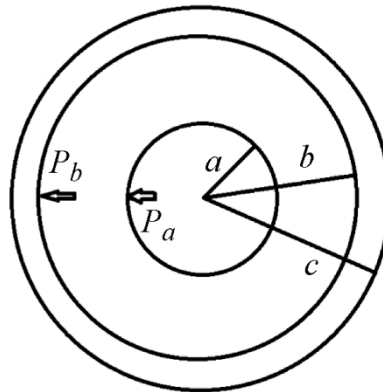


Рис. 1. Схема сечения составного цилиндра

Пусть E_1 – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала корпуса. E_2 – модуль Юнга волокна полимерной оболочки. Обмотка не имеет связующего, поэтому ее коэффициент Пуассона равен нулю.

Рассмотрим решение задачи Ламе для металлического корпуса и оболочки из волокна. Корпус – цилиндр с внутренним давлением P_a и внешним давлением P_b на боковой поверхности. Оболочка представляет собой цилиндр с внутренним давлением P_b . Внешнее давление оболочки P_c равно нулю.

3. Решение задачи Ламе

В корпусе действуют σ_r – радиальное, σ_θ – окружное и σ_z – осевое напряжения. Соответствующие напряжения в оболочке обозначим $\tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_z$. Пусть также r – произвольный радиус сечения составного цилиндра, расстояние от оси цилиндра до его произвольной точки.

Используя методы решения [8–10] задачи Ламе для цилиндра, запишем напряжения в металлическом корпусе при $a \leq r \leq b$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} + \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{2}, \\ \sigma_r &= \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} - \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{2}, \\ \sigma_z &= \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Аналогичным образом найдем радиальное, окружное и осевое напряжения в волокнистой оболочке при $b \leq r \leq c$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta &= \frac{b^2 P_b}{c^2 - b^2} + \frac{P_b}{c^2 - b^2} \cdot \frac{b^2 c^2}{r^2}, \\ \tilde{\sigma}_r &= \frac{b^2 P_b}{c^2 - b^2} - \frac{P_b}{c^2 - b^2} \cdot \frac{b^2 c^2}{r^2}, \\ \tilde{\sigma}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Используя обобщенный закон Гука, вычислим окружные деформации в корпусе ε_θ и оболочке $\tilde{\varepsilon}_\theta$ при $r = b$:

$$E_1 \cdot \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) = \frac{P_a(2 - \nu)a^2 - P_b(1 - \nu)b^2 - P_b(1 + \nu)a^2}{b^2 - a^2},$$

$$E_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_\theta = \tilde{\sigma}_\theta = P_b \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}.$$

Запишем условие совместности деформаций $\varepsilon_\theta = \tilde{\varepsilon}_\theta$ при $r = b$ на стыке корпуса и оболочки:

$$\frac{P_a(2 - \nu)a^2 - P_b(1 - \nu)b^2 - P_b(1 + \nu)a^2}{E_1(b^2 - a^2)} = P_b \frac{c^2 + b^2}{E_2(c^2 - b^2)}.$$

Введем обозначения:

$$x = \frac{b^2}{a^2}, \quad y = \frac{c^2}{b^2}, \quad z = \frac{P_b}{P_a}. \quad (3)$$

Используя обозначения (3), получим условие совместности деформаций на стыке корпуса и обмотки в следующем виде:

$$\frac{2 - \nu - z(1 - \nu)x - z(1 + \nu)}{E_1(x - 1)} = \frac{z}{E_2} \cdot \frac{y + 1}{y - 1}. \quad (4)$$

Условие совместности деформаций должно сочетаться с ограничением напряжений в опасных точках и отсутствием в них пластических деформаций.

4. Условия прочности корпуса и оболочки

Перейдем к оценке напряжений в составном цилиндре, используя формулы (1,2). Наибольшие напряжения, влияющие на прочность конструкции, возникают на внутренней поверхности корпуса при $r = a$ и на внутренней поверхности оболочки при $r = b$. Для выбора критерия прочности рассмотрим также интенсивность напряжений σ_i и главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3 в опасных точках корпуса и оболочки:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 \right)}.$$

Касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3 в корпусе при $r = a$:

$$\tau_1 = \sigma_\theta - \sigma_r = 2P_a(1-z) \cdot \frac{x+1}{x-1},$$

$$\tau_2 = \sigma_z - \sigma_r = P_a \cdot \frac{x}{x-1},$$

$$\tau_3 = \sigma_\theta - \sigma_z = P_a \cdot \frac{x(1-2z)}{x-1}.$$

Вычислим интенсивность касательных напряжений в корпусе при $r = a$:

$$\sigma_i = \frac{P_a}{x-1} \sqrt{2(1-z)^2(x+1)^2 + x^2(1-2z+2z^2)}.$$

Анализируя напряжения $\sigma_i, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, делаем вывод, что в корпусе наибольшим из них является τ_1 . Если $[\sigma_i]$ – допустимое значение интенсивности напряжений в металле, то условие прочности корпуса при минимальной толщине металлической стенки примет вид:

$$2(1-z) \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{[\sigma_i]}{P_a}. \quad (5)$$

Аналогичным образом исследуем напряжения $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3$ для оболочки при $r = b$:

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r = 2zP_a \cdot \frac{y+1}{y-1},$$

$$\tilde{\tau}_2 = \tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_r = zP_a,$$

$$\tilde{\tau}_3 = \tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_z = zP_a \cdot \frac{\sqrt{2,5y^2+y+1}}{y-1}.$$

Если $[\tilde{\sigma}_i]$ – допустимое значение интенсивности напряжений волокна, то условие работы оболочки в области упругих деформаций следующее:

$$2z \cdot \frac{y+1}{y-1} = \frac{[\tilde{\sigma}_i]}{P_a}. \quad (6)$$

И наконец, учитывая суммарное действие корпуса и оболочки, запишем напряжения в опасных внутренних точках корпуса при $r = a$:

$$\sigma_{\theta} = P_a \frac{xy+1}{xy-1}, \quad \sigma_r = -P_a, \quad \sigma_z = P_a \frac{1}{x-1}.$$

Для условия прочности используем максимальное касательное напряжение

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = P_a \cdot \frac{2xy+1}{xy-1} \leq [\sigma_i] \quad (7)$$

или интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = P_a \cdot \frac{x}{(xy-1)(x-1)} \sqrt{y^2(3x^2-6x+4)+1-2y} \leq [\sigma_i] \quad (8)$$

Для проведения дальнейших расчетов исключим параметр z в формуле (4), используя выражение (5). В результате получим соотношение между неизвестными x и y .

$$2 \frac{(x-1)(S-v)-v}{(x-1)(S-xS-2x)} = v + \frac{E_1}{E_2} \left(1 + \frac{2}{y-1} \right); \quad S = \frac{[\sigma_i]}{P_a}. \quad (9)$$

5. Уравнения для расчета оптимального соотношения радиусов цилиндра

Результаты расчетов показывают, что для заданного диапазона изменения x и y критерий (7) сильнее, чем критерий (6). Анализ показывает также, что условие (8) является более общим, чем условие (4). Таким образом, решение задачи об оптимальной толщине корпуса и обмотки должно осуществляться по формулам (8) и (9).

Запишем искомую систему двух уравнений для определения неизвестных x и y :

$$\begin{cases} P_a \cdot \frac{x}{(xy-1)(x-1)} \sqrt{y^2(3x^2-6x+4)+1-2y} \leq [\sigma_i] \\ 2 \frac{(x-1)([\sigma_i]-vP_a)-vP_a}{(x-1)([\sigma_i]-x[\sigma_i]-2xP_a)} = v + \frac{E_1}{E_2} \left(1 + \frac{2}{y-1} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Решив систему уравнений (10), вычислим неизвестные внешний радиус металлического корпуса b и внешний радиус полимерной оболочки c . Радиус a известен из условий задачи

$$b = a\sqrt{x}; \quad c = b\sqrt{y} = a\sqrt{xy}.$$

Находим также толщину стенки корпуса $b-a$ и толщину оболочки $c-b$:

$$b-a = a(\sqrt{x}-1); \quad c-b = b(\sqrt{y}-1). \quad (11)$$

6. Числовой пример

Цилиндрический корпус изготовлен из титанового сплава ВТ-6 и упрочнен обмоткой из волокна армос. Модуль Юнга сплава $E_1 = 1,04 \cdot 10^5$ МПа; модуль Юнга волокон $E_2 = 1,26 \cdot 10^5$ МПа. Коэффициент Пуассона для корпуса $\nu = 0,33$, для оболочки – $\nu = 0$, так как обмотка не имеет связующего. В результате кратковременного воздействия в металлическом корпусе возникает внутреннее давление $P_a = 100$ МПа. Внутренний радиус корпуса $a = 190$ мм. Согласно технологическим условиям $c \leq 1,41a$, т. е. неизвестные параметры x и y связаны условием $x \cdot y \leq 1,89$. Нужно найти размеры корпуса и оболочки так, чтобы работа конструкции была безопасной, а толщина металлической стенки – наименьшей из возможных.

Допустимое напряжение $[\sigma_i]$ в металле свяжем с пределом текучести титанового сплава $\sigma_T = 880$ МПа и различными значениями коэффициента запаса прочности $[n]$, тогда $[\sigma_i] = \sigma_T / [n]$. Допустимое напряжение волокна $[\tilde{\sigma}_i] = 4400$ МПа. Условия прочности достаточно рассмотреть лишь для металла, так как прочность волокна в несколько раз больше.

Если $[n]$ – коэффициент запаса прочности, то условия для расчета величин x и y примут вид:

$$\begin{cases} \frac{x}{(xy-1)(x-1)} \sqrt{y^2(3x^2-6x+4)+1} \leq \frac{8,8}{[n]}, \\ 2 \frac{(x-1)(8,8-\nu[n])-\nu[n]}{(x-1)(8,8-x10,8)} = \nu + 0,82 \left(1 + \frac{2}{y-1} \right). \end{cases} \quad (12)$$

На рис. 2 представлено графическое решение системы (12). Решение $A(1,23; 1,40)$ получено при коэффициенте запаса прочности $[n] = 2$. При меньшем запасе прочности $[n] = 1,5$ получается решение $B(1,19; 1,29)$.

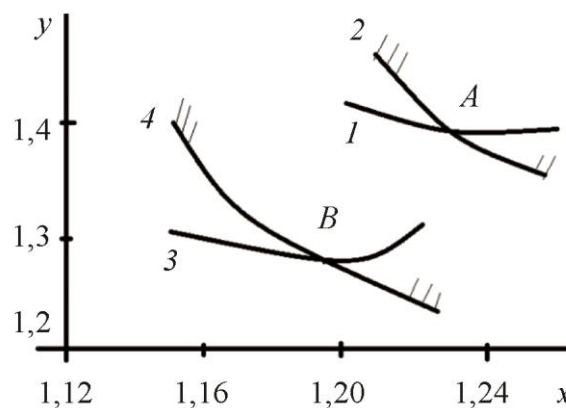


Рис. 2. Решение (x, y) при различных коэффициентах запаса прочности: $A - [n] = 2$; $B - [n] = 1,5$ (линии 1, 3 – условия совместности деформаций; линии 2, 4 – условия прочности)

Рассмотрим точку A . Здесь $x = 1,23$ и $y = 1,40$. По формулам (11) толщина стенки корпуса равна $a(\sqrt{x} - 1) = 21$ мм, толщина оболочки: $b(\sqrt{y} - 1) = 38$ мм. Решение в точке B дает, соответственно, более тонкие корпус и оболочку: 17 мм и 29 мм. Корпус и оболочка действуют при этом в безопасной области упругих напряжений и деформаций.

7. Заключение

Получено точное аналитическое решение для расчета толщины стенок составного цилиндра из металлического корпуса и полимерной волокнистой оболочки в безопасной области упругости. Используются различные коэффициенты запаса прочности. При необходимости учесть динамический характер внутреннего давления расчеты могут проводиться с соответствующим коэффициентом, завышающим запас прочности. Полученные формулы дают возможность делать расчеты в широком диапазоне деформационных и прочностных свойств материала корпуса и материала оболочки, а также исходных размеров цилиндра. Результаты могут быть использованы для тестирования программ численного моделирования цилиндрических сосудов с оболочкой.



Литература

1. Evaluation of the Axial Stresses of a Gas Pipeline Made of Reinforced Polyethylene Pipes under Conditions of Permafrost Soils / Yu. Yu. Fedorov, S. N. Popov, A. V. Savvina, S. V. Vasilyev, A. K. Rodionov // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2017. – Iss. 3. – P. 36–41. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.3.036-041. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-3/2017-3_122.html (accessed: 22.03.2018).
2. Корпус ядерного реактора : пат. 2031457 Рос. Федерация / Горин Н. В., Леваков Б. Г., Таскин В. Б., Путьрский В. П., Волков С. С., РФЯЦ-ВНИИТФ НПП «Уралкомплекс», Снежинск. – № 4934045/25 ; заявл. 06.05.1991 ; опубл. 20.03.95, Бюл. № 8. – 5 с.
3. Стружанов В. В. Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург : УрО РАН, 1995. – 190 с.
4. Andrasic C. P., Parker A. P. Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack-face loading // *Eng. Fract. Mech.* – 1984. – Vol. 19, no. 1. – P. 187–193.
5. Shannon R. W. E. Stress intensity factors for thick-walled cylinders // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. – 1974. – Vol. 2, iss. 2. – P. 19–29. – DOI: 10.1016/0308-0161(74)90013-1.
6. Lavit I. M., Nguyen V. T. Thermoelastoplastic deformation of a thick-walled cylinder with a radial crack // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2008. – Vol. 49, iss. 3. – P. 491–499. – DOI: 10.1007/s10808-008-0066-7.
7. Зингерман К. М., Зубов Л. М., Точные решения задач теории многократного наложения больших деформаций для тел, образованных последовательным соединением деформированных частей // *Чебышевский сборник*. – 2017. – Т. 18, вып. 3. – С. 255–279.
8. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. – New York, Toronto, London : McGraw-Hill Book Company, 1951.
9. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Mechanics of Materials*. – New York : Von Norstrand, Reinhold Co., 1972.
10. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. *Сопrotивление материалов*. – М. : Наука, 1986. – 560 с.

Received: 31.08.2018**Revised:** 25.12.2018**Accepted:** 15.02.2019**DOI:** 10.17804/2410-9908.2019.1.064-069

VARIATIONAL PRINCIPLE FOR THE VELOCITIES OF PARTICLES OF A VISCOPLASTIC STRIP UNDER ROLLING

V. D. Solovei

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation* <https://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  SoloveiVD@yandex.ru

Corresponding author: E-mail: SoloveiVD@yandex.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 92; fax: +7 (343) 374 53 30

Plane flow of a viscoplastic strip under rolling is considered. Tangential friction stresses at the flow–roll interface and at contact of the flow region with the rigid strip ends are specified approximately by the Prandtl friction law. A variational principle is proved for particle velocities with account of the convection flow.

Keywords: viscoplastic strip rolling, stationary flow of a strip, convective flow, variational principle, local potential.

Acknowledgment

The work was carried out within the framework of the state assignment, theme No. 0391-2016-0001.

References

1. Ilyushin A.A. The Deformation of a Visco-Plastic Solid. *Uchenye Zapiski Mosk. Gos. Univ.*, Ser. 2, 1940, vol. 39, pp. 3–81. (In Russian).
2. Mosolov P.P., Miasnikov V.P. Variational methods in the theory of the fluidity of a viscoplastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 545–577. DOI: 10.1016/0021-8928(65)90063-8.
3. Freudenthal A., Geyringer Kh. *Matematicheskie teorii neuprugoy sploshnoy sredy* [Freudenthal Alfred M., Geiringer Hilda. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. In: Handbuch der Physik, Bd.VI, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1958, pp. 229–433]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 432 p. (In Russian).
4. Kolmogorov V.L. *Mekhanika obrabotki metallov davleniem* [Mechanics of metal forming]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1986, 688 p. (In Russian).
5. Alekseev A.E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems of linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, iss. 4, pp. 622–629. DOI: 10.1023/A:1016018118184.

Подана в журнал: 31.08.2018



УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.064-069

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ СКОРОСТЕЙ ЧАСТИЦ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ПРОКАТКЕ

В. Д. Соловей

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  SoloveiVD@yandex.ru

Ответственный автор. Электронная почта: soloveivd@yandex.ru
Адрес для переписки: 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 375–35–92; факс: +7 (343) 374–53–30

Рассматривается плоское течение вязкопластической полосы при прокатке. Касательные напряжения трения на границах контакта области течения с валком и с жесткими концами полосы задаются приближенно с помощью закона трения Прандтля. Доказан вариационный принцип для скоростей частиц с учетом конвективного течения.

Ключевые слова: прокатка вязкопластической полосы, стационарное течение полосы, конвективное течение, вариационный принцип, локальный потенциал.

1. Введение

В работе [1] представлен вариационный принцип для скоростей частиц вязкопластического тела, на границе которого задаются скорости частиц. Вариационный принцип для краевой задачи течения вязкопластического тела в случае, когда на границе тела задаются скорости частиц и напряжения, рассмотрен в работе [2]. В перечисленных работах не учитывалось конвективное течение материала.

В настоящей работе доказывается вариационный принцип для скоростей частиц вязкопластической полосы, на границе области, течения которой задаются скорости частиц и напряжения, при прокатке с учетом конвективного течения материала. Соответствующий функционал является локальным потенциалом.

2. Краевая задача течения вязкопластической полосы при прокатке

Система уравнений для стационарного течения вязкопластического тела имеет вид [3, 4]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho w_i, \quad (1)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad (2)$$

$$s_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + 2K \varepsilon_{ij} / H, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}. \quad (5)$$

Здесь v_i и w_i компоненты векторов скоростей и ускорений частиц; ε_{ij} – компоненты тензора скорости деформации; $H = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформации сдвига; σ_{ij} и s_{ij} – компоненты тензора напряжений и девиатора напряжений; $\sigma = \sigma_{ii}/3$ – гидростатическое давление; ρ – плотность тела ($\rho = const$); μ – коэффициент вязкости; K – предел текучести на сдвиг; δ_{ij} – символ кронекера; тензорные индексы принимают значения прямоугольных декартовых координат x, y ; по дважды повторяющимся тензорным индексам i, j, k, l происходит суммирование по всем возможным их значениям; запятая перед индексом обозначает частную производную по соответствующей координате или по времени.

Ускорение

$$w_i = v_{i,j} v_j \quad (6)$$

связано с конвективным движением.

Уравнения состояния (3) получены в предположении, что плотность диссипативной функции

$$f = s_{ij}\varepsilon_{ij} = \mu H^2 / 2 + KH \quad (7)$$

является вязкопластическим потенциалом [1, 3]:

$$s_{ij} = \partial f / \partial \varepsilon_{ij}, \quad (8)$$

Напряжения на границе области деформации полосы определяются формулой

$$p_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (9)$$

На рисунке введены следующие обозначения: S (область $ABDEF$) – область течения полосы; N – нейтральная точка на границе контакта полосы и вала l_{s2} ; l'_{s2} и l''_{s2} – зоны отставания и опережения на l_{s2} ; l_{v1} и l_{v2} – границы области течения с жесткими концами полосы S_1 и S_2 ; V_1 и V_2 – скорости перемещений жестких концов полосы; l_p – свободная граница; l_{s1} – ось симметрии процесса прокатки; индексы компонент векторов t и n относятся к локальной системе координат \vec{t}, \vec{n} .

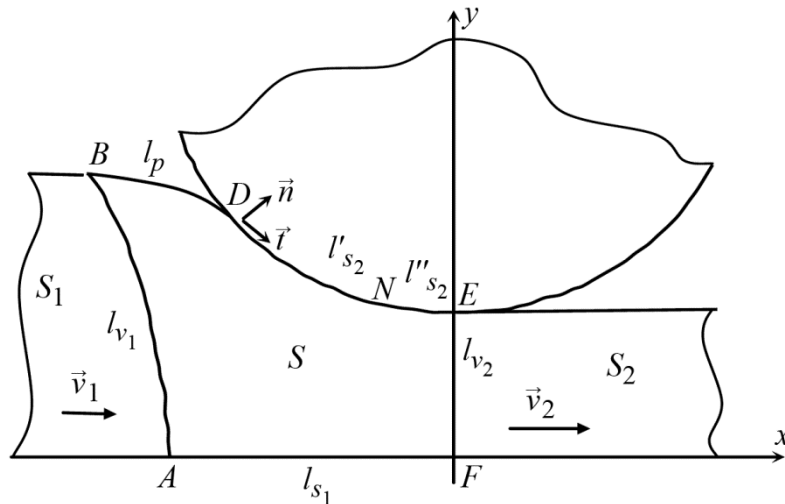


Схема процесса прокатки полосы

Граничные условия для стационарного течения полосы имеют следующий вид:

$$p_t^* = K \text{ на } l'_{s2}, p_t^* = -K \text{ на } l''_{s2}, v_n^* = 0 \text{ на } l_{s2}; \quad (10)$$

$$\left| p_t^* \right| = K, v_n^* = v_n^*(V_1) \text{ на } l_{v1}; \left| p_t^* \right| = K, v_n = V_2 \text{ на } l_{v2}; \quad (11)$$

$$p_t^* = 0, p_n^* = 0 \text{ на } l_p; p_t^* = 0, v_n^* = 0 \text{ на } l_{s1}. \quad (12)$$

Касательные напряжения трения p_t на l_{s2} , l_{v1} и l_{v2} задаются приближенно с помощью закона трения Прандтля [5]. Напряжения трения на l_{v1} и l_{v2} являются пассивными. Звездочкой* обозначаются заданные величины.

3. Доказательство вариационного принципа для скоростей частиц вязкопластической полосы при прокатке

Покажем, что для вязкопластической полосы при прокатке функционал

$$J = \iint_S (\mu H'^2/2 + KH' + \rho w_i v'_i) dS - \int_{l_{s2}} p_t^* v'_t dl - \int_{l_{sv1}} p_t^* v'_t dl - \int_{l_{sv2}} p_t^* v'_t dl, \quad (13)$$

определенный на кинематически возможных скоростях частиц v'_i , удовлетворяющих уравнению (2) и граничным условиям (10)–(12), для действительных скоростей частиц v_i принимает минимальное значение. Отметим, что ускорение w_i в (13) связано с действительными скоростями частиц v_i .

Рассмотрим первую вариацию функционала (13), связанную с вариациями скоростей частиц δv_i относительно действительных скоростей частиц v_i .

Учитывая соотношения (8), (5), (2), (4), симметричность тензора напряжений, используя теорему Гаусса-Остроградского, принимая во внимание (9), получим следующее соотношение:

$$\delta \iint_S (\mu H^2/2 + KH') dS = - \iint_S \sigma_{ij,j} \delta v_i dS + \int_l p_i \delta v_i dl. \quad (14)$$

Второй интеграл в (14) берется по всей границе области течения l .

Первую вариацию функционала (13) с учетом (14), (6), а также граничных условий (10)–(12), преобразуем к следующему виду:

$$\delta J = \iint_S (-\sigma_{ij,j} + \rho w_i) \delta v_i dS. \quad (15)$$

Из (15) и (1) следует равенство

$$\delta J = 0. \quad (16)$$

Покажем, что для второй вариации функционала (13) в действительном состоянии имеет место неравенство

$$\delta^2 J > 0. \quad (17)$$

Используя (3), можно получить соотношение

$$\delta^2 (s_{ij} \varepsilon_{ij}) = 4KH^{-3} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{kl}) + 4\mu \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (18)$$

Так как выражение в скобках, согласно неравенству Коши-Буняковского, неотрицательно, то для $\delta \varepsilon_{ij} \neq 0$ с учетом (7) и (13) имеет место неравенство (17).

Из (16) и (17) следует минимальность функционала (13) для действительных скоростей перемещения v_i .

4. Заключение

Рассматривается плоское течение вязкопластической полосы при прокатке. Касательные напряжения трения на границах контакта области течения с валком и с жесткими концами полосы задаются с помощью закона Прандтля. Вариационный принцип для скоростей частиц доказывается с учетом конвективного движения. Функционал принципа является локальным потенциалом.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания, тема № 0391-2016-0001.

Список литературы

1. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластичного тела // ученые записки МГУ. Механика. – 1940. – Вып. 39. – С. 3–81.
2. Mosolov P. P., Miasnikov V. P. Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1965. – Vol. 29, no. 3. – P. 545–577. – DOI: 10.1016/0021-8928(65)90063-8.







3. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М. : Физматгиз, 1962.
4. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. – М. : Metallurgiya, 1986.
5. Alekseev A. E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems of linear theory of elasticity // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2002. – Vol. 43, iss. 4. – P. 622–629. – DOI: 10.1023/A:1016018118184.

Received: 05.07.2018
Revised: 27.12.2018
Accepted: 15.02.2019
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.070-075

A STUDY OF FATIGUE PROCESSES IN THE MATERIAL OF THE COMPRESSOR BLADES OF A GAS TURBINE ENGINE AFTER LONG-TERM OPERATION

I. N. Tsareva^{a)*}, O. B. Berdnik^{b)}, and S. V. Kirikov^{c)}

*Mechanical Engineering Research Institute –
 Branch of Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
 85 Belinskogo St., Nizhny Novgorod, 603024, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-2538-427X>  irichatsareva@mail.ru;
^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-4100-9493>  berdnik80@mail.ru;
^{c)}  <https://orcid.org/0000-0002-5039-2271>  ksv.kirikov@yandex.ru

*Corresponding author: E-mail: npktribinika@yandex.ru
 Address for correspondence: Belinskogo St., 85, 603024, Nizhny Novgorod, Russian Federation
 Tel.: +7 (831) 432 03 01

The paper studies the microstructure and mechanical properties of the material of an axial compressor incorporated in a gas pumping unit after long-term operation. It is known that, during long-term operation, fatigue damage accumulates in the material. This is due to the simultaneous impact of vibration and mechanical loads on the material of the blades, as well as the influence of air flow at elevated temperatures. In order to determine the stage of fatigue, the microstructure and mechanical properties of the material (steel 20Kh13) were studied. Such changes as the formation of microporosity, the disintegration of sub-grained blocks of the α -Fe phase, and the coagulation of the carbide phase are found in the material structure. The accumulation of fatigue damages is most pronounced in the material of the 5th stage blades and it is manifested in the increasing microhardness of the airfoil surface and decreased tensile strength near the blade root.

Keywords: gas turbine engine, compressor blades, microstructure, porosity, dislocations, hardness, strength.

Introduction

Working blades of compressors are critical parts of gas turbine engines of gas pumping units. They are made of chrome stainless steel and operated under conditions of elevated temperatures (up to 400 °C), erosive effects of air flow, vibration and cyclic loads. The main types of damage to compressor blades during long-term operation are erosion and corrosion wear of the working surface, as well as fatigue failure. The analysis of the blade material with different operating times is an urgent task for studying fatigue processes and predicting the residual life of the parts [1]. Previously, we studied the condition the material compressor blades, which had operated within the assigned lifetime (with a run time of 50 000 to 60 000 hours) [2]. The purpose of this study is to study the fatigue processes in stainless chromium steel at the maximum permissible operating time of 110 000 hours.

Material and methods

The studies were carried out on samples cut from different areas of the blade root and feather, as well as directly on the working surface of the compressor blades of different stages of a GTK-10I gas compressor unit. The elemental composition of the blade material was determined by

the atomic-emission method. The microstructure of the material was analyzed using an Axio Observer inverted optical microscope. The porosity of the material was determined from the images of the microstructure using the Goud fase program. The phase composition and substructure of the blade material were examined by X-ray diffraction analysis using a Dron-3M diffractometer (Cu-K α -radiation, Bragg-Brentano survey method). The parameters of the substructure (the size of the subgrain blocks and the magnitude of microdeformations in them) were determined by the method of approximations from the physical broadening of the diffraction lines (011) and (022) of α -Fe. The density of dislocations at the boundaries and inside the subgrain blocks was evaluated by the formulas [3]

$$\rho_L = \frac{3}{D^2}; \quad (1)$$

$$\rho_\varepsilon = \frac{k(2\varepsilon)}{b}, \quad (2)$$

where ρ_L is dislocation density at the boundaries of the subgrain blocks, D is the size of the subgrain blocks, ρ_ε is dislocation density inside the subgrain blocks, ε is the value of microdeformation, k is the proportionality coefficient ($k = 16.1$ for the cubic lattice), b is the size of the Burgers vector.

The mechanical properties of the material were determined using a tensile test. In addition, the tensile strength of the material was determined using an MET-U1 ultrasonic hardness tester (for the indentation depth of $\sim 15 \mu\text{m}$). Microhardness was measured on the working surface of the blades with a variable load on the indenter (0.2 to 2.0 N) and on the cross-sections with the help of a PMT-3 microhardness tester.

Results and discussion

The compressor rotor blades are made of martensitic chromium stainless steel with the following elemental composition: 12.80 % Cr, 0.20 % C, 0.45 % Ni, 0.44 % Mn, 0.30 % Si, 0.07 % Mo, 0.16 % Cu. The phase composition of the blade material in the initial state is α -Fe + Fe $_3$ C. A nickel-based protective galvanic coating is applied onto the surface of the blades in order to protect the blades from pitting corrosion. The material condition was studied on blades of the 0th stage, which operate at a minimum temperature ($\sim 100 \text{ }^\circ\text{C}$), and on blades of the 5th stage, which are subjected to high temperature loads (up to $300 \text{ }^\circ\text{C}$), during operation. It was found by optical visual inspection that the coating on the surface of the blades is almost completely worn out after prolonged operation due to the erosive effect of a heated air flow (fig. 1). Numerous centers of pitting corrosion with a depth of 0.05 to 0.30 mm were found on the surface of the blades. The blades of all stages are prone to corrosion, and it is most pronounced in the zone near the exit edge. Some blades retain a small part of the coating near the exit edge (10 to 20 % of the total area). There are single mechanical nicks on the edges. Metallographic analysis has shown that the microstructure of the material of the 0th-stage blade root, less affected by heating during operation, is close to the initial state of the 20Kh13 steel. It is sorbitic pearlite with a round-grained carbide phase (Fe $_3$ C), fig. 2 a. The microstructure of the airfoil material is similar to that in the state of the blade root material (fig. 2 b). In this case, there are processes of coagulation of the carbide phase, which are manifested locally.

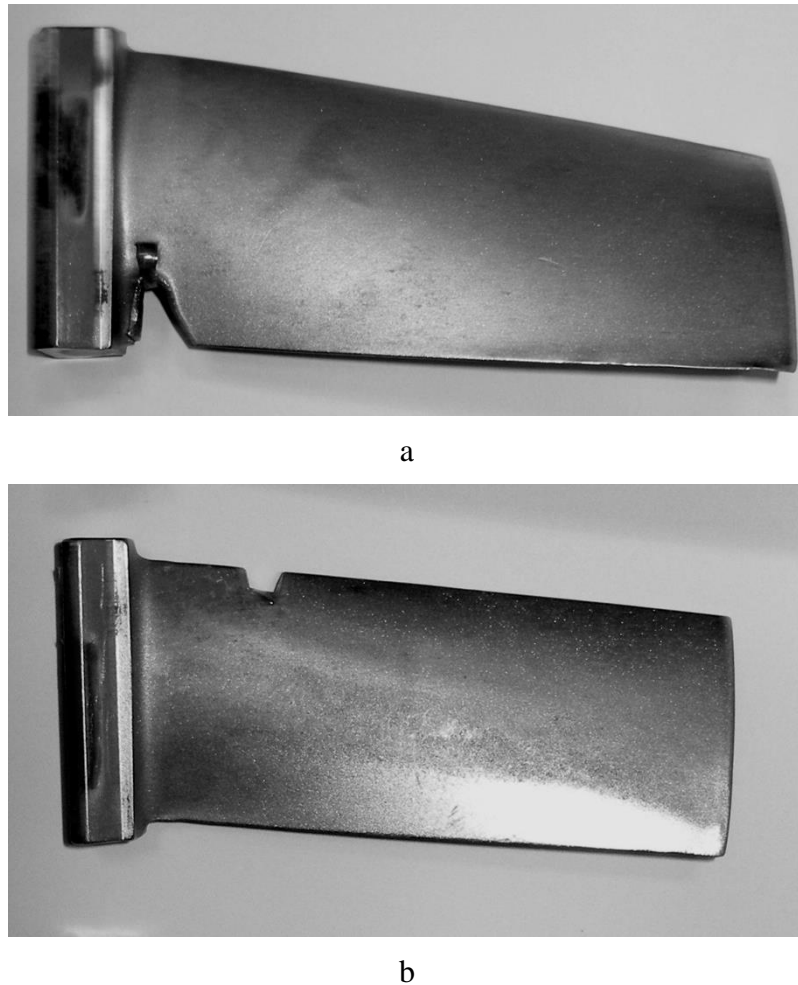


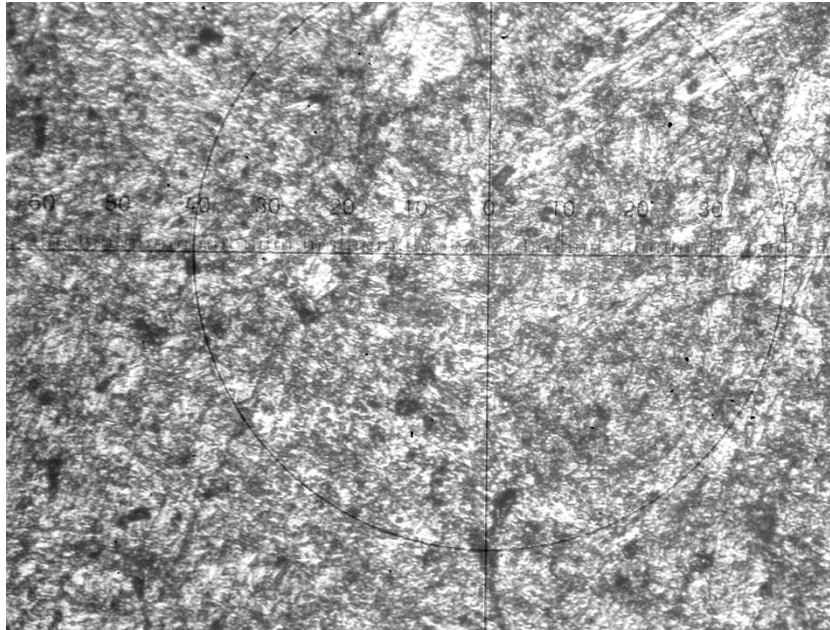
Fig. 1. The blades of the 0th (a) and 5th (b) stages after operation for 110,000 hours

After long-term operation, the microstructure of the material of the airfoil of the 5th-stage blade, subjected to the highest specific workloads during operation, is lamellar pearlite (fig. 3). Internal microporosity was found in the material of the blades, which is typical for the stage of damage accumulation in the development of fatigue processes. The porosity is $\sim 3\%$ in the airfoil material and above $\sim 5\%$ in the material of the blade root, which is a non-stagnant zone.

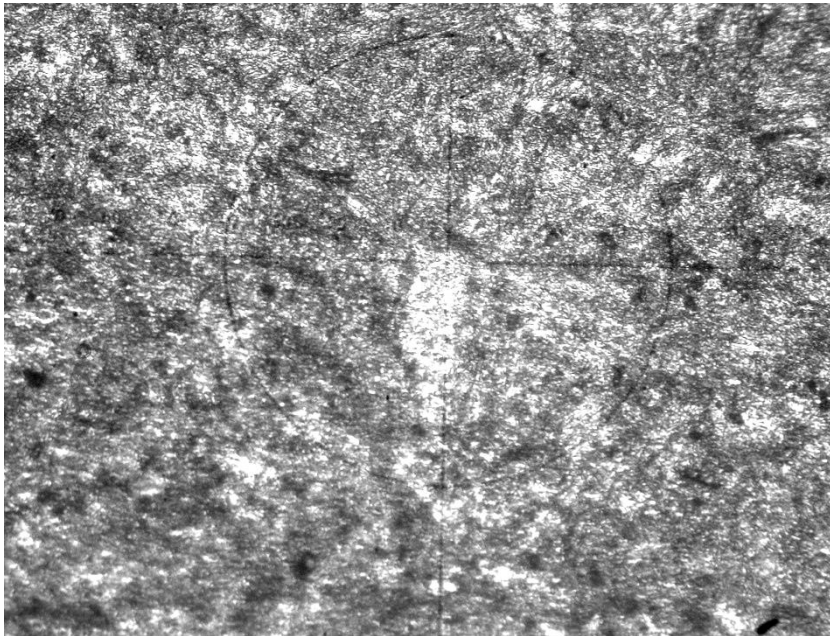
The material substructure parameters in different zones of the blade of the 5th stage were determined by X-ray diffraction (table). The material in the cross section of the root and airfoil parts is characterized by a large-block structure of α -Fe grains with a dislocation density of $\sim 5.3 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2}$. The blade material in the most loaded zone (near the lock) is characterized by a finely dispersed substructure. Crushing of the grain blocks is a consequence of plastic deformation, and it is caused by the rearrangement of the dislocation configurations and the increasing (almost by an order of magnitude) dislocation density at the subgrain boundaries. It has been found that the changes in the substructure occur in the surface layer (~ 5 to $15 \mu\text{m}$ thick) and that they leave unaffected the basis of the blade material.

The microhardness of the material of the working surface of the 0th-stage blades has a uniform depth distribution and ranges between 2.70 and 3.20 GPa. The microhardness of the 5th-stage blade material is ~ 3.20 GPa in the cross section, and this corresponds to the normalized values for the 20Kh13 steel. The high values $H_{200} = 3.90$ GPa were obtained on the working surface, this being due to the crushed substructure of the material. According to the results of the mechanical tensile tests of samples cut from the airfoil of the 0th-stage blades, the tensile strength of the material is 746.4 MPa, with a specific elongation of 13.7 %.

The obtained data characterize the state of the inner layers of the blade material. Since the aging process usually develops in the surface layer of the blades, ultimate strength was measured by an ultrasonic hardness tester directly on the working surface. The values of the tensile strength of the root of the 0th-stage blades (900 to 990 MPa) are close to the normalized value for the 20Kh13 steel (~950 MPa). This is due to the fact that the blade root is less subjected to cyclic loads during operation.



a



b

Fig. 2. Material microstructure in the root (a) and airfoil (b) of the 0th-stage working blade, ×500



Fig. 3. Material microstructure in the airfoil of the 5th-stage working blade, $\times 500$

The α -Fe substructure parameters of the 5th-stage blade material

Analyzed area	Subgrain size D , nm	Microstrain value δ , 10^{-4}	Dislocation density ρ_L at the subgrain boundaries, m^{-2}	Dislocation density ρ_ε inside the grains, m^{-2}
Cross section of the blade root	500	8.2	10^5	$5.3 \cdot 10^6$
Cross section of the airfoil	500	8.2	10^5	$5.3 \cdot 10^6$
Working surface of the airfoil	180	4.1	$9.2 \cdot 10^5$	$1.3 \cdot 10^6$

The ultimate strength on the working surface of the blade airfoil near the blade root is reduced (740 to 780 MPa). In the airfoil of the 5th-stage blades, in the same zone, the lowest tensile strength values (620 to 720 MPa) are obtained. The decrease in the strength characteristics of the blade material in the area near the lock is due to the effect of severe vibromechanical loading.

Conclusion

From the analysis of the state of the material of compressor blades having operated for $\sim 110,000$ hours, it has been found that the fatigue processes are most pronounced in the material of 5th-stage blades, which are subject to the highest thermomechanical loads. They manifest themselves in the form of coagulation of the carbide phase and accumulation of dislocations at the α -Fe subgrain boundaries. This increases surface microhardness and decreases ultimate strength in the zone near the blade root.

Acknowledgment

The work was carried out within the framework of the state assignment for the IAP RAS for conducting basic research in 2013–2020, theme No. 0035-2014-0401 (State registration number 01201458049).

Reference

1. Zheganina I.P., Morozov L.V. Definition of pre-destruction diagnostic signs on condition of surface layers of heat resistant nickel alloys Determination of diagnostic signs of predestruction on a condition of blankets of heat resisting nickel alloys. *VIAM*, 2015, no. 4. DOI: 10.18577/2307-6046-2015-0-4-4-4. Available at: <http://www.viam-works.ru> (accessed 24.12.2015). (In Russian).
2. Tsareva I.N., Berdnik O.B., Krivina L.A., Fel Ya.A. The way to estimate engineering state of compressor's working blades made of EI961 alloy for gas-turbine power plant-45-3. In: *Prikladnaya mekhanika i tekhnologii mashinostroeniya. Sbornik nauchnykh trudov* (Applied Mechanics and Machinery Manufacturing Technologies. Collection of Scientific Papers), Nizhni Novgorod, Intelservis Publ., 2013, no. 1 (22), pp. 37–42. (In Russian).
3. Palatnik L.S., Fuks M.Ya., Kosevich V.M. *Mekhanizm obrazovaniya i substruktura kondensirovannykh plenok* (Mechanism of Formation and Substructure of Condensed Films). M., Nauka Publ., 1972. (In Russian).