

DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1

Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

<http://dream-journal.org>

1, 2021
January-February

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Kononov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Elena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)
Мионов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

CONTENTS

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A class of exact solutions with spatial acceleration for the description of viscous incompressible fluid flows in the field of mass forces	6
Kryuchkov D. I., Zalazinsky A. G. Model representation of an axisymmetric steel-aluminum sample for simulation of a separation test	26
Stolbovsky A. V., Popov V. V., Falahutdinov R. M., and Murzinova S. A. Evolution of the structure of annealed hafnium bronze nanostructured by high pressure torsion	38
Solovei V. D. The strain and strain rate dependence of the yield stress of aluminum	51
Struzhanov V. V. On one problem of determining the optimal residual stress field	55

СОДЕРЖАНИЕ

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Класс точных решений с пространственным ускорением для описания течений вязкой несжимаемой жидкости в поле массовых сил	6
Крючков Д. И., Залазинский А. Г. Модельное представление сталеалюминиевого осесимметричного образца для имитационного моделирования испытания на отрыв	26
Столбовский А. В., Попов В. В., Фалахутдинов Р. М., Мурзинова С. А. Эволюция структуры отожженной гафниевой бронзы, наноструктурированной кручением под высоким давлением	38
Соловей В. Д. Зависимость предела текучести алюминия от деформации и скорости деформации	51
Стружанов В. В. Об одной задаче определения оптимального поля остаточных напряжений	55

Received: 15.12.2020
Revised: 29.01.2021
Accepted: 26.02.2021
DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.006-025

A CLASS OF EXACT SOLUTIONS WITH SPATIAL ACCELERATION FOR THE DESCRIPTION OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOWS IN THE FIELD OF MASS FORCES

N. V. Burmasheva^{a)*}, E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: nat_burm@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

The article presents a new class of exact solutions to the system of Navier–Stokes equations, which allows one to take into account the nonlinear distribution of the pressure field and the influence of external volumetric forces, as well as the possibility of horizontal fluid outflow/inflow when modeling its vertical motion. This class is a generalization of the Lin–Sidorov–Aristov class, which assumes the linear distribution of two projections of the fluid flow velocity vector along a part of the coordinates and the independence of the third projection of the velocity vector from these coordinates.

Keywords: class of exact solutions, Navier–Stokes equation, overdetermined system, field of mass (volumetric) forces.

References

1. Shablovsky O.N. Spherical flow of an ideal fluid in a spatially nonuniform field of force. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2020, vol. 64. pp. 146–155. DOI 10.17223/19988621/64/11. (In Russian).
2. Manuylovich S.V. Longitudinal-periodic flow of a viscous fluid generated by a wall volumetric force. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 2015, no. 4, pp. 59–67. (In Russian).
3. Manuylovich S.V. Cross-flow control in the boundary layer on a sliding wing using a wall volumetric force. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 2020, no. 1, pp. 45–56. DOI: 10.31857/S0568528120010090. (In Russian).
4. Rosensweig R.E. Magnetic fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1987, vol. 19, no. 1, pp. 437–463. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002253.
5. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985, 344 p.
6. Yerin C.V., Vivchar V.I. Ellipsometry of magnetic fluid in a magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2020, vol. 498, pp. 166144. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166144.
7. Wei Pan, Jianghong Gong. Effects of magnetic fluid on magnetic fluid damper. *Key Engineering Materials*, 2012, vols. 512–515, pp. 1479–1483. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.512-515.1479.
8. Safarik I., Prochazkova J., Baldikova E., Timko M., Kopcansky P., Rajnak M., Torma N., Pospiskova K. Modification of diamagnetic materials using magnetic fluids. *Ukr. J. Phys.*, 2020, vol. 65, no. 9, pp. 751–760. DOI: 10.15407/ujpe65.9.751.

9. Horváth B., Szalai I. Nonlinear magnetic properties of magnetic fluids for automotive applications. *Hungarian Journal of Industry and Chemistry*, 2020, vol. 48, no. 1, pp. 61–65. DOI: 10.33927/hjic-2020-09.
10. Bratsun D.A., Vyatkin V.A., Mukhamatullin A.R. On exact nonstationary solutions of equations of vibrational convection. *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 433–444. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35. (In Russian).
11. Polezhaev V.I., Bello M.S., Verezub N.A., Dubovik K.G., Lebedev A.P., Nikitin S.A., Pavlovskiy D.S., Fedyushkin A.I. Konvektivnye protsessy v nevesomosti [Convective Processes under Microgravity]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 242 p. (In Russian).
12. Polezhaev V.I., Sazonov V.V. Mechanics of Weightlessness and Gravity Sensitive Systems. *Annotatsii dokl. nauch.-issled. seminara* [Abstracts of Scientific Research Workshop, Preprint no. 898]. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha Publ, 2009, 36 p. (In Russian).
13. Surzhikov S.T. *Giperzvukovoe obtekanie razrezhennym gazom poverkhnostnogo tleyushchego razryada s vneshnim magnitnym polem* [Hypersonic Rarefied Gas Flow Past a Surface Glow Discharge with an External Magnetic Field]. Moscow, Institut Problem Mekhaniki RAN Publ., 2011, 274 p. (In Russian).
14. Kedrinskiy V.K. Role of nuclei density as a “hidden” parameter in the formation of anomalous zones in a heavy cavitating magma. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, pp. 276–281. DOI: 10.1134/S0021894414020102.
15. Afonin V.V., Petrov V.Y. On exact solutions for a Luttinger liquid with one impurity. *Jetp Lett.*, 2019, vol. 109, pp. 762–767. DOI: 10.1134/S0021364019110031.
16. Kouwn S., Moon T., Oh P. Exact solution and exotic fluid in cosmology. *Entropy*, 2012, vol. 14, pp. 1771–1783. DOI: 10.3390/e14091771.
17. Aristov S.N. Stationary cylindrical vortex in a viscous fluid. *Dokl. Akad. Nauk*, 2001, vol. 377, pp. 477–480. (In Russian).
18. Aristov S.N. Exact solution of the point source problem. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 40, no. 7, pp. 346–348. (In Russian).
19. Aristov S.N. Three-Dimensional Conical Viscous Incompressible Fluid Flows. *Fluid Dynamics*, 1998, vol. 33, no. 929. DOI: 10.1007/BF02698663.
20. Aristov S.N., Grabovskii V.I. Self-similar solution of the Navier-Stokes equations governing gas flows in rotary logarithmically spiral two-dimensional channels. *Fluid Dyn.*, 1995, vol. 30, pp. 838–844. DOI: 10.1007/BF02078198.
21. Temam R. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial Mathematics, 1987, 155 p.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics: Vol. 6 (Course of Theoretical Physics S), 2nd Edition*. Butterworth-Heinemann, 1987, 560 p.
23. Khmelnik S.I. *Navier-Stokes equations. On the existence and the search method for global solutions*. Israel, Mathematics in Computer Comp., 2010, 106 p. (In Russian).
24. Rouse H. *Advanced mechanics of fluids*, New York, Wiley, 1959, 474 p.
25. Boussinesq J. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897, 90 p.
26. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible fluids*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
27. Müller P. Boussinesq approximation. In: *The Equations of Oceanic Motions*, Cambridge, Cambridge University Press, 2006, pp. 119–126. DOI: 10.1017/CBO9780511617843.012.
28. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Exact solution for stable convective concentration flows of a Couette type. *Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 337–349. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.27. (In Russian).

29. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*, 2020, vol. 32, no. 8, pp. 3364–3371 DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
30. Martyushev S.G., Sheremet M.A. Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in a three-dimensional enclosure with a heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 73, pp. 340–353. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.009.
31. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
32. Poiseuille J. Recherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres. *Comptes Rendus*, 1840, vol. 11, pp. 961–967.
33. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Camb. Philo. Trans.*, 1851, vol. 9, pp. 8–106.
34. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
35. Shmiglevskiy Yu.D. *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti* [Analytical Studies of Fluid and Gas Dynamics]. Moscow, Editorial URSS, 1999, 231 p.
36. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
37. Aristov S.N. *Eddy currents in thin liquid layers*. Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis. Vladivostok, 1990, 330 pp.
38. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
39. Prosviryakov E.Yu. A sufficient condition for the absence of strong and weak discontinuities in gas flows in flat channels. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 3, pp. 25–40. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.025-040.
40. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 57–70. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070.
42. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for the convective creep Couette-Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 2, pp. 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109.
43. Privalova V.V. and Prosviryakov E.Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of a viscous fluid layer under the lower boundary heating condition. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 4, pp. 44–55. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055.
44. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 5, pp. 23–39. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039.
45. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 1, pp. 6–23. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023.
46. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field

- investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 2, pp. 61–75. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075.
47. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 1, pp. 6–42. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042.
48. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Complex stationary convection with third-kind boundary conditions at the boundaries of a fluid layer. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 2, pp. 34–47. DOI: 10.17804/2410-9908.2016.2.034-047.
49. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with Specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 4, pp. 16–31. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.016-031.
50. Petrov A.G. Exact solution of the Navier-Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 642–646. DOI: 10.1134/S0021894412050021.
51. Zyryanov V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techeniy* [Theory of steady ocean currents]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1985. (In Russian).
52. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87. (In Russian).
53. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A class of exact solutions for two–dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya “Matematika”* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”], 2020, vol. 32, pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).
54. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 3, pp. 29–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.
55. Meleshko S.V., Pukhnachev V.V. On a class of partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 208–216.
56. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier-Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, vol. 1, pp. 3–76. (In Russian).
57. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 464, p. 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.
58. Berker R. An exact solution of the Navier-Stokes equation - the vortex with curvilinear axis. *Int. J. Eng. Sci.* 1982, vol. 20, p. 217–230.
59. Berker R. A new solution of the Navier-Stokes equation for the motion of a fluid contained between two parallel plates rotating about the same axis. *Arch. Mech.*, 1979, vol. 31, pp. 265–280.
60. Dorrepaal J.M. An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 163, p. 141–147.
61. Ekman V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, pp. 1–52.
62. Gupta A.S. Ekman layer on a porous plate. *Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, pp. 930–931.
63. Marques F., Sanchez J., Weidman P.D. Generalized Couette–Poiseuille flow with boundary mass transfer. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 374, pp. 221–249.
64. Rajagopal K.R. A class of exact solutions to the Navier-Stokes equations. *Int. J. Eng. Sci.*, 1984, vol. 22, pp. 451–458.

65. Rasmussen H. Steady flow between two porous disks. *ZAMP*, 1970, vol. 21, pp. 187–195.
66. Wang C.Y. Exact solution of the Navier-Stokes equations-the generalized Beltrami flows, review and extension. *Acta Mech.*, 1990, vol. 81, p. 69–74.
67. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 159–177.
68. Wang C.Y. Stagnation flow with slip: Exact solution of the Navier-Stokes equations. *ZAMP*, 2003, vol. 54, pp. 184–189.
69. Wang, C.Y. On a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, pp. 696–698.

Подана в журнал: 15.12.2020

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.006-025

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

Н. В. Бурмашева^{a)*}, Е. Ю. Просвирыков^{b)}

*Институт машиноведения УрО РАН,
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: nat_burm@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: +7 (343) 374-53-30

В статье представлен новый класс точных решений системы уравнений Навье–Стокса, позволяющий учитывать нелинейное распределение поля давления и влияние внешних объемных сил, а также принимать во внимание возможность горизонтального оттока/притока жидкости при моделировании ее движения в вертикальном направлении. Данный класс является обобщением класса Линя–Сидорова–Аристова, предполагающего линейное распределение двух проекций вектора скорости течения жидкости по части координат и независимость от этих координат третьей проекции вектора скорости.

Ключевые слова: класс точных решений, уравнение Навье–Стокса, переопределенная система, поле массовых (объемных) сил.

1. Введение

Течение реальных жидкостей не изолировано от влияния окружающего мира. Любое течение жидкости подвержено влиянию незримых полей, наличие которых тем не менее регистрируется соответствующей аппаратурой. Примером такого поля является поле тяготения. Помимо силы тяжести большое влияние на характеристики течения оказывают также магнитное и электрическое поля, особенно когда речь идет о течении ферромагнитных жидкостей [1–20]. Жидкости такого типа не существуют в природе, они были созданы искусственным путем посредством добавления измельченного магнитного материала в жидкость-носитель при поиске способов перемещения ракетного топлива в условиях низкой гравитации [5]. Ввиду структуры данного типа сред (твердые частицы + жидкость-носитель) оказывается принципиально важным также учитывать и распределение поля концентрации твердых частиц, входящих в состав. Таким образом, класс силовых и других полей, индуцирующих движение жидкости, а значит, и влияющих на ее кинематические характеристики, достаточно широк. Кроме того, интенсивность указанных полей имеет существенно неоднородное и нелинейное распределение в пространстве, что также приводит к необходимости учета этих факторов в соотношениях, описывающих динамику жидкостей.

Традиционно при описании течений вязких жидкостей используется модель несжимаемой вязкой жидкости, состоящая из уравнения Навье–Стокса и уравнения несжимаемости [21–24]. Кроме того, довольно распространенным является подход, основанный на гипотезе Бусинеска [25–30], суть которого заключается в замене плотности жидкости линейной функцией приращения температуры (и/или концентрации в общем случае) в представлении для силы тяжести. При этом в случае изотермического процесса (за счет нулевого приращения температу-

ры) получается, что член уравнения Навье–Стокса, отвечающий за влияние силы тяжести, отбрасывается. На самом деле это не так, влияние гравитации на параметры течения сохраняется. Оно пропадает только в случае движения жидкости в условиях невесомости. При отсутствии гравитации (или при микрогравитации) на первый план как раз выходят электрические и магнитные воздействия на жидкость, а также воздействия инерционной природы. Система уравнений указанной математической модели является квадратично нелинейной, что значительно затрудняет нахождение точных решений, поскольку не всегда очевидным является даже факт существования решения, не говоря уже о том, какова его структура.

Основным подходом в этом направлении считается метод построения семейств точных решений уравнений гидродинамики. Одними из первых точных решений были решения Куэтта [31], Пуазейля [32] и Стокса, описанные им в виде двух задач [33]. Эти решения являются частными случаями класса, объединяющего функции, линейные по части координат:

$$\begin{aligned} V_x(x, y, z, t) &= U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y; \\ V_y(x, y, z, t) &= V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y; \\ V_z &= W(z, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Класс (1) был предложен для задач магнитной гидродинамики Линем [34]. Достоинством данного класса является относительно простая структура, если говорить о зависимости от пространственных координат x, y , но при этом данный класс способен описывать существенно трехмерные течения со сложной динамикой за счет зависимости общего вида от вертикальной координаты z и временной координаты t . Однако при всех его положительных сторонах предложенный класс не учитывает влияние внешних массовых сил и наличие пространственных ускорений [35] для вертикальной скорости V_z .

Класс Линя широко распространен и при решении задач конвекции [36, 37] и задач термодиффузии [38]. Стоит отметить, что при рассмотрении этих проблем значительно усложняются сами уравнения определяющей системы (по сравнению с изотермическим случаем) ввиду учета дополнительных (тепловых, концентрационных) факторов, а также увеличивается число соотношений, входящих в базовую систему уравнений: добавляются уравнение теплопроводности и/или уравнение, описывающее изменение концентрации при течении жидкости. Это приводит к тому, что в случае неизотермических задач исследователи преимущественно рассматривают частные случаи класса Линя, в которых либо игнорируют вертикальную скорость [39, 40], либо полагают равными нулю некоторые (или все) пространственные ускорения [41, 42], либо принимают оба упрощения совместно [43–50].

В настоящей работе приводится класс точных решений, обобщающий семейство (1) за счет учета неоднородности распределения третьей компоненты вектора скорости и представления давления и внешнего поля объемных сил в виде полной кубики от двух пространственных координат с зависимостями общего вида их коэффициентов от времени и третьей пространственной координаты.

2. Постановка задачи

Нестационарное изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости, движущейся в силовом поле, описывается уравнением Навье–Стокса, дополненным уравнением несжимаемости [21–24]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}; \quad (2)$$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0. \quad (3)$$

В уравнении Навье–Стокса (2) и уравнении несжимаемости (3) приняты обозначения: $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости; P – нормированное на постоянную плотность жидкости отклонение давления от гидростатического значения; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – вектор объемной (массовой) силы; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ – оператор Гамильтона; $(\mathbf{V}, \nabla) = \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – конвективная производная; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа. Заметим, что при записи уравнений (2) поле массовых сил \mathbf{F} не является потенциальным. Без ограничения общности полагаем, что оно соленоидально. Если поле является потенциальным, то его учет можно реализовать, вводя модифицированное давление [26, 51].

Координатная форма записи системы уравнений (2)–(3) имеет вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + F_x; \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + F_y; \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + F_z; \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Каждое из уравнений системы (4)–(7) определяет связь между неизвестными этой системы, в роли которых выступают компоненты V_x, V_y, V_z вектора скорости и поле давления P при известном распределении массовой силы \mathbf{F} . Данные связи преимущественно имеют нелинейный характер, определяемый членами конвективной производной.

3. Класс точных решений

Течения реальных жидкостей характеризуются неоднородным распределением кинетико-силовых параметров внутри и на границах области течения. По этой причине будем искать точное решение уравнений (4)–(7) в виде следующих форм [40, 52–69]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y; \\ V_y &= V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y; \\ V_z &= W(z, t) + w_1(z, t)x + w_2(z, t)y; \\ P &= P_0(z, t) + P_1(z, t)x + P_2(z, t)y + P_{11}(z, t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(z, t)xy + P_{22}(z, t)\frac{y^2}{2} + \\ &+ P_{111}(z, t)\frac{x^3}{6} + P_{112}(z, t)\frac{x^2}{2}y + P_{122}(z, t)x\frac{y^2}{2} + P_{222}(z, t)\frac{y^3}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_0^x(z,t) + F_1^x(z,t)x + F_2^x(z,t)y + F_{11}^x(z,t)x^2 + F_{12}^x(z,t)xy + F_{22}^x(z,t)y^2 + \\
 &\quad + F_{111}^x(z,t)x^3 + F_{112}^x(z,t)x^2y + F_{122}^x(z,t)xy^2 + F_{222}^x(z,t)y^3; \\
 F_y &= F_0^y(z,t) + F_1^y(z,t)x + F_2^y(z,t)y + F_{11}^y(z,t)x^2 + F_{12}^y(z,t)xy + F_{22}^y(z,t)y^2 + \\
 &\quad + F_{111}^y(z,t)x^3 + F_{112}^y(z,t)x^2y + F_{122}^y(z,t)xy^2 + F_{222}^y(z,t)y^3; \\
 F_z &= F_0^z(z,t) + F_1^z(z,t)x + F_2^z(z,t)y + F_{11}^z(z,t)x^2 + F_{12}^z(z,t)xy + F_{22}^z(z,t)y^2 + \\
 &\quad + F_{111}^z(z,t)x^3 + F_{112}^z(z,t)x^2y + F_{122}^z(z,t)xy^2 + F_{222}^z(z,t)y^3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку коэффициенты распределений (8) зависят только от двух переменных – времени t и вертикальной координаты z , условимся всюду далее обозначать производную по времени точкой, а производную по пространственной координате z – штрихом.

Вначале осуществим подстановку выражений (8) в уравнение несжимаемости (7):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(U + u_1x + u_2y)}{\partial x} + \frac{\partial(V + v_1x + v_2y)}{\partial y} + \frac{\partial(W + w_1x + w_2y)}{\partial z} &= 0; \\
 u_1 + v_2 + W' + w_1'x + w_2'y &= 0.
 \end{aligned}$$

С учетом независимости координат выбранной декартовой системы с необходимостью следует вывод о том, что пространственные ускорения w_1 , w_2 могут зависеть только от времени t , при этом однородная составляющая скорости должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$W' = -(u_1 + v_2). \tag{9}$$

На основании полученных выводов можем внести корректировку в структуру рассматриваемого класса (8):

$$\begin{aligned}
 V_x &= U(z,t) + u_1(z,t)x + u_2(z,t)y; \\
 V_y &= V(z,t) + v_1(z,t)x + v_2(z,t)y; \\
 V_z &= W(z,t) + w_1(t)x + w_2(t)y; \\
 P &= P_0(z,t) + P_1(z,t)x + P_2(z,t)y + P_{11}(z,t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(z,t)xy + P_{22}(z,t)\frac{y^2}{2} + \\
 &\quad + P_{111}(z,t)\frac{x^3}{6} + P_{112}(z,t)\frac{x^2}{2}y + P_{122}(z,t)x\frac{y^2}{2} + P_{222}(z,t)\frac{y^3}{6}; \\
 F_x &= F_0^x(z,t) + F_1^x(z,t)x + F_2^x(z,t)y + F_{11}^x(z,t)x^2 + F_{12}^x(z,t)xy + F_{22}^x(z,t)y^2 + \\
 &\quad + F_{111}^x(z,t)x^3 + F_{112}^x(z,t)x^2y + F_{122}^x(z,t)xy^2 + F_{222}^x(z,t)y^3; \\
 F_y &= F_0^y(z,t) + F_1^y(z,t)x + F_2^y(z,t)y + F_{11}^y(z,t)x^2 + F_{12}^y(z,t)xy + F_{22}^y(z,t)y^2 + \\
 &\quad + F_{111}^y(z,t)x^3 + F_{112}^y(z,t)x^2y + F_{122}^y(z,t)xy^2 + F_{222}^y(z,t)y^3; \\
 F_z &= F_0^z(z,t) + F_1^z(z,t)x + F_2^z(z,t)y + F_{11}^z(z,t)x^2 + F_{12}^z(z,t)xy + F_{22}^z(z,t)y^2 +
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$+F_{111}^z(z,t)x^3 + F_{112}^z(z,t)x^2y + F_{122}^z(z,t)xy^2 + F_{222}^z(z,t)y^3.$$

Подставим далее уточненный класс (10) в первое уравнение Навье–Стокса (4) и вычислим соответствующие производные:

$$\begin{aligned} \dot{U} + \dot{u}_1x + \dot{u}_2y + (U + u_1x + u_2y)u_1 + (V + v_1x + v_2y)u_2 + (W + w_1x + w_2y)(U' + u_1'x + u_2'y) = \\ = - \left(P_1 + P_{11}x + P_{12}y + P_{111} \frac{x^2}{2} + P_{112}xy + P_{122} \frac{y^2}{2} \right) + \nu(U'' + u_1'x + u_2'y) + \\ + F_0^x + F_1^x x + F_2^x y + F_{11}^x x^2 + F_{12}^x xy + F_{22}^x y^2 + F_{111}^x x^3 + F_{112}^x x^2 y + F_{122}^x xy^2 + F_{222}^x y^3. \end{aligned}$$

Учитывая независимость пространственных переменных x, y, z , данное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \dot{U} + Uu_1 + Vu_2 + WU' &= -P_1 + \nu U'' + F_0^x; \\ \dot{u}_1 + u_1^2 + u_2v_1 + Wu_1' + U'w_1 &= -P_{11} + \nu u_1'' + F_1^x; \\ \dot{u}_2 + u_1u_2 + u_2v_2 + Wu_2' + U'w_2 &= -P_{12} + \nu u_2'' + F_2^x; \\ w_1u_1' &= -\frac{P_{111}}{2} + F_{11}^x; \\ w_1u_2' + w_2u_1' &= -P_{112} + F_{12}^x; \\ w_2u_2' &= -\frac{P_{122}}{2} + F_{22}^x, F_{111}^x = F_{112}^x = F_{122}^x = F_{222}^x = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичным образом подстановка класса (10) во второе уравнение Навье–Стокса (5) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{V} + Uv_1 + Vv_2 + WV' &= -P_2 + \nu V'' + F_0^y; \\ \dot{v}_1 + u_1v_1 + v_1v_2 + Wv_1' + V'w_1 &= -P_{12} + \nu v_1'' + F_1^y; \\ \dot{v}_2 + u_2v_1 + v_2^2 + Wv_2' + V'w_2 &= -P_{22} + \nu v_2'' + F_2^y; \\ w_1v_1' &= -\frac{P_{112}}{2} + F_{11}^y; \\ w_1v_2' + w_2v_1' &= -P_{122} + F_{12}^y; \\ w_2v_2' &= -\frac{P_{222}}{2} + F_{22}^y; \\ F_{111}^y &= F_{112}^y = F_{122}^y = F_{222}^y = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате подстановки класса точных решений (10) в последнее уравнение Навье–Стокса получим систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{W} + Uw_1 + Vw_2 + WW' &= -P_0' + \nu W'' + F_0^z; \\ \dot{w}_1 + u_1w_1 + v_1w_2 + w_1W' &= -P_1' + F_1^z; \\ \dot{w}_2 + u_2w_1 + v_2w_2 + w_2W' &= -P_2' + F_2^z; \\ P_{11}' &= 2F_{11}^z, P_{12}' = F_{12}^z, P_{22}' = 2F_{22}^z; \end{aligned} \quad (13)$$

$$P'_{111} = 6F^z_{111}, P'_{112} = 2F^z_{112}, P'_{122} = 2F^z_{122}, P'_{222} = 6F^z_{222}.$$

Таким образом, система уравнений (4)–(7) сводится к системе двадцати трех уравнений (9), (11), (12), (13) для определения девятнадцати компонент форм (10):

$$\begin{aligned} \dot{U} + Uu_1 + Vu_2 + WU' &= -P_1 + \nu U'' + F_0^x; \\ \dot{u}_1 + u_1^2 + u_2v_1 + Wu'_1 + U'w_1 &= -P_{11} + \nu u''_1 + F_1^x; \\ \dot{u}_2 + u_1u_2 + u_2v_2 + Wu'_2 + U'w_2 &= -P_{12} + \nu u''_2 + F_2^x; \\ w_1u'_1 &= -\frac{P_{111}}{2} + F_{11}^x; \\ w_1u'_2 + w_2u'_1 &= -P_{112} + F_{12}^x; \\ w_2u'_2 &= -\frac{P_{122}}{2} + F_{22}^x; \\ \dot{V} + Uv_1 + Vv_2 + WV' &= -P_2 + \nu V'' + F_0^y; \\ \dot{v}_1 + u_1v_1 + v_1v_2 + Wv'_1 + V'w_1 &= -P_{12} + \nu v''_1 + F_1^y; \\ \dot{v}_2 + u_2v_1 + v_2^2 + Wv'_2 + V'w_2 &= -P_{22} + \nu v''_2 + F_2^y; \\ w_1v'_1 &= -\frac{P_{112}}{2} + F_{11}^y; \\ w_1v'_2 + w_2v'_1 &= -P_{122} + F_{12}^y; \\ w_2v'_2 &= -\frac{P_{222}}{2} + F_{22}^y; \\ \dot{W} + Uw_1 + Vw_2 + WW' &= -P'_0 + \nu W'' + F_0^z; \\ \dot{w}_1 + u_1w_1 + v_1w_2 + w_1W' &= -P'_1 + F_1^z; \\ \dot{w}_2 + u_2w_1 + v_2w_2 + w_2W' &= -P'_2 + F_2^z; \\ P'_{11} &= 2F^z_{11}, P'_{12} = F^z_{12}, P'_{22} = 2F^z_{22}; \\ P'_{111} &= 6F^z_{111}, P'_{112} = 2F^z_{112}, P'_{122} = 2F^z_{122}, P'_{222} = 6F^z_{222}; \\ W' &= -(u_1 + v_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Напомним, что кубические слагаемые в разложениях F_x и F_y полагаются тождественно равными нулю, так как из уравнений редуцированных систем (11) и (12) непосредственно следует равенство нулю коэффициентов $F^x_{111}, F^x_{112}, F^x_{122}, F^x_{222}$ и $F^y_{111}, F^y_{112}, F^y_{122}, F^y_{222}$.

Также подчеркнем, что последние уравнения подсистемы (13) требуют согласованности вида коэффициентов при нелинейных членах поля давления и структуры коэффициентов, определяющих вектор объемных сил \mathbf{F} , по вертикальной координате z , но допускают зависимости произвольного вида по временной переменной t .

Важным частным случаем течений вязкой несжимаемой жидкости являются установившиеся течения. Такие течения характеризуются тем, что гидродинамические поля не зависят от времени t . Это приводит к тому, что в уравнениях переопределенной системы (14) пропадают члены, содержащие частные производные по времени:

$$\begin{aligned} W' &= -(u_1 + v_2); \\ Uu_1 + Vu_2 + WU' &= -P_1 + \nu U'' + F_0^x; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^2 + u_2 v_1 + Wu_1' + U'w_1 &= -P_{11} + \nu u_1'' + F_1^x; \\
 u_1 u_2 + u_2 v_2 + Wu_2' + U'w_2 &= -P_{12} + \nu u_2'' + F_2^x; \\
 w_1 u_1' &= -\frac{P_{111}}{2} + F_{11}^x; \\
 w_1 u_2' + w_2 u_1' &= -P_{112} + F_{12}^x; \\
 w_2 u_2' &= -\frac{P_{122}}{2} + F_{22}^x; \\
 Uv_1 + Vv_2 + Wv' &= -P_2 + \nu V'' + F_0^y; \\
 u_1 v_1 + v_1 v_2 + Wv_1' + V'w_1 &= -P_{12} + \nu v_1'' + F_1^y; \\
 u_2 v_1 + v_2^2 + Wv_2' + V'w_2 &= -P_{22} + \nu v_2'' + F_2^y; \\
 w_1 v_1' &= -\frac{P_{112}}{2} + F_{11}^y; \\
 w_1 v_2' + w_2 v_1' &= -P_{122} + F_{12}^y; \\
 w_2 v_2' &= -\frac{P_{222}}{2} + F_{22}^y; \\
 Uw_1 + Vw_2 + WW' &= -P_0' + \nu W'' + F_0^z; \\
 u_1 w_1 + v_1 w_2 + w_1 W' &= -P_1' + F_1^z; \\
 u_2 w_1 + v_2 w_2 + w_2 W' &= -P_2' + F_2^z; \\
 P_{11}' &= 2F_{11}^z, \quad P_{12}' = F_{12}^z, \quad P_{22}' = 2F_{22}^z; \\
 P_{111}' &= 6F_{111}^z, \quad P_{112}' = 2F_{112}^z, \quad P_{122}' = 2F_{122}^z, \quad P_{222}' = 6F_{222}^z.
 \end{aligned}$$

При этом свойство переопределенности наследуется от системы (14). Этот факт объясняется тем, что рассматриваемое свойство стационарности потока не меняет ни число неизвестных функций, ни число уравнений, а лишь немного упрощает вид последних.

4. Условие разрешимости

В системе дифференциальных уравнений (14) число неизвестных значительно меньше числа соотношений для их вычисления. Таким образом, имеет место переопределенность системы определяющих соотношений (15). В этом случае залогом успешного интегрирования рассматриваемой системы (нахождения нетривиального ее решения) является подбор условий совместности, удовлетворение которым гарантировало бы попарную непротиворечивость уравнений системы.

Один из очевидных вариантов таких условий (необязательно единственных) связан с тем фактом, что в системе (14) (или его модификации (15)) слагаемое P_{112} давления P определяется из двух уравнений:

$$w_1 u_2' + w_2 u_1' = -P_{112} + F_{12}^x, \quad w_1 v_1' = -\frac{P_{112}}{2} + F_{11}^y.$$

Таким образом, должно быть справедливо равенство

$$w_1 u_2' + w_2 u_1' - F_{12}^x = 2w_1 v_1' - 2F_{11}^y.$$

После однократного интегрирования данного соотношения по пространственной переменной z получим связь между пространственными ускорениями:

$$w_1 u_2 + w_2 u_1 - 2w_1 v_1 = \int (F_{12}^x - 2F_{11}^y) dz + \alpha(t).$$

Аналогичным образом после изучения структуры уравнений

$$w_2 u_2' = -\frac{P_{122}}{2} + F_{22}^x, \quad w_1 v_2' + w_2 v_1' = -P_{122} + F_{12}^y,$$

определяющих слагаемое P_{122} , получим еще одно ограничение на выбор вида пространственных ускорений:

$$w_1 v_2 + w_2 v_1 - 2w_2 u_2 = \int (F_{12}^y - 2F_{22}^x) dz + \beta(t).$$

Здесь $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – произвольные функции времени t .

5. Течение Стокса

Рассмотрим ползущее течение вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса [33]. Пренебрегая в уравнении (1) конвективной производной $(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V}$, получим линейную версию уравнений Навье–Стокса – систему Стокса [26]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}.$$

В координатной форме это уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + F_x; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + F_y; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + F_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение несжимаемости (7) остается неизменным.

Подстановка класса (10) в систему (16) приводит к системе:

$$\begin{aligned} W' &= -(u_1 + v_2); \\ \dot{U} &= -P_1 + \nu U'' + F_0^x; \\ \dot{u}_1 &= -P_{11} + \nu u_1'' + F_1^x; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_2 &= -P_{12} + \nu u_2'' + F_2^x; \\ \dot{V} &= -P_2 + \nu V'' + F_0^y; \\ \dot{v}_1 &= -P_{12} + \nu v_1'' + F_1^y; \\ \dot{v}_2 &= -P_{22} + \nu v_2'' + F_2^y; \\ \dot{W} &= -P_0' + \nu W'' + F_0^z; \\ \dot{w}_1 &= -P_1' + F_1^z; \\ \dot{w}_2 &= -P_2' + F_2^z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{11}' &= 2F_{11}^z, P_{12}' = F_{12}^z, P_{22}' = 2F_{22}^z; \\ P_{111} &= 2F_{11}^x, P_{112} = F_{12}^x, P_{122} = 2F_{22}^x; \\ P_{112} &= 2F_{11}^y, P_{122} = F_{12}^y, P_{222} = 2F_{22}^y; \\ P_{111}' &= 6F_{111}^z; P_{112}' = 2F_{112}^z; P_{122}' = 2F_{122}^z; P_{222}' = 6F_{222}^z.\end{aligned}\tag{18}$$

Отметим, что уравнения подсистемы (18) позволяют определить вид (в квадратурах) нелинейных компонент поля давления по известному распределению поля массовых сил, а также получить дополнительные ограничения на коэффициенты кубических слагаемых, определяющих структуру проекций вектора объемных сил \mathbf{F} :

$$\begin{aligned}P_{11} &= 2 \int F_{11}^z dz; \\ P_{12} &= \int F_{12}^z dz; \\ P_{22} &= 2 \int F_{22}^z dz; \\ P_{111} &= 2F_{11}^x = 6 \int F_{111}^z dz; \\ P_{112} &= F_{12}^x = 2F_{11}^y = 2 \int F_{112}^z dz; \\ P_{122} &= 2F_{22}^x = F_{12}^y = 2 \int F_{122}^z dz; \\ P_{222} &= 2F_{22}^y = 6 \int F_{222}^z dz.\end{aligned}\tag{19}$$

6. Плоское течение Стокса

Рассмотрим в качестве примера частный случай, полагая скорость $V_y = 0$. При этом система (17) упрощается, а группа соотношений (19) дополняется рядом новых равенств:

$$\begin{aligned}W' &= -u_1; \\ \dot{U} &= -P_1 + \nu U'' + F_0^x; \\ \dot{u}_1 &= -P_{11} + \nu u_1'' + F_1^x; \\ \dot{u}_2 &= -P_{12} + \nu u_2'' + F_2^x; \\ \dot{W} &= -P_0'' + \nu W'' + F_0^z; \\ \dot{w}_1 &= -P_1'' + F_1^z; \\ \dot{w}_2 &= -P_2'' + F_2^z;\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= F_0^y; \\
 P_{11} &= 2 \int F_{11}^z dz; \\
 P_{12} &= F_1^y = \int F_{12}^z dz; \\
 P_{22} &= F_2^y = 2 \int F_{22}^z dz; \\
 P_{111} &= 2F_{11}^x = 6 \int F_{111}^z dz; \\
 P_{112} &= F_{12}^x = 2F_{11}^y = 2 \int F_{112}^z dz; \\
 P_{122} &= 2F_{22}^x = F_{12}^y = 2 \int F_{122}^z dz; \\
 P_{222} &= 2F_{22}^y = 6 \int F_{222}^z dz.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (20)–(21) описывают установившееся плоское течение Стокса (течение Стокса вдоль плоскости Oxz).

Отметим, что переход к частному случаю $V_y = 0$ привел к тому, что переопределенная система стала недоопределенной: в систему (20) входят семь уравнений для определения восьми неизвестных функций – шести компонент поля скорости, фонового давления P_0 и пространственного градиента P_1 . Рассмотрим ее более подробно.

Уравнение $\dot{w}_2 = -P_2' + F_2^z$ подсистемы (20) можно переписать в силу первого соотношения подсистемы (21):

$$\dot{w}_2 = -P_2' + F_2^z = F_2^z - (F_0^y)'$$

Получившееся уравнение является линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами относительно пространственного ускорения w_2 (при известном распределении массовых сил). Его решение легко находится:

$$w_2 = \int \left(F_2^z - (F_0^y)' \right) dt,$$

поэтому всюду далее можно считать компоненту w_2 известной функцией.

Уравнения $\dot{u}_1 = -P_{11} + \nu u_1'' + F_1^x$, $\dot{u}_2 = -P_{12} + \nu u_2'' + F_2^x$ системы (20) являются нестационарными уравнениями типа неоднородного одномерного уравнения теплопроводности, решение которого находится методом декомпозиции. Интегрирование уравнений такого типа производится с помощью стандартных методик, поэтому сам алгоритм интегрирования здесь не приводится, и всюду далее мы считаем пространственные ускорения u_1, u_2 известными функциями. Зная вид пространственного ускорения u_1 , определяем вид однородной компоненты вертикальной скорости:

$$W = - \int u_1 dz.$$

Затем это выражение подставляем в уравнение $\dot{W} = -P'_0 + \nu W'' + F_0^z$ и определяем фоновое давление P_0 :

$$P_0 = \nu W' + \int (F_0^z - \dot{W}) dz.$$

Таким образом, остались два уравнения ($\dot{U} = -P_1 + \nu U'' + F_0^x$ и $\dot{w}_1 = -P'_1 + F_1^z$) подсистемы (20), связывающие три неизвестных функции – продольный градиент давления P_1 , скорость U и пространственное ускорение w_1 . Заметим, что сложившаяся ситуация обосновывается недоопределенностью системы. Таким образом, для получения решения этих двух уравнений необходимо знание дополнительных фактов о структуре хотя бы одной из трех указанных функций, например, о продольном градиенте P_1 поля давления P .

7. Заключение

В статье приведен новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса, описывающий изотермические течения вязких жидкостей в поле массовых сил. Отличительной особенностью указанных решений является трехмерное представление для вертикальной компоненты вектора скорости, а также кубическое представление для поля давления и поля объемных сил. Получена редуцированная система дифференциальных уравнений как для случая установившихся, так и неустановившихся течений. Обсуждены некоторые вопросы совместности получаемых соотношений. Показано, что данные системы допускают аналитическое интегрирование, при том однозначным образом.

Литература

1. Шабловский О. Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственнеоднородном силовом поле // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2020. – № 64. – С. 146–155. – DOI: 10.17223/19988621/64/11.
2. Мануйлович С. В. Продольно-периодическое течение вязкой жидкости, порождаемые пристеночной объемной силой // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2015. – № 4. – С. 59–67.
3. Мануйлович С. В. Управление поперечным течением в пограничном слое на скользящем крыле с помощью пристеночной объемной силы // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2020. – № 1. – С. 45–56. – DOI: 10.31857/S0568528120010090.
4. Rosensweig R. E. Magnetic fluids // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 19, no. 1. – P. 437–463. – DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002253.
5. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика / пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
6. Yerin C. V., Vivchar V. I. Ellipsometry of magnetic fluid in a magnetic field // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2020. – Vol. 498. – P. 166144. – DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166144.
7. Wei Pan, Jianghong Gong. Effects of magnetic fluid on magnetic fluid damper // Key Engineering Materials. – 2012. – Vols. 512–515. – P. 1479–1483. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.512-515.1479.
8. Modification of diamagnetic materials using magnetic fluids / I. Safarik, J. Prochazkova, E. Baldikova, M. Timko, P. Kopcansky, M. Rajnak, N. Torma, K. Pospiskova // Ukr. J. Phys. – 2020. – Vol. 65, no. 9. – P. 751–760. – DOI: 10.15407/ujpe65.9.751.
9. Horváth B., Szalai I. Nonlinear magnetic properties of magnetic fluids for automotive applications // Hungarian Journal of Industry and Chemistry. – 2020. – Vol. 48, no. 1. – P. 61–65. – DOI: 10.33927/hjic-2020-09.

10. Брацун Д. А., Вяткин В. А., Мухаматуллин А. Р. О точных нестационарных решениях уравнений вибрационной конвекции // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 433–444. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35.
11. Конвективные процессы в невесомости / В. И. Полежаев, М. С. Белло, Н. А. Вerezуб, К. Г. Дубовик, А. П. Лебедев, С. А. Никитин, Д. С. Павловский, А. И. Федюшкин. – М. : Наука, 1991. – 242 с.
12. Полежаев В. И., Сазонов В. В. Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы. Аннотации докладов научно-исследовательского семинара. – М. : Институт проблем механики РАН им. В. М. Келдыша (препринт № 898), 2009. – 76 с.
13. Суржигов С. Т. Гиперзвуковое обтекание разреженным газом поверхностного тлеющего разряда с внешним магнитным полем. – М. : Ин-т проблем механики РАН, 2011. – 274 с.
14. Kedrinskiy V. K. Role of nuclei density as a “hidden” parameter in the formation of anomalous zones in a heavy cavitating magma // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – Vol. 55. – P. 276–281. – DOI: 10.1134/S0021894414020102.
15. Afonin V. V., Petrov V. Y. On exact solutions for a Luttinger liquid with one impurity // Jetp Lett. – 2019. – Vol. 109. – P. 762–767. – DOI: 10.1134/S0021364019110031.
16. Kouwn S., Moon T., Oh P. Exact solution and exotic fluid in cosmology // Entropy. – 2012. – Vol. 14. – P. 1771–1783. – DOI: 10.3390/e14091771.
17. Аристов С. Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 377. – С. 477–480.
18. Аристов С. Н. Точное решение задачи о точечном источнике // Доклады Академии наук. – 1995. – Т. 343, № 1. – С. 50–52.
19. Aristov S. N. Three-Dimensional Conical Viscous Incompressible Fluid Flows // Fluid Dynamics. – 1998. – Vol. 33, no. 929. – DOI: 10.1007/BF02698663.
20. Aristov S. N., Grabovskii V. I. Self-similar solution of the Navier–Stokes equations governing gas flows in rotary logarithmically spiral two-dimensional channels // Fluid Dyn. – 1995 – Vol. 30. – P. 838–844. – DOI: 10.1007/BF02078198.
21. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / пер. с англ. – М. : Мир, 1981. – 408 с.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Теоретическая физика : том VI. – Изд. 4-е, стереотипное. – М. : Наука, 1988. – 736 с.
23. Хмельник С. И. Уравнения Навье–Стокса. Существование и метод поиска глобального решения. – Израиль, Mathematics in Computer Comp., 2010. – 106 с.
24. Рауз Х. Механика жидкости. – М. : Изд. литературы по строительству, 1967. – 392 с.
25. Boussinesq J. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section. – Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897. – 90 p.
26. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
27. Müller P. Boussinesq approximation. In the equations of oceanic motions. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – DOI:10.1017/CBO9780511617843.012.
28. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение для установившихся конвективных концентрационных течений типа Куэтта // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 3. – С. 337–349. – DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.27.
29. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // Journal of King Saud University – Science. – 2020. – Vol. 32, no. 8. – P. 3364–3371. – DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
30. Martyushev S. G., Sheremet M. A. Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in a three-dimensional enclosure with a heat source // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – Vol. 73. – P. 340–353. – DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.009.

31. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys.. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
32. Poiseuille J. Recherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres // Comptes Rendus. – 1840. – Vol. 11. – P. 961–967.
33. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums / G.G. Stokes // Camb. Philo. Trans. – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.
34. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.
35. Шмыглевский Ю. Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 231 с.
36. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. – 1989. – Вып. 2. – С. 34–40.
37. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : дис. ... докт. физ.-мат. наук : 01.02.05. – Владивосток : ИАПУ, 1990. – 330 с.
38. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. – 2016. – Т. 50, № 3. – С. 294–301. – DOI: 10.7868/S0040357116030027.
39. Prosviryakov E. Yu. A sufficient condition for the absence of strong and weak discontinuities in gas flows in flat channels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 3. – P. 25–40. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.025-040.
40. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2015. – Вып. 4. – С. 50–54.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Вып. 2. – С. 57–70. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070.
42. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the convective creep Couette-Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109.
43. Privalova V. V. and Prosviryakov E. Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of a viscous fluid layer under the lower boundary heating condition // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 4. – P. 44–55. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055.
44. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 23–39. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039.
45. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 1. – P. 6–23. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023.
46. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 2. – P. 61–75. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075.
47. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 1. – P. 6–42. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042.

48. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Complex stationary convection with third-kind boundary conditions at the boundaries of a fluid layer // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2016. – Iss. 2. – P. 34–47. – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.2.034-047.
49. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with Specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2017. – Iss. 4. – P. 16–31. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.016-031.
50. Petrov A. G. Exact solution of the Navier–Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2012 – Vol. 53, no. 5. – P. 642–646. – DOI: 10.1134/S0021894412050021.
51. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений. – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1985.
52. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2020. – Т. 26, вып. 2. – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
53. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
54. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 3. – P. 29–46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.
55. Meleshko S. V., Pukhnachev V. V. On a class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 1999. – Vol. 40, no. 2. – P. 208–216.
56. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*. – 2006. – Т. 1. – С. 6–76.
57. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215. – DOI: 10.1017/S0022112002001003.
58. Berker R. An exact solution of the Navier–Stokes equation – the vortex with curvilinear axis // *Int. J. Eng. Sci.* – 1982. – Vol. 20. – P. 217–230.
59. Berker R. A new solution of the Navier–Stokes equation for the motion of a fluid contained between two parallel plates rotating about the same axis // *Arch. Mech.* – 1979. – Vol. 31. – P. 265–280.
60. Dorrepaal J. M. An exact solution of the Navier–Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions // *J. Fluid Mech.* – 1986. – Vol. 163. – P. 141–147.
61. Ekman V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents // *Ark. Mat. Astron. Fys.* – 1905. – Vol. 2. – P. 1–52.
62. Gupta A. S. Ekman layer on a porous plate // *Phys. Fluids*. – 1972. – Vol. 15. – P. 930–931.
63. Marques F., Sanchez J., Weidman P. D. Generalized Couette – Poiseuille flow with boundary mass transfer // *J. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. 374. – P. 221–249.
64. Rajagopal K. R. A class of exact solutions to the Navier–Stokes equations // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – Vol. 22. – P. 451–458.
65. Rasmussen H. Steady flow between two porous disks // *ZAMP*. – 1970. – Vol. 21. – P. 187–195.
66. Wang C. Y. Exact solution of the Navier–Stokes equations-the generalized Beltrami flows, review and extension // *Acta Mech.* – 1990. – Vol. 81. – P. 69–74.
67. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // *Annual Review of Fluid Mechanics* – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177.

68. Wang C. Y. Stagnation flow with slip: Exact solution of the Navier–Stokes equations // ZAMP. – 2003. – Vol. 54. – P. 184–189.
69. Wang C. Y. On a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Appl. Mech. – 1966. – Vol. 33. – P. 696–698.

Received: 21.12.2020

Revised: 29.01.2021

Accepted: 26.02.2021

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.026-037

MODEL REPRESENTATION OF AN AXISYMMETRIC STEEL-ALUMINUM SAMPLE FOR SIMULATION OF A SEPARATION TEST

D. I. Kryuchkov^{a)*}, A. G. Zalazinsky^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0001-8585-3544>;  kru4koff@bk.ru;

^{b)}  <http://orcid.org/0000-0001-8352-5475>;  zalaz@list.ru

*Corresponding author. E-mail: kru4koff@bk.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation
 Tel.: +7 (343) 374 50 51; fax: +7 (343) 374 53 30

The object of research is a bimetallic composite material with a thin intermediate layer of aluminum. The aim of the work is to determine the features of the stress-strain state at the interlayer boundaries of a steel-aluminum composite material with a thin layer using the computational experiment method and to calculate separation resistance using the energy criterion. The stress-strain state along the boundaries of the joint at delamination is determined from the results of modeling the deformation of axisymmetric samples made of a steel-aluminum bimetallic composite material with a thin intermediate layer of aluminum. A series of computational experiments with varying the critical rate of elastic energy release under separation conditions, including under the combined influence of low temperatures and static loads, is implemented. The energy criterion is used to evaluate the stress level that leads to the separation of the bimetallic compound. The dependence of the separation resistance along the ring contour on the critical rate of elastic energy release, which is variable in the range of 0.1 to 0.5 N/mm, is calculated. It is established that, for the studied variants of the computational experiment, a rigid stress state with a predominance of normal tensile stresses is realized at the place of delamination onset.

Keywords: simulation modeling, deformation, axisymmetric sample, steel-aluminum composite material, joint boundary, crack.

Acknowledgment

We appreciate the effort of Dr. Berezin, senior professor of the Chair of Information Technologies and Design Automation, UrFU, in making computational experiments.

References

1. Krueger R. Virtual crack closure technique: History, approach, and applications. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, 57 (2), pp. 109–143. DOI: 10.1115/1.1595677.
2. Valvo P.S. A Physically Consistent Virtual Crack Closure Technique for I/II/III Mixed-mode Fracture Problems. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 1983–1987. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.319.
3. Liu P.F., Hou S.J., Chu J.K., Hu X.Y., Zhou C.L., Liu Y.L., Zheng J.Y., Zhao A., Yan L. Finite element analysis of post buckling and delamination of composite laminates using virtual crack closure technique. *Composite Structures*, 2011, vol. 93, iss. 5, pp. 1549–1560. DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.12.006.

4. Xie D., Biggers S. Strain energy release rate calculation for a moving delamination front of arbitrary shape based on the virtual crack closure technique. Part I: Formulation and validation. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, vol. 73, iss. 6, pp. 771–785. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.07.013.
5. Perov S.N., Chernyakin S.A. Research the applicability of finite element method for estimation the parameters of fracture mechanics of constructive elements from composites. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra Rossiyskoy Akademii Nauk*, 2013, vol. 15, no. 4 (2), pp. 480–483. (In Russian).
6. Chernyakin S.A., Skvortsov Y.V. Analysis of delamination propagation in composite structures. *Vestnik SibGAU*, 2014, no. 4 (56), pp. 249–255. (In Russian).
7. Glushkov S.V., Skvortsov Y.V., Perov S.N., Chernyakin S.A. Finite element analysis of panels with surface cracks. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1798, 020059. DOI: 10.1063/1.4972651.
8. Marjanović M., Meschke G., Vuksanović D. A finite element model for propagating delamination in laminated composite plates based on the Virtual Crack Closure method. *Composite Structures*, 2016, vol. 150, pp. 8–19. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.04.044.
9. Liu P.F., Islam M.M. A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composite laminates. *Composite Structures*, 2013, vol. 106, pp. 47–56. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.05.049.
10. Harper P.W., Hallett S.R. Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, pp. 4774–4792. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2008.06.004.
11. Azimi M., Mirjavadi S.S., Asli S.A., Hamouda A.M.S. Fracture Analysis of a Special Cracked Lap Shear (CLS) Specimen with Utilization of Virtual Crack Closure Technique (VCCT) by Finite Element Methods. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 304–314. DOI: 10.1007/s11668-017-0243-1.
12. Bonhomme J., Argüelles A., Viña J., Viña I. Numerical and experimental validation of computational models for mode I composite fracture failure. *Computational Materials Science*, 2009, vol. 45, pp. 993–998. DOI: 10.1016/j.commatsci.2009.01.005.
13. Shokrieh M.M., Rajabpour-Shirazi H., Heidari-Rarani M., Haghpanahi M. Simulation of mode I delamination propagation in multidirectional composites with R-curve effects using VCCT method. *Computational Materials Science*, 2012, vol. 65, pp. 66–73. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.06.025.
14. Martinez X., Rastellini F., Oller S., Floresa F., Oñate E. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B: Engineering*, 2011, vol. 42, iss. 2, pp. 134–144. DOI: 10.1016/j.compositesb.2010.09.013.
15. Skvortsov Yu.V., Chernyakin S.A., Glushkov S.V., Perov S.N. Simulation of fatigue delamination growth in composite laminates under mode I loading. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, pp. 7216–7224. DOI: 10.1016/j.apm.2016.03.019.
16. Amiri-Rad A., Mashayekhi M., van der Meer F.P. Cohesive zone and level set method for simulation of high cycle fatigue delamination in composite materials. *Composite Structures*, 2017, vol. 160, pp. 61–69. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.041.
17. May M., Hallett S.R. An advanced model for initiation and propagation of damage under fatigue loading – part I: Model formulation. *Composite Structures*, 2011, vol. 93, pp. 2340–2349. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.03.022.
18. Smirnov S.V., Myasnikova M.V., Igumnov A.S. Determination of the local shear strength of a layered metal composite material with a ductile interlayer after thermocycling. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 4, pp. 46–56. DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.046-056.
19. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 312 p. (In Russian).

Подана в журнал: 21.12.2020

УДК 539.415

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.026-037

МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЛЕАЛЮМИНИЕВОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБРАЗЦА ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИСПЫТАНИЯ НА ОТРЫВ

Д. И. Крючков^{a)*}, А. Г. Залазинский^{b)}

*Институт машиноведения (ИМАШ) УрО РАН,
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0001-8585-3544>;  kru4koff@bk.ru;

^{b)}  <http://orcid.org/0000-0001-8352-5475>;  zalaz@list.ru

* Ответственный автор. Эл. почта: kru4koff@bk.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 374–50–51; факс: +7 (343) 374–53–30

Объектом исследования является модель биметаллического композитного материала с тонким промежуточным слоем из алюминия. Цель работы – с использованием метода вычислительного эксперимента определить особенности напряженно-деформированного состояния на межслойных границах сталеалюминиевого композитного материала с тонкой прослойкой, и рассчитать сопротивление отрыва с использованием энергетического критерия. По результатам моделирования процесса деформирования осесимметричных образцов из сталеалюминиевого биметаллического композитного материала с тонким промежуточным слоем алюминия определено напряженно-деформированное состояние по границам соединения, при котором происходит расслоение. Реализована серия вычислительных экспериментов с варьированием критической скорости высвобождения упругой энергии в условиях отрыва, в том числе в условиях совместного влияния низких температур и статических нагрузок. С использованием энергетического критерия оценивается уровень напряжений, приводящий к расслоению биметаллического соединения. Рассчитана зависимость сопротивления отрыву по кольцевому контуру от величины критической скорости высвобождения упругой энергии, варьируемой в диапазоне 0,1–0,5 Н/мм. Установлено, что для исследованных вариантов вычислительного эксперимента в месте начала расслоения реализуется жесткое напряженное состояние с преобладанием нормальных растягивающих напряжений.

Ключевые слова: имитационное моделирование, деформирование, осесимметричный образец, сталеалюминиевый композитный материал, граница соединения, трещина.

1. Введение

В настоящее время слоистые металлические композитные материалы (СМКМ) на основе низкоуглеродистых сталей и алюминиевых сплавов, полученные методом горячей прокатки, находят все большее применение. При разработке процессов и изготовлении многослойных металлов оценку качества соединения производят путем механических и технологических испытаний образцов композиций, а также металлографических исследований границ соединения их компонентов. Однако известные способы механических испытаний, технологические пробы и металлографические исследования не всегда позволяют оценить качество соединения слоев, в частности для композитов с толщиной слоев или прослойкой <1 мм.

Одним из типовых видов повреждения слоистых материалов при деформации является расслоение по границе соединения. Поэтому определение прочностных характеристик границ раздела слоев композита при отрыве и сдвиге представляют практическую ценность

для обеспечения надежности изделия в условиях эксплуатации. Одним из распространенных способов определения прочности соединения слоев биметаллических соединений является испытание на срез и на отрыв с определением сопротивления срезу и отрыву по плоскости соприкосновения слоев. К нормативным документам исследования биметаллических слоистых материалов относятся технические условия ТУ 27.32.09.010-05. Согласно ТУ регламентированы образцы для испытаний. Однако для многослойных материалов оценка прочностных характеристик зависит от многих факторов, таких как схема испытания, конфигурация и размеры образца. Для одних и тех же условий испытаний различное количество слоев и схемы чередования слоев, а также их толщина, накладывают свои особенности формоизменения рассматриваемых материалов. Поэтому выявление закономерностей разрушения на границах многослойных металлических материалов при различных видах воздействия представляет собой достаточно сложную задачу, решение которой по-прежнему актуально.

Для описания процессов возникновения и роста трещин, а также расслоения, в СМКМ обычной практикой стало применение подходов механики разрушения с использованием современных методов вычислений. Для изучения поведения композитных структур и определения условий инициализации и роста расслоения находят применение подходы, основанные на расчете удельной работы расслоения. Одним из таких подходов является метод виртуального закрытия трещин (VCCT) [1]. Обоснование метода дано в работе [2]. Одно из главных допущений VCCT сводится к тому, что рост трещин происходит по заранее определенному пути, а именно по межфазным границам. В настоящее время этот подход применяется с использованием имитационного моделирования методом конечных элементов [3–9]. В работах [10–14] даны рекомендации по численной реализации подхода, установлены ограничения применения существующих формул, используемых для прогнозирования численной длины когезионной зоны, и демонстрируются модификации метода, необходимые для повышения точности, дано разъяснение относительно минимального количества конечных элементов в пределах зоны когезионного взаимодействия. Метод VCCT также успешно применяют в модифицированном виде для прогнозирования усталостного многоциклового разрушения конструкционных материалов [15–17].

Цель работы – с использованием метода вычислительного эксперимента определить особенности напряженно-деформированного состояния на межслойных границах сталеалюминиевого композитного материала с тонкой прослойкой, и рассчитать сопротивление отрыва с использованием энергетического критерия.

2. Материал и методика

В вычислительных экспериментах для изучения процессов формоизменения в слоистых композитах применялась модель образца, представленная на рис. 1.

Образец представляет собой осесимметричное тело, закрепленное на опоре, состоящее из трех пластин с вырезом под пуансон. Толщину слоев 1, 2 и 3 приняли следующими: 7,2 мм; 0,6 и 7,2 мм соответственно. В слоях 1 и 2 выполнено цилиндрическое отверстие под пуансон 4. Размер выреза под пуансон варьировался; его диаметр d составлял 6, 10 и 16 мм. Диаметр нижней пластины оставался постоянным $D = 20$ мм. Таким образом, отношение l/D изменялось в диапазоне 0,1–0,35. Имитационное моделирование проводили методом конечных элементов. Моделирование процесса осуществляли с применением расчетного модуля Standard в рамках САЕ-системы Abaqus. При этом была определена исходная трещина: $l_{тр}^0 = 0,4$ мм. Для реализации деформации образца задавали перемещение пуансона 4 и фиксировали усилие P . Для каждого слоя в табличной форме задавали свойства упругопластической модели материала с нелинейным упрочнением. Модель материала для верхней пластины соответствует свойствам стали 12X18H10T; для промежуточного слоя задавали свойства алюминиевого сплава АД1; для нижней пластины приняты свойства сплава АМг6. Свойства материалов заимствовали из работы [18], кривые упрочнения показаны на рис. 2. Модуль

упругости E и коэффициент Пуассона ν взяты также из литературы. Инструмент задавался как абсолютно жесткий. Контактное взаимодействие между заготовкой и инструментом описывалось законом трения Амантона–Кулона, коэффициент трения $\mu = 0,2$.

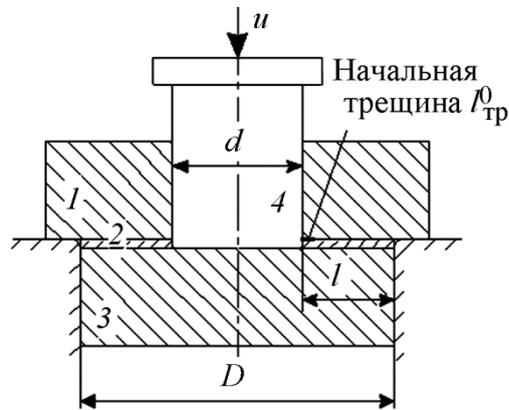


Рис. 1. Геометрическая модель образца: 1 – пластина из стали 12Х18Н10Т; 2 – промежуточный слой сплава АД1; 3 – пластина из сплава АМг6; 4 – пуансон

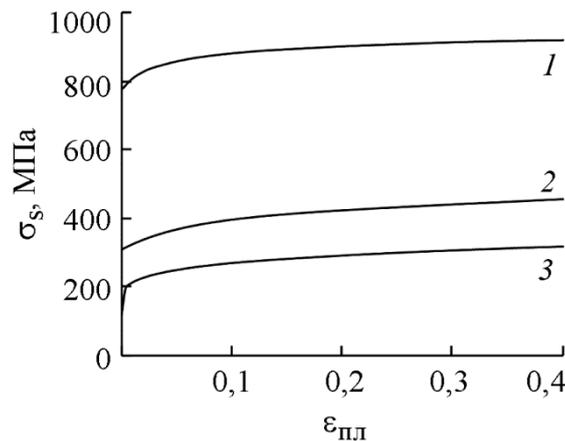


Рис. 2. Кривые упрочнения материалов компонентов композита: 1 – 12Х18Н10Т; 2 – АМг6; 3 – АД1

Напряжения σ рассчитывали как отношение значения прилагаемой на пуансон нагрузки P к площади контакта на межслойной границе по формуле:

$$\sigma = P / (\pi((D/2)^2 - ((d/2 + l_{тр})^2))), \quad (1)$$

где P – значение усилия на пуансон; $l_{тр}$ – длина трещины; D, d – параметры геометрической модели образца.

Для определения условий инициализации процесса образования и роста расслоения применяли критерий, обоснованный энергетическим условием [3], в соответствии с которым рассчитанная в узле скорость высвобождения упругой энергии G_I в условиях отрыва должна быть равна или выше значения критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} , заданной пользователем. Расчет энергетического условия осуществляется в Abaqus по формуле:

$$f = G_I / G_{IC} \geq 1. \quad (2)$$

Значение G_I вычисляется следующим образом:

$$G_I = -R_2 \Delta v / (2 \Delta a b), \quad (3)$$

где R_2 – реакция в вершине трещины, препятствующая ее раскрытию; Δv – вертикальное смещение между ближайшими к вершине трещины узлами в локальных координатах; b – ширина; Δa – длина элемента на фронте трещины (рис. 3).

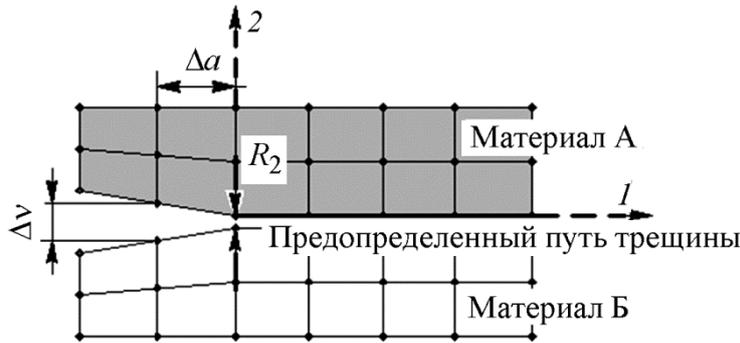


Рис. 3. Представление параметров расчета высвобождения упругой энергии G_I при расслоении образца по межслойной границе

3. Результаты и их обсуждение

Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния проводили при варьировании G_{IC} в диапазоне 0,1–0,5 Н/мм. Напряженно-деформированное состояние определяли по границам соединения с прослойкой для момента, при котором инициируется расслоение. Распределение компонентов тензора напряжений и пластических деформаций по границе соединения оценивали визуально, пример представлен на рис. 4.

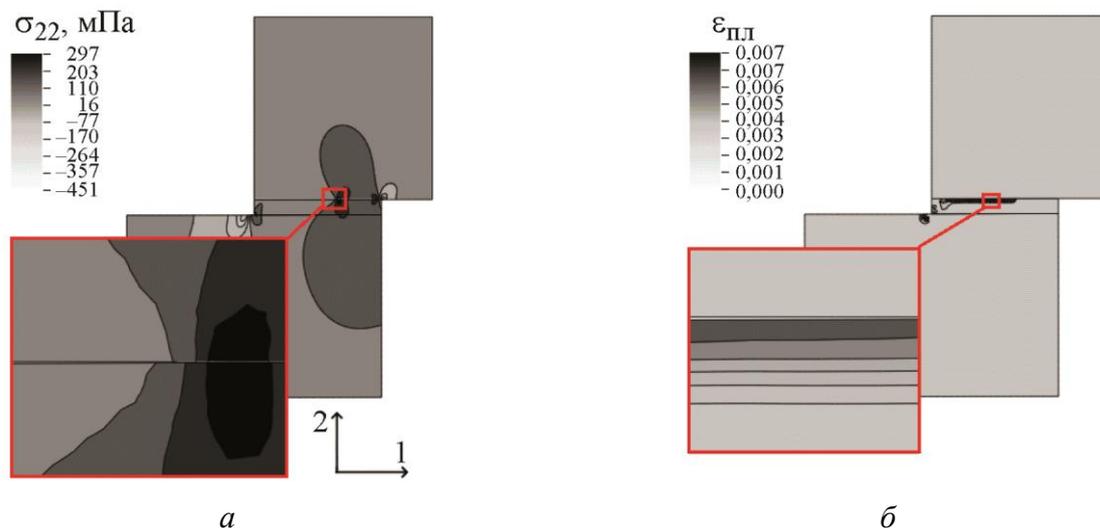


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений σ_{22} (а) и пластических деформаций $\varepsilon_{пл}$ (б) по границе соединения в момент, предшествующий самопроизвольному распространению трещины: $l/D = 0,2$; $G_{IC} = 0,2$ Н/мм

Поле распределения пластической деформации (рис. 4 б) по границе соединения характеризуется тем, что любому, в том числе хрупкому разрушению металлов и сплавов предшествует локализация пластического течения в тонком слое у вершины трещины [19].

Показано, что пластически деформируется только материал промежуточного слоя (алюминий АД1), а пластическая зона имеет простой профиль и расположена на границе соединения. В то же время степень пластической деформации в момент, предшествующий самопроизвольному распространению трещины, зависит от конфигурации образца.

При конечно-элементном расчете фиксировалась нагрузка на пуансон P в зависимости от перемещения пуансона $u_{\text{п}}$ (рис. 5) для расчета напряжения σ по формуле (1). Пики на графике соответствуют началу раскрытия трещины.

Установлено, что минимальные значения пластической деформации в слое наблюдаются при конфигурации образца с соотношением $l/D = 0,35$. Для каждой конфигурации образца наблюдается линейная зависимость степени пластической деформации $\epsilon_{\text{пл}}$ от критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} в условиях отрыва.

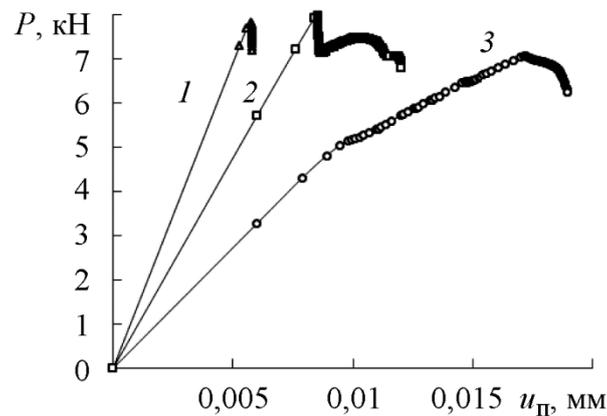


Рис. 5. Зависимость усилия P от перемещения пуансона $u_{\text{п}}$: $G_{IC} = 0,1$ Н/мм:
1 – $l/D = 0,1$; 2 – $l/D = 0,2$; 3 – $l/D = 0,35$

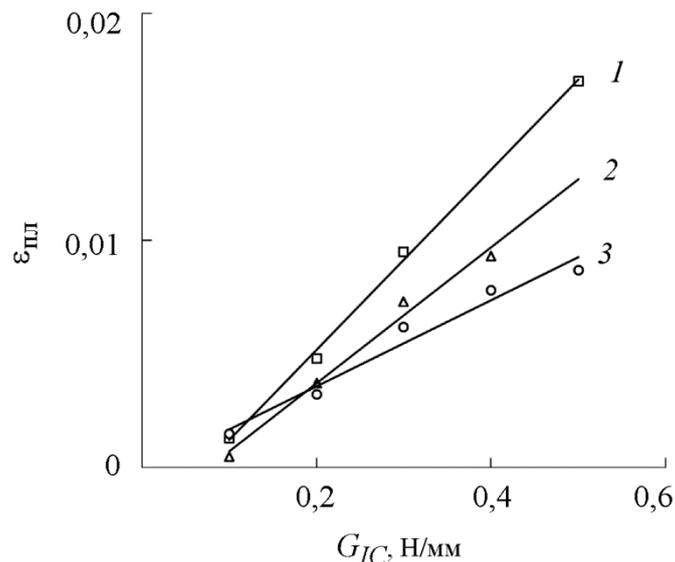


Рис. 6. Значения степени пластической деформации $\epsilon_{\text{пл}}$ в промежуточном слое по границе соединения в момент, предшествующий самопроизвольному распространению трещины:
1 – $l/D = 0,1$; 2 – $l/D = 0,2$; 3 – $l/D = 0,35$

В исследуемом образце интенсивная пластическая деформация локализуется в промежуточном слое вблизи пуансона. В зависимости от используемого в расчетах значений G_{IC} до момента отрыва в прослойке степень пластической деформации составляет 0,0003 до 0,02 соответствен-

но (рис. 6). Для всех вариантов расчета в месте инициирования расслоения показатель напряженного состояния $k = 0,58$, а показатель Лоде–Надаи $\mu_\sigma = +1$. Эти величины практически не меняются на протяжении процесса деформирования. Такие показатели характеризуют жесткое напряженное состояние с преобладанием нормальных растягивающих напряжений.

Сопротивление отрыву $\sigma_{отр}$ определяли в момент, предшествующий самопроизвольному распространению трещины, по диаграмме зависимости напряжения σ от перемещения пуансона $u_{п}$. Пример диаграммы представлен на рис. 7. Из рисунка следует, что от конфигурации образца, т. е. соотношения l/D , значение сопротивления отрыву практически не зависит.

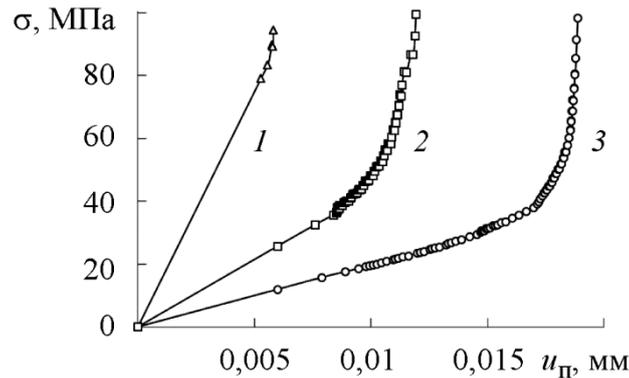


Рис. 7. Зависимость напряжения σ от перемещения пуансона $u_{п}$ при $G_{IC} = 0,1$ Н/мм: 1 – $l/D = 0,1$; 2 – $l/D = 0,2$; 3 – $l/D = 0,35$

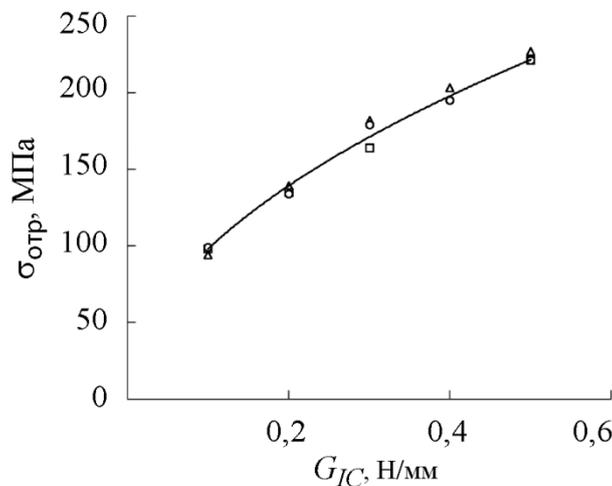


Рис. 8. Зависимость сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$ от величины критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} : Δ – $l/D = 0,1$; \square – $l/D = 0,2$; \circ – $l/D = 0,35$

По результатам вычислительных экспериментов построена зависимость сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$ от величины критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} в условиях отрыва (рис. 8). Определены коэффициенты уравнения, аппроксимирующего экспериментальные данные в интервале $G_{IC} = [0,1; 0,5]$:

$$\sigma_{отр} = 314,56(G_{IC})^{0,5062}. \tag{4}$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0,9907$.

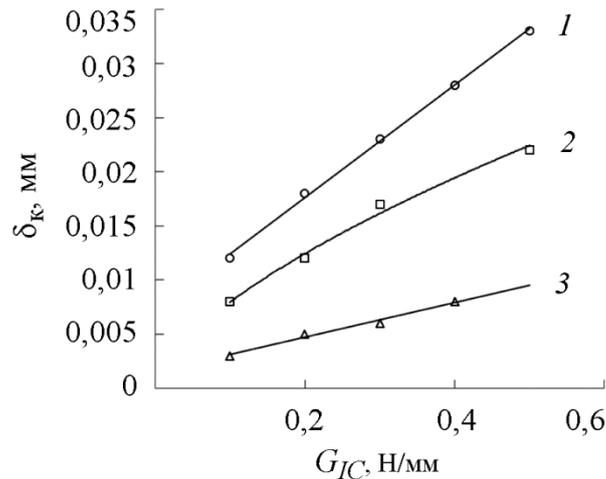


Рис. 9. Зависимость критического раскрытия трещины $\delta_{кр}$ от величины критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} при отрыве

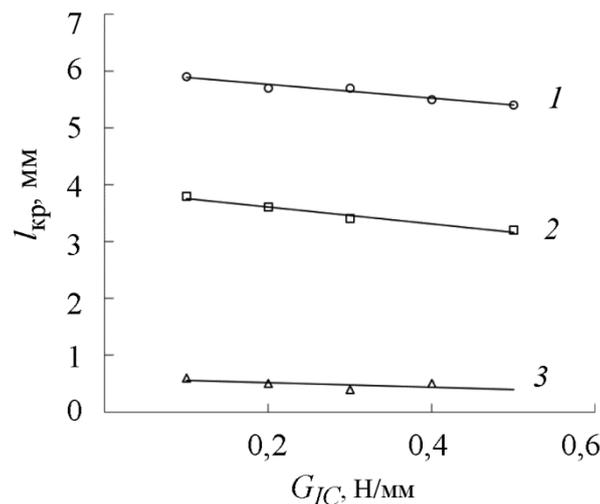


Рис. 10. Зависимость критической длины трещины $l_{кр}$ от величины критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} при отрыве

На рис. 9 и 10 приведены зависимости критического раскрытия трещины $\delta_{кр}$ и критической длины трещины $l_{кр}$ от величины G_{IC} . Зависимости имеют линейный характер. Для каждой конфигурации образца с увеличением G_{IC} характерен рост значения критического раскрытия трещины $\delta_{кр}$ и небольшое уменьшение критической длины трещины $l_{кр}$.

В процентном соотношении критическая длина трещины $l_{кр}$ тем больше, чем больше параметр конфигурации образца l (рис. 11). При $l/D = 0,1$ это соотношение 25–30 %, а при $l/D = 0,35$ длина трещины $l_{кр}$ занимает от 77 до 85 % параметра l .

Поскольку при низких температурах сопротивление пластической деформации (предел текучести, прочности, твердости), как правило, возрастает, а пластичность и вязкость с понижением температуры обычно уменьшаются, то для учета влияния низких температур были изменены параметры кривых упрочнения материалов. Пластические свойства материалов были взяты для температуры -50 °C. После изменения пластических свойств всех слоев образца был проведен расчет и построена зависимость критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} в условиях отрыва от сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$ (рис. 12). Поскольку значение сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$ не зависит от параметров образца, то расчет проводился на одной конфигурации при $l/D = 0,35$. Зависимость показывает, что при

воздействии отрицательных температур на образец для одного и того же значения G_{IC} сопротивление отрыва ниже.

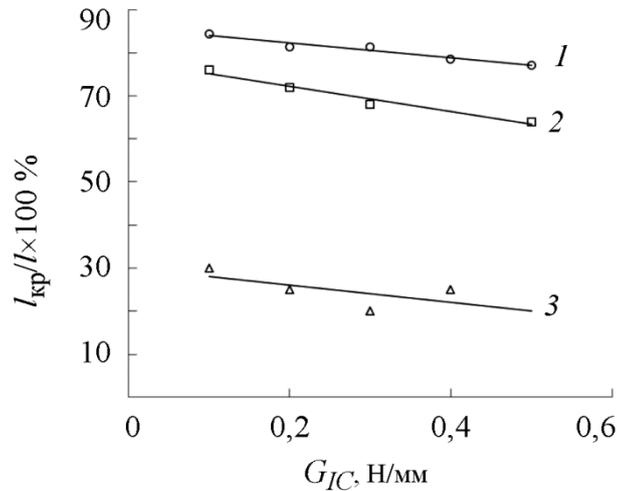


Рис. 11. Соотношение критической длины трещины $l_{кр}$ в зависимости от параметра конфигурации образца l/D и величины критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} для отрыва

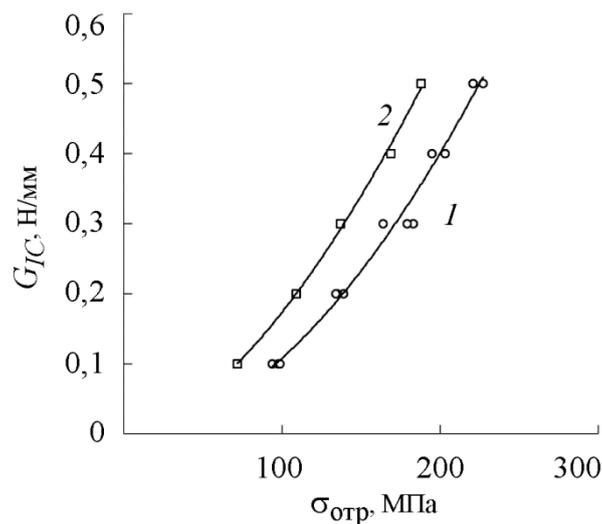


Рис. 12. Критическая скорость высвобождения упругой энергии G_{IC} в условиях отрыва в зависимости от сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$: 1 – для образцов при $T = 20$ °C; 2 – для образцов при $T = -50$ °C

Для определения критической скорости высвобождения упругой энергии G_{IC} приведены аппроксимирующие уравнения (5) и (6):
для образцов при $T = 20$ °C

$$G_{IC} = (2 \times 10^{-5}) * (\sigma_{отр|20})^{1,8919}; \quad (5)$$

для образцов при $T = -50$ °C

$$G_{IC} = (8 \times 10^{-5}) * (\sigma_{отр|-50})^{1,6587}. \quad (6)$$

Для оценки относительной погрешности при аппроксимации функций (5) и (6) рассчитан коэффициент детерминации R^2 , равный 0,99 и 0,9987 соответственно.

После проведения натурального эксперимента по расслоению и определения реального значения сопротивления отрыву $\sigma_{отр}$ расчет с применением данной методики позволит определить значения G_{IC} и использовать его при моделировании реальной конструкции на прочность.

4. Заключение

С целью исследования процессов формоизменения в слоистых металлических композициях и прогнозирования их расслоения при механическом воздействии проведена серия вычислительных экспериментов. Показано, что инициализация и рост трещины происходит на границе алюминиевой прослойки в области с преобладанием нормальных растягивающих напряжений. Несмотря на то, что подход реализует модель хрупкого разрушения, в прослойке в начальной стадии пластического течения возникают и развиваются пластические деформации. Этот факт необходимо учитывать при разработке методики механических испытаний.

Благодарность

Выражаем благодарность в проведении вычислительных экспериментов старшему преподавателю кафедры информационных технологий и автоматизации проектирования УрФУ к.т.н. И.М. Березину.

Литература

1. Krueger R. Virtual crack closure technique: History, approach, and applications // Applied Mechanics Reviews. – 2004. – 57 (2). – P. 109–143. – DOI: 10.1115/1.1595677.
2. Valvo P. S. A Physically Consistent Virtual Crack Closure Technique for I/II/III Mixed-mode Fracture Problems // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3. – P. 1983–1987. – DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.319.
3. Finite element analysis of post buckling and delamination of composite laminates using virtual crack closure technique / P. F. Liu, S. J. Hou, J. K. Chu., X. Y. Hu, C. L. Zhou, Y. L. Liu, J. Y. Zheng, A. Zhao, L. Yan // Composite Structures. – 2011. – Vol. 93, iss. 5. – P. 1549–1560. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.12.006.
4. Xie D., Biggers S. Strain energy release rate calculation for a moving delamination front of arbitrary shape based on the virtual crack closure technique. Part I: Formulation and validation // Engineering Fracture Mechanics. – 2006. – Vol. 73, iss. 6. – P. 771–785. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.07.013.
5. Перов С. Н., Чернякин С. А. Исследование применимости метода конечных элементов для оценки параметров механики разрушения конструктивных элементов из композиционных материалов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2013. – Т. 15, № 4 (2). – С. 480–483.
6. Чернякин С. А., Скворцов Ю. В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. – 2014. – № 4 (56). – С. 249–255.
7. Finite element analysis of panels with surface cracks / S. V. Glushkov, Y. V. Skvortsov, S. N. Perov, S. A. Chernyakin // AIP Conference Proceedings. – 2017. – 1798. – P. 020059. – DOI: 10.1063/1.4972651.
8. Marjanović M., Meschke G., Vuksanović D. A finite element model for propagating delamination in laminated composite plates based on the Virtual Crack Closure method // Composite Structures. – 2016. – Vol. 150. – P. 8–19. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.04.044.

9. Liu P. F., Islam M. M. A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composite laminates // *Composite Structures*. – 2013. – Vol. 106. – P. 47–56. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.05.049.
10. Harper P. W., Hallett S. R. Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – P. 4774–4792. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2008.06.004.
11. Fracture Analysis of a Special Cracked Lap Shear (CLS) Specimen with Utilization of Virtual Crack Closure Technique (VCCT) by Finite Element Methods / M. Azimi, S. S. Mirjavadi, S. A. Asli, A. M. S. Hamouda // *Journal of Failure Analysis and Prevention*. – 2017. – Vol. 17, iss. 2. – P. 304–314. – DOI: 10.1007/s11668-017-0243-1.
12. Numerical and experimental validation of computational models for mode I composite fracture failure / J. Bonhomme, A. Argüelles, J. Viña, I. Viña // *Computational Materials Science*. – 2009. – Vol. 45. – P. 993–998. – DOI: 10.1016/j.commatsci.2009.01.005.
13. Simulation of mode I delamination propagation in multidirectional composites with R-curve effects using VCCT method / M. M. Shokrieh, H. Rajabpour-Shirazi, M. Heidari-Rarani, M. Haghpanahi // *Computational Materials Science*. – 2012. – Vol. 65. – P. 66–73. – DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.06.025.
14. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures / X. Martinez, F. Rastellini, S. Oller, F. Flores, E. Oñate // *Composites Part B: Engineering*. – 2011. – Vol. 42, iss. 2. – P. 134–144. – DOI: 10.1016/j.compositesb.2010.09.013.
15. Simulation of fatigue delamination growth in composite laminates under mode I loading / Yu. V. Skvortsov, S. A. Chernyakin, S. V. Glushkov, S. N. Perov // *Applied Mathematical Modelling*. – 2016. – Vol. 40. – P. 7216–7224. – DOI: 10.1016/j.apm.2016.03.019.
16. Amiri-Rad A., Mashayekhi M., Van der Meer F. P. Cohesive zone and level set method for simulation of high cycle fatigue delamination in composite materials // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 160. – P. 61–69. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.041.
17. May M., Hallett S. R. An advanced model for initiation and propagation of damage under fatigue loading – part I: Model formulation // *Composite Structures*. – 2011. – Vol. 93. – P. 2340–2349. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.03.022.
18. Smirnov S. V., Myasnikova M. V., Igumnov A. S. Determination of the local shear strength of a layered metal composite material with a ductile interlayer after thermocycling // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2016. – Iss. 4. – P. 46–56. – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.046-056.
19. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – М. : Наука, 1974. – 312 с.

Received: 07.12.2020

Revised: 17.01.2021

Accepted: 26.02.2021

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.038-050

EVOLUTION OF THE STRUCTURE OF ANNEALED HAFNIUM BRONZE NANOSTRUCTURED BY HIGH PRESSURE TORSION

A. V. Stolbovsky^{a)*}, V. V. Popov^{b)}, R. M. Falahutdinov^{c)}, and S. A. Murzinova^{d)}

*M.N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 18 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation*

a)  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;

b)  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;

c)  <http://orcid.org/0000-0001-8505-9455>  falahutdinov@imp.uran.ru;

d)  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: stolbovsky@imp.uran.ru

Address for correspondence: ul. S. Kovalevskoy, 18, Ekaterinburg, 620108, Russian Federation

Tel.: +7 343 378 35 74; fax: +7 343 374 52 44

The effect of severe plastic deformation by 1, 3 and 5 revolutions of high pressure torsion (HPT) on the structure and mechanical properties of low-alloyed hafnium bronze Cu–0.78wt%Hf is studied. In the initial annealed state, hafnium is almost completely bonded into intermetallic compounds. It has been found that the structure of all the investigated bronze specimens subjected to HPT is stable and that it remains unchanged after unloading and prolonged ageing at room temperature. It is shown that all the specimens develop a dispersed submicrocrystalline structure gradient along the radius of the disk, with an average crystallite size of 200 nm after 1 revolution to 120 nm after 5 revolutions (at mid-radius). The structure is non-uniform even after 5 revolutions, this being confirmed by microhardness measurements. The high-pressure-torsion behavior of hafnium bronze with Hf bonded into precipitates has much in common with the behavior of pure copper. At the same time, in terms of the stability of the obtained structures at room temperature, the behavior of the alloy under study demonstrates much in common with that of low-alloyed tin bronze.

Keywords: severe plastic deformation, high-pressure torsion, nanostructuring, nanostructures, grain boundaries, hafnium bronze.

Acknowledgments

The electron microscopic study used the equipment of the Collaborative Access Center at the Testing Center of Nanotechnologies and Advanced Materials, IMP UB RAS.

The work was performed under the state assignment from FASO Russia (theme Function, registration number AAAA-A19-119012990095-0) and partially supported by the UB RAS Basic Research Program, project 18–10–2–37.

References

1. Valiev R.Z., Zhilyaev A.P., Langdon T.G. *Bulk Nanostructured Materials: Fundamentals and Applications*, New Jersey, TMS, Wiley, Hoboken, 2014, 440 p. ISBN 978-1-118-09540-9.
2. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure. *Acta Mater.*, 2000, vol. 48, pp. 1–29. DOI: 10.1016/S1359-6454(99)00285-2.

3. Wang Y.M., Chen M.W., Sheng H.W., Ma E. Nanocrystalline grain structures developed in commercial purity Cu by low temperature cold rolling. *Mater. Res. Soc.*, 2002, vol. 17, no. 12, pp. 3004–3007. DOI: 10.1557/JMR.2002.0436.
4. Gertsman V.Y., Birringer R., Valiev R.Z., Gleiter H. On the structure and strength of ultra-fine-grained copper produced by severe plastic deformation. *Scr. Met. & Mater.*, 1994., vol. 30, no. 2, pp. 229–234. DOI: 10.1016/0956-716X(94)90045-0.
5. Erbel S. Mechanical properties and structure of extremely strainhardened copper. *Metals Technol.*, 1979, vol. 6, no. 1, pp. 482–486. DOI: 10.1179/030716979803276363.
6. Liao X.Z., Zhao Y.H., Zhu Y.T. Grain-size effect on the deformation mechanisms of nanostructured copper processed by high-pressure torsion. *J. Appl. Phys.*, 2004, vol. 96, no. 1, pp. 636–640. DOI: 10.1063/1.1757035.
7. Dalla Torre F., Lapovok R., Sandlin J., Thomson P.F., Davies C.H.J., Pereloma E.V. Microstructures and properties of copper processed by equal channel angular extrusion for 1–16 passes. *Acta Mater.*, 2004, vol. 52, no. 16, pp. 4819–4832. DOI: 10.1016/j.actamat.2004.06.040.
8. Valiev R.Z., Kozlov E.V., Ivanov Yu.F., Lian J., Nazarov A.A., Baudel B. Deformation behavior of ultra-fine-grained copper, *Acta Met. & Mater.*, 1994, vol. 42, no. 7, pp. 2467–2475. DOI: 10.1016/0956-7151(94)90326-3.
9. Alexandrov I.V., Dubravina A.A., Kim H.S. Nanostructure formation in copper subjected to high pressure torsion. *Defect & Diffus. Forum*, 2002, vol. 208–209, pp. 229–232. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.208-209.229.
10. Brandstetter S., Zhang K., Escudero A., Weertman Julia. Grain coarsening during compression of bulk nanocrystalline nickel and copper. *Scr. Mater.*, 2008, vol. 58, no. 1, pp. 61–64. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2007.08.042.
11. Horita Z., Langdon T.G. Microstructures and microhardness of an aluminum alloy and pure copper after processing by high-pressure torsion. *Mater. Sci. & Eng. A.*, 2005, vol. 410–411, pp. 422–425. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2007.08.042.
12. Islamgaliev R.K., Chmelik F., Kuzel R. Thermal stability of submicron grained copper and nickel. *Mater. Sci. & Eng. A.*, 1997, vol. 237, no. 1, pp. 43–51. DOI: 10.1016/S0921-5093(97)00107-X.
13. Akhmadeev N.H., Kobelev N.P., Mulyukov R.R. The effect of heat treatment on the elastic and dissipative properties of copper with the submicrocrystalline structure. *Acta Met. & Mater.*, 1993, vol. 41, no. 4, pp. 1041–1046. DOI: 10.1016/0956-7151(93)90153-J.
14. Popov V.V., Stolbovskiy A.V., Popova E.N., Pilyugin V.P. Structure and Thermal Stability of Cu after Severe Plastic Deformation. *Defect and Diffusion Forum*, 2010, vol. 297–301, pp. 1312–1321. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1312.
15. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Pilyugin V.P. Structure, thermal stability, and state of grain boundaries of copper subjected to high-pressure torsion at cryogenic temperatures. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2014, vol. 78, pp. 908–916. DOI: 10.3103/S1062873814090299.
16. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N., Falakhutdinov R.M. Effect of severe plastic deformation by high-pressure torsion on the structure and properties of copper and tin bronze. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 5, pp. 13–22. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.5.013-022. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-5/2017-5_144.html (accessed: 19.02.2021)
17. Shangina D.V., Bochvar N.R., Dobatkin S.V. Structure and properties of ultrafine-grained Cu–Cr alloys after high pressure torsion. *Materials Science Forum*, 2011, vol. 667–669, pp. 301–306. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.667-669.301.
18. Shangina D.V., Bochvar N.R., Dobatkin S.V. The effect of alloying with hafnium on the thermal stability of chromium bronze after severe plastic deformation. *Journal of Materials Science*, 2012, vol. 47, pp. 7764–7769. DOI: 10.1007/s10853-012-6525-9.

19. Shangina D.V., Maksimenkova Yu.M., Bochvar N.R., Serebryany VI., Raab G., Vinogradov A., Skrotzki Werner, Dobatkin S. Structure and properties of Cu alloys alloying with Cr and Hf after equal channel angular pressing. *Advanced Materials Research*, 2014, vol. 922, pp. 651–656. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.922.651.
20. Dobatkin S.V., Shangina D.V., Bochvar N.R., Janeček Miloš. Effect of deformation schedules and initial states on structure and properties of Cu–0.18%Zr alloy after high–pressure torsion and heating. *Materials Science and Engineering A*, 2014, vol. 598, pp. 288–292. DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.104.
21. Shangina D.V., Gubicza J., Dodony E., Bochvar N.R., Straumal P.B., Tabachkova N.Yu. & Dobatkin S.V. Improvement of strength and conductivity in Cu–alloys with the application of high–pressure torsion and subsequent heat-treatments. *Journal of Materials Science*, 2014, vol. 49, pp. 6674–6681. DOI: 10.1007/s10853-014-8339-4.
22. Dobatkin S.V., Gubicza J., Shangina D.V., Bochvara N.R., Tabachkova N.Y. High strength and good electrical conductivity in Cu–Cr alloys processed by severe plastic deformation. *Materials Letters*, 2015, vol. 153, pp. 5–9. DOI: doi.org/10.1016/j.matlet.2015.03.144.
23. Dobatkin S.V., Bochvar N.R., Shangina D.V. Aging processes in ultrafine-grained low-alloyed bronzes subjected to equal channel angular pressing. *Advanced Engineering Materials*, 2015, vol. 17, pp. 1862–1868. DOI: 10.1002/adem.201500099.
24. Shangina D.V., Bochvar N.R., Gorshenkov M.V., Yanar H., Purcek G., Dobatkin S.V. Influence of microalloying with zirconium on the structure and properties of Cu–Cr alloy after high pressure torsion. *Materials Science and Engineering A*, 2016, vol. 650, pp. 63–66. DOI: 10.1016/j.msea.2015.10.008.
25. Purcek G., Yanar H., Demirtas M., Alemdag Y., Shangina D.V., Dobatkin S.V. Optimization of strength, ductility and electrical conductivity of Cu–Cr–Zr alloy by combining multi-route ECAP and aging. *Materials Science and Engineering A*, 2016, vol. 649, pp. 114–122. DOI: 10.1016/j.msea.2015.09.111.
26. Shangina D., Maksimenkova Yu., Bochvar N., Serebryany VI., Raab Georgy, Vinogradov A., Skrotzki Werner & Dobatkin S. Influence of alloying with hafnium on the microstructure, texture, and properties of Cu–Cr alloy after equal channel angular pressing. *Journal of Materials Science*, 2016, vol. 51, pp. 5493– 5501. DOI: 10.1007/s10853-016-9854-2.
27. Stolbovsky A.V., Popov V.V., Popova E.N. Structure and Thermal Stability of Tin Bronze Nanostructured by High Pressure Torsion. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 5, pp. 118–132. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.118-132. Available at: http://dream-journal.org/issues/2015-5/2015-5_52.html (accessed: 27.06.2020).
28. Popov V.V., Popova E.N., Stolbovsky A.V., Falakhutdinov R.M. Evolution of the Structure of Cu–1% Sn Bronze under High Pressure Torsion and Subsequent Annealing. *Physics of Metals and Metallography*, 2018, vol. 119, pp. 358–367. DOI: 10.1134/S0031918X18040154.

Подана в журнал: 07.12.2020

УДК 669.35'6:539.89

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.038-050

ЭВОЛЮЦИЯ СТРУКТУРЫ ОТОЖЖЕННОЙ ГАФНИЕВОЙ БРОНЗЫ, НАНОСТРУКТУРИРОВАННОЙ КРУЧЕНИЕМ ПОД ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ

А. В. Столбовский^{а)}*, В. В. Попов^{б)}, Р. М. Фалахутдинов^{в)}, С. А. Мурзинова^{г)}

*Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,
д. 18, ул. С. Ковалевской, Россия, 620108, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

- ^{а)}  <http://orcid.org/0000-0001-5228-7857>  stolbovsky@imp.uran.ru;
^{б)}  <http://orcid.org/0000-0002-9291-0102>  vpopov@imp.uran.ru;
^{в)}  <http://orcid.org/0000-0001-8505-9455>  falahutdinov@imp.uran.ru;
^{г)}  <http://orcid.org/0000-0001-5240-2966>  murzinova@imp.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: stolbovsky@imp.uran.ru

Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 378–35–74; факс: (343) 374–52–44

Исследовано влияние интенсивной пластической деформации кручением под высоким давлением (КВД) на 1, 3 и 5 об. на структуру и механические свойства низколегированной гафниевой бронзы Cu–0,78 мас. % Hf. В исходном отожженном состоянии гафний практически полностью связан в интерметаллические выделения. Установлено, что структура всех исследованных образцов бронзы, подвергнутых КВД, стабильна и не претерпевает каких-либо изменений после снятия нагрузки и при длительном вылеживании. Показано, что во всех исследованных образцах формируется дисперсная субмикроструктурная структура, градиентная по радиусу диска, со средним размером кристаллитов от 200 нм после 1 об. до 120 нм после 5 об. (на середине радиуса). Даже после 5 об. структура является неоднородной, что подтверждается измерениями микротвердости. Поведение при кручении под высоким давлением гафниевой бронзы со связанным в выделения гафнием имеет много общего с поведением чистой меди. В то же время с точки зрения стабильности полученных структур при комнатной температуре поведение рассматриваемого сплава демонстрирует много общего с поведением, наблюдавшимся у низколегированной оловянистой бронзы.

Ключевые слова: интенсивная пластическая деформация, кручение под высоким давлением, наноструктурирование, наноструктуры, границы зерен, гафниева бронза.

1. Введение

В современных условиях использование чистой меди в качестве конструкционного материала крайне ограничено из-за ее высокой пластичности в сочетании с относительно невысокой температурой плавления. При этом использование именно меди дает преимущество изделиям, для которых необходима высокая электро- или теплопроводность. Например, для деталей контактных групп в электротехнических изделиях или теплообменников, работающих при повышенных нагрузках, применение меди практически не имеет альтернатив.

На протяжении последних десятилетий велись постоянные поиски возможностей повысить прочностные характеристики меди для ее более широкого применения в качестве конструкционного материала с уникальными свойствами [1]. И только после появления нового подхода к получению материалов с высокой плотностью структурных дефектов [1–15] медь была предложена в качестве полноценного конструкционного материала. Однако получаемые изделия все же сохранили ряд принципиальных недостатков, к числу которых относится низкая термическая стабильность структуры [10, 12–15].

Примеси и легирующие элементы повышают температуру начала рекристаллизации меди даже при крайне низкой концентрации легирующего элемента. Однако применение для легирования элементов, образующих твердые растворы с высокой концентрацией, например, олова, не является эффективным в задачах повышения термической стабильности структуры [16]. Поэтому считается [17–26], что легирование элементами, имеющими наименьшую растворимость в меди (Zr, Hf и др.), позволяет достигнуть максимально высокой температуры начала рекристаллизации. При этом увеличение их концентрации до более чем 0,05 %, уже не всегда приводит к заметному росту температуры начала рекристаллизации [17, 18].

Задачей работы было исследовать гафниевую бронзу с минимальным содержанием в твердом растворе легирующего элемента, наноструктурированную интенсивной пластической деформацией с целью определения формирующейся при деформации структуры и уровня прочностных характеристик.

2. Материал и методика исследования

Для исследований использовалась гафниевая бронза, химический состав которой приведен в табл. 1.

Таблица 1 – Химический состав гафниевой бронзы, вес. %

Элемент	Hf	O	Fe	Ni	Zn	Sn
Содержание, мас. %	0,78	~0,28	~0,001	~0,005	~0,005	~0,005

Гафниевая бронза после отливки подвергалась горячей ковке при 600 °С. Послековки проводилась механическая обработка и гомогенизирующий отжиг при температуре 800 °С в течение 1 ч с дальнейшим охлаждением с печью. Для этого использовали вакуумную трубчатую печь, позволяющую проводить отжики в условиях динамического вакуума при давлении 10^{-2} – 10^{-3} Па.

Деформирование проводили в открытых наковальнях Бриджмена диаметром 10 мм при комнатной температуре на 1, 3 и 5 об., при давлении 6 ГПа с угловой скоростью 0,3 об./мин.

Истинную деформацию e рассчитывали как сумму истинной деформации сдвигом и осадкой: $e = e_{\text{сдв.}} + e_{\text{осадки}}$. При этом истинную деформацию сдвигом рассчитывали по формуле: $e_{\text{сдв.}} = \ln(1 + \lambda^2)^{1/2}$, где $\lambda = (\varphi R)/h$; λ – деформация сдвигом при кручении; φ – угол скручивания в радианах; h – толщина образца (мм); R – расстояние от оси вращения (мм). Истинную деформацию осадкой рассчитывали как $e_{\text{осадки}} = \ln(h_0/h_k)$, где h_0 и h_k – толщина образца до и после деформации.

Структуру деформированных и отожженных образцов изучали с помощью просвечивающей электронной микроскопии в электронных микроскопах Philips-CM30 SuperTwin и JEM-200CX.

Измерение микротвердости материала после динамического сжатия проводили на приставке к микроскопу Neophot-21 при нагрузке, эквивалентной 40 г, по методике, описанной в работе [27].

3. Результаты исследования и их обсуждение

Микроструктура гафниевой бронзы послековки и гомогенизирующего отжига при температуре 800 °С в течение 1 ч представлена на рис. 1. Бронза в отожженном состоянии имеет поликристаллическую структуру, с размерами кристаллитов 20–40 мкм, что значительно меньше, чем в случае чистой меди и оловянистой бронзы [16]. Кроме того, в структуре наблюдались частицы второй фазы, которые хорошо видны на нетравленном шлифе (рис. 1 б). Их размеры составляют 1–4 мкм, что согласуется с результатами, полученными в работе [18],

в которой изучалась гафниевая бронза с содержанием 0,9 масс. % Hf, и в исходном отожженном состоянии наблюдались частицы фазы Cu_5Hf размером ~ 3 мкм. Поэтому, исходя из диаграммы состояния, можно ожидать, что после такой обработки большая часть гафния связана в интерметаллиды Cu_5Hf . После травления выявляется зеренная структура (рис. 1 *а*). Зерна имеют размеры от 20 до 100 мкм. В некоторых участках в небольшом количестве присутствуют двойники отжига. Микротвердость в исходном отожженном состоянии составляла 760 ± 20 МПа.

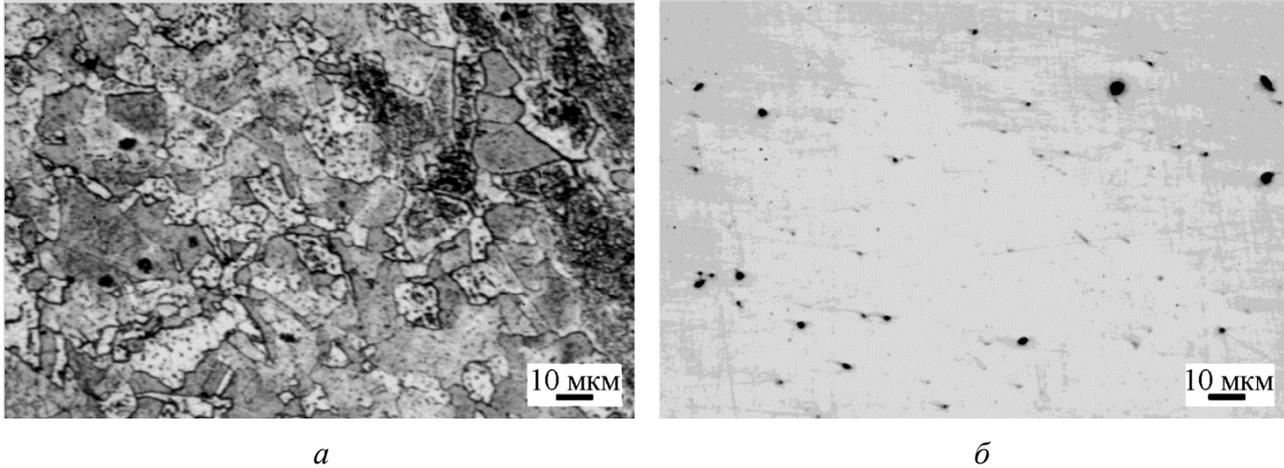


Рис. 1. Микрофотографии структуры гафниевой бронзы послековки и отжига при температуре 800 °С в течение 1 ч: *а* – травленный; *б* – нетравленный шлиф

Необходимо отметить, что расчетная величина деформации при КВД зависит от расстояния от оси вращения и деформация распределена неравномерно по радиусу образца, увеличиваясь от центра к периферии. Соответственно структура измельчается неравномерно, особенно при малых величинах деформации (количестве оборотов), и самая мелкая структура формируется в периферийных областях деформируемых дисков. Поэтому для корректного сравнения структуры после разной обработки (например после разного числа оборотов), как правило, рассматривают структуру на середине радиуса образцов. Оценочные величины истинной деформации на середине радиуса образцов представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Расчетная величина истинной деформации, достигаемой при деформировании методом КВД на середине радиуса образцов

Обороты КВД	1	3	5
<i>e</i>	~4,6	~5,9	~6,5

Проведенные исследования показали, что после одного оборота КВД в гафниевой бронзе формируется градиентная по радиусу диска дисперсная субмикроструктурная структура с преимущественно высокоугловыми разориентировками между кристаллитами. В центральной части образца, где степень деформации минимальна и структура наименее фрагментирована, средний размер кристаллитов составляет ~ 200 нм (рис. 2 *а, б*). На снимках виден специфический контраст внутри кристаллитов, указывающий на высокий уровень внутренних упругих напряжений. Границы некоторых кристаллитов малоугловые, напоминающие дислокационные скопления, хотя имеются и ровные тонкие высокоугловые границы. При этом на некоторых электронограммах видны близко расположенные рефлексы, образующие радиально вытянутые скопления на Дебаевских кольцах, и их количество невелико. Такие электронограммы можно охарактеризовать как переходные от точечных, характер-

ных для крупнокристаллической структуры, к кольцевым, которые указывают на образование субмикроструктурной структуры.

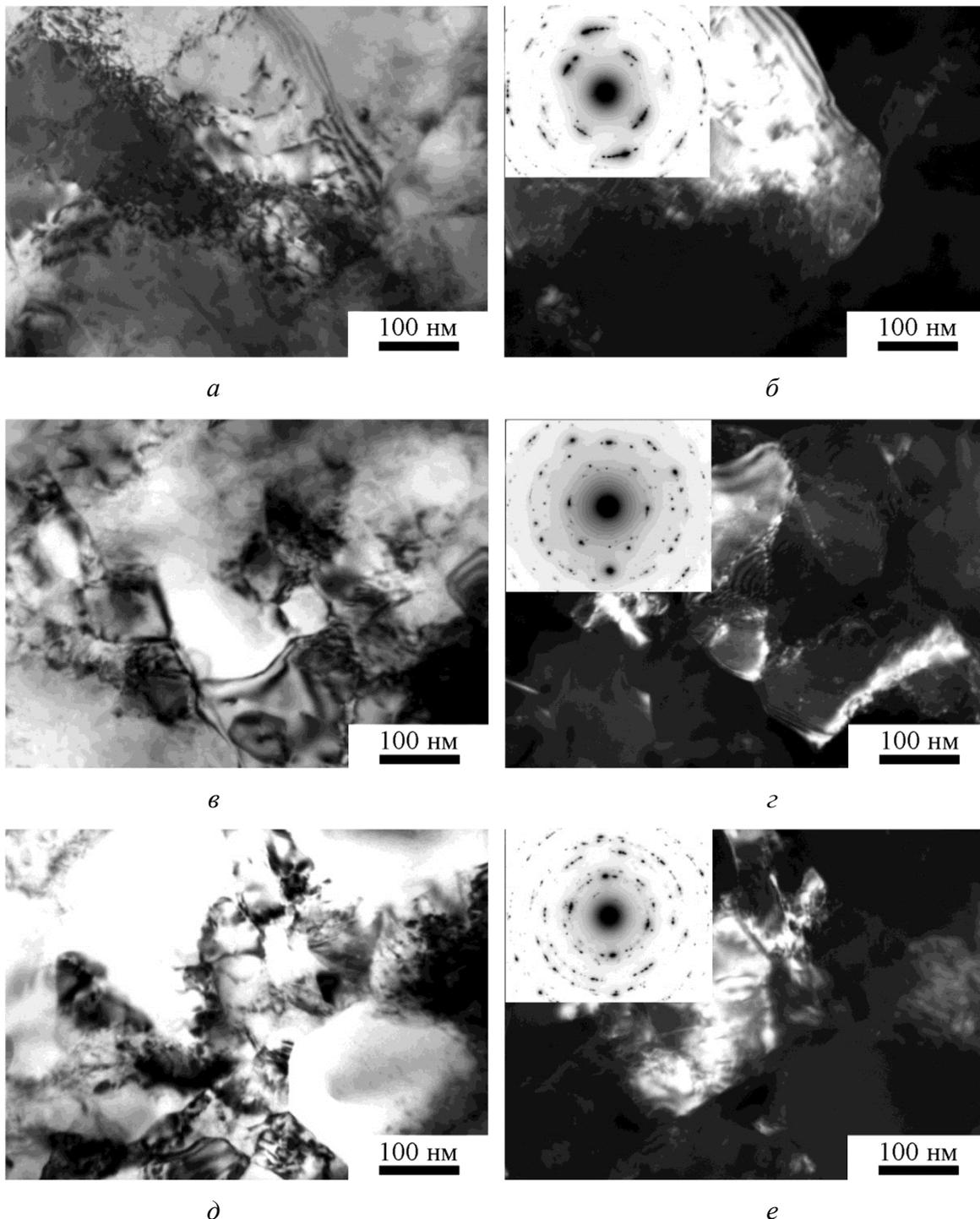


Рис. 2. Электронные микрофотографии структуры и электронограммы в центральной части образца гафниевой бронзы (а, б), на середине радиуса (в, з) и в периферийной части (д, е) после КВД на 1 об.: (а, в, д) – светлые поля; (б, з, е) – темные поля; вставки – электронограммы

С увеличением деформации при удалении от центра структура становится более дисперсной и средний размер кристаллитов уменьшается до ~180 нм (рис. 2 в, з). Поскольку в данной области образца деформации выше, то и уровень внутренних упругих напряжений

значительно выше, и это видно по увеличению плотности дислокаций. Также видно, что электронограммы, в основном кольцевые, с уже достаточно большим количеством рефлексов на Дебаевских кольцах и их расположение более равномерно (рис. 2 з).

Наличие различной структуры в зависимости от радиуса указывает на ее зависимость от градиента деформации, характерного для метода КВД. При этом градиентный характер структуры подтверждается изменением микротвердости по радиусу образца. Значения микротвердости составляют 1740 ± 60 МПа в центре образца, 1820 ± 20 МПа на середине радиуса и 2050 ± 40 МПа на краю образца. При этом с увеличением деформации (числа оборотов) КВД ожидаемо происходит как повышение микротвердости, так и ее выравнивание по радиусу образца (рис. 3). Такое выравнивание микротвердости с ростом величины деформации вполне ожидаемо, однако данный процесс не происходит в полной мере, что видно по изменению микротвердости для 5 об. КВД. Это указывает на сохраняющуюся зависимость микроструктуры от положения участка в плане его удаленности от центра.

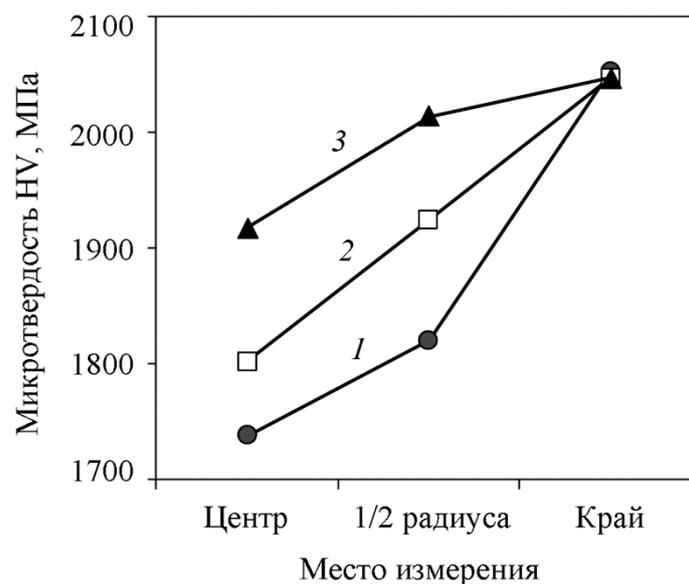


Рис. 3. Изменение микротвердости гафниевой бронзы по радиусу образцов после деформирования методом КВД с различным числом оборотов:
1 – 1 об.; 2 – 3 об.; 3 – 5 об.;

Поскольку в бронзе после КВД на 3 и 5 об. микротвердость становится более равномерной по радиусу образцов с увеличением деформации, то можно было ожидать и более однородной структуры.

Действительно, после 3 об. КВД структура становится более однородной, однако различия по радиусу все же присутствуют (рис. 4). Структура заметно измельчилась по сравнению с представленной выше структурой после 1 об. КВД для снимков с середины радиуса образца. Средний размер кристаллитов в этом состоянии составляет 150 нм. Границы кристаллитов имеют искривления, а внутри кристаллитов наблюдается характерный для напряженного состояния контраст, что косвенно свидетельствует о высоком уровне внутренних напряжений и особом «неравновесном» состоянии границ. Однако практически на всех электронограммах Дебаевские кольца все еще не сформированы достаточным количеством рефлексов (рис. 4 б).

Поскольку в периферийной части образцов для 1, 3 и 5 об. микротвердость повышается до практически одного и того же значения 2050 ± 40 МПа, то можно было ожидать близкой по параметрам микроструктуры (рис. 3). Структура в этой части образца для 5 об. показана на рис. 4 в, г и в целом очень похожа на структуру после 1 об. (рис. 2 д, е).

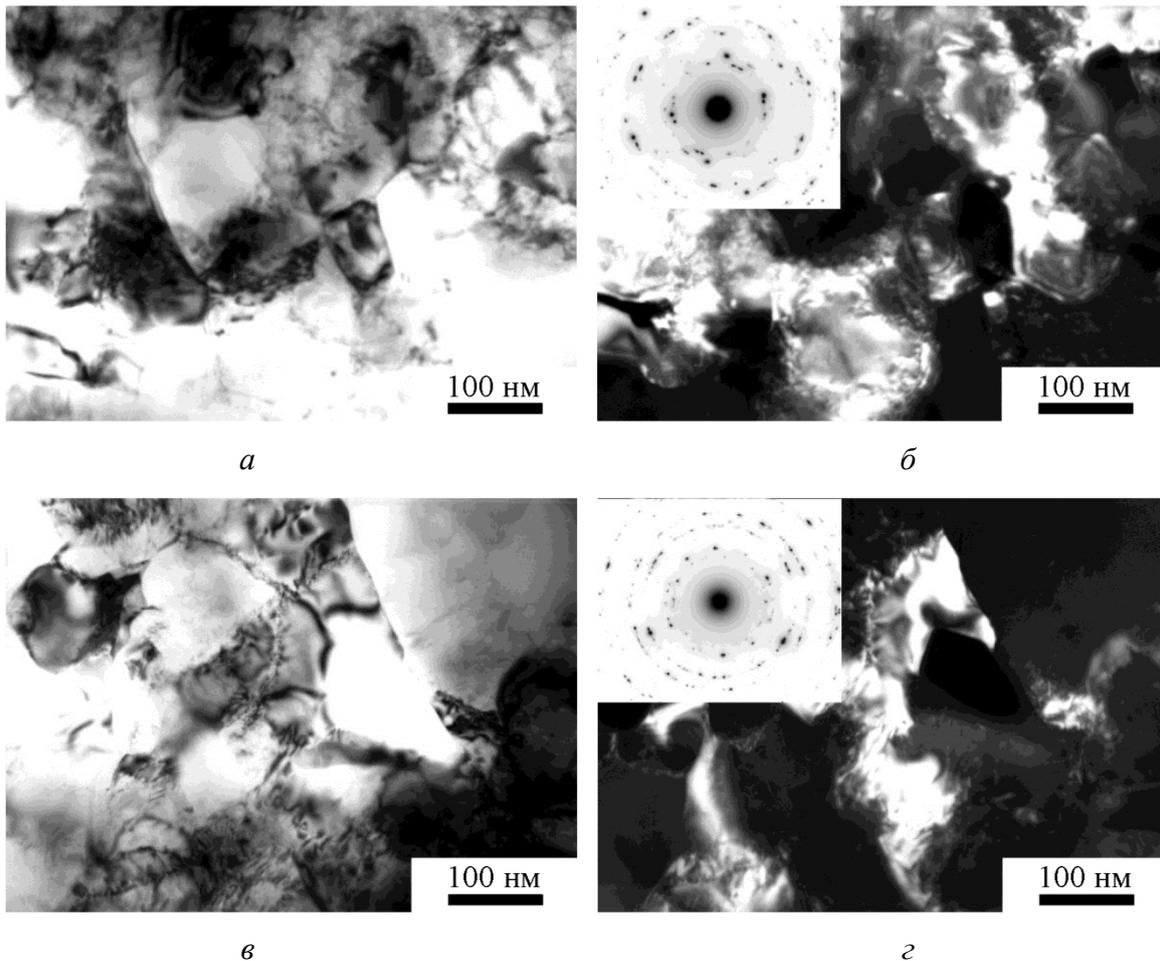


Рис. 4. Электронные микрофотографии структуры и электронограммы в центральной части образца гафниевой бронзы после КВД на 3 об. а (*a*, *б*) и в периферийной части (*в*, *г*) после КВД на 5 об.: (*a*, *в*) – светлые поля; (*б*, *г*) – темные поля; вставки – электронограммы

Средний размер кристаллитов, достигаемый при КВД 5 об. в периферийной части, составляет приблизительно 120 нм. Однако структура все еще неоднородна и на Дебаевских кольцах электронограмм еще не наблюдается равномерно распределенных рефлексов. В то же время на снимках с периферийной части образцов появляются области с элементами структуры, претерпевшей процессы релаксации. Есть зерна с прямыми ровными границами, но не равноосной, а вытянутой формы, а внутри кристаллитов наблюдается характерный для напряженного состояния контраст. Наблюдается и значительный локальный разброс кристаллитов по размерам. Все это указывает на протекание релаксационных процессов непосредственно при деформировании и может служить ограничением для дальнейшего измельчения зерен и повышения микротвердости данного материала.

Более наглядно упрочнение с ростом деформации гафниевой бронзы демонстрирует рис. 5, на котором значения микротвердости нанесены в зависимости от числа оборотов КВД при комнатной температуре.

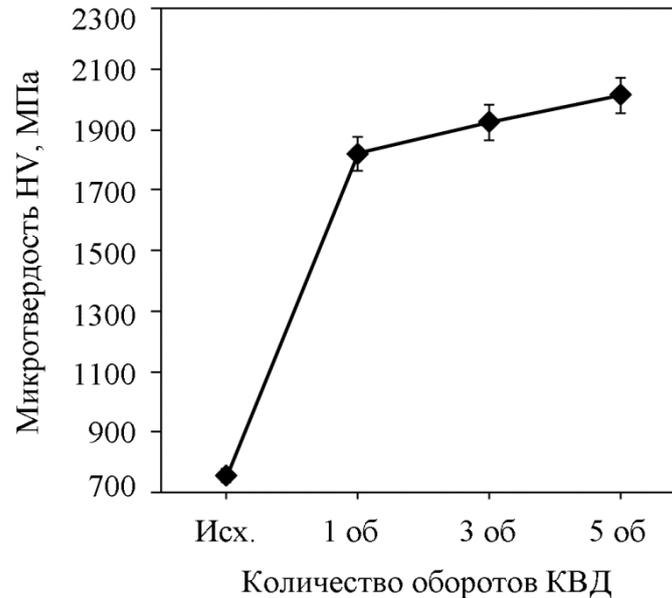


Рис. 5. Изменение микротвердости гафниевой бронзы при КВД в зависимости от числа оборотов (на середине радиуса образцов)

Микротвердость при КВД постепенно возрастает, однако изменения не столь значительны, как в оловянистой бронзе [28], и являются неким средним состоянием между значениями, полученными для оловянистой бронзы и меди технической чистоты стандарта М1 [14]. Так, для гафниевой бронзы характерно значительное упрочнение уже при одном обороте КВД, как и для оловянистой бронзы. Однако с дальнейшим увеличением деформации в структуре наблюдаются характерные элементы, указывающие на прохождение релаксационных процессов, как наблюдалось при исследовании меди, и рост микротвердости замедляется. При этом полученные структуры гафниевой бронзы стабильны при комнатной температуре, как и у образцов оловянистой бронзы [28], тогда как для медных образцов наблюдалось изменение структуры после снятия нагрузки при вылеживании деформированных образцов при комнатной температуре [14].

Можно заключить, что применение кручения под высоким давлением позволяет значительно сильнее измельчать зеренную структуру образцов из гафниевой бронзы уже при 1 об. КВД, в сравнении с методом РКУП [19, 23], вследствие большей деформации, несмотря на градиентное изменение структуры по радиусу образцов. Также в образцах, подвергнутых КВД, в целом структура не только более дисперсная, но и более равномерная с преобладанием равноосных кристаллитов, по сравнению со структурой после РКУП, в которой явно выражены полосы деформации и протяженные двойники [19, 23].

4. Заключение

Проведенные исследования показали, что даже в случае с минимальным содержанием в твердом растворе гафния, структура всех исследованных образцов бронзы после КВД является стабильной при комнатной температуре и не претерпевает каких-либо изменений после снятия нагрузки и длительном вылеживании.

При этом уже после одного оборота КВД в гафниевой бронзе формируется градиентная по радиусу диска дисперсная субмикроструктурная структура со средним размером кристаллитов около 200 нм и преимущественно высокоугловыми разориентировками между кристаллитами. С увеличением деформации при удалении от центра структура становится более дисперсной и средний размер кристаллитов уменьшается до ~180 нм. А средний размер кристаллитов, достигаемый при КВД 5 об. в периферийной части, составляет прибли-

зительно 120 нм. Однако структура все еще неоднородна, что подтверждается измерениями микротвердости, и наблюдается значительный локальный разброс кристаллитов по размерам.

В то же время полученное при гомогенизирующем отжиге содержание гафния, по-видимому, уже не обеспечивает условий для достижения однородной нанокристаллической структуры даже при 5 об. КВД из-за протекания релаксационных процессов непосредственно при деформировании, что и является ограничением для измельчения зерна и повышения микротвердости при данной обработке.

Благодарности

Электронно-микроскопическое исследование выполнено на оборудовании центра коллективного пользования в Испытательном центре нанотехнологий и перспективных материалов ИФМ УрО РАН.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Функция» номер госрегистрации АААА-А19-119012990095-0) при частичной поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 18-10-2-37).

Литература

1. Valiev R. Z., Zhilyaev A. P., Langdon T. G. Bulk Nanostructured Materials: Fundamentals and Applications. – New Jersey : TMS, Wiley, Hoboken, 2014. – 440 p. – ISBN 978-1-118-09540-9.
2. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure // Acta Mater. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–29. – DOI: 10.1016/S1359-6454(99)00285-2.
3. Nanocrystalline grain structures developed in commercial purity Cu by low temperature cold rolling / Y. M. Wang, M. W. Chen, H. W. Sheng, E. Ma // Mater. Res. Soc. – 2002. – Vol. 17, no. 12. – P. 3004–3007. – DOI: 10.1557/JMR.2002.0436.
4. On the structure and strength of ultra-fine-grained copper produced by severe plastic deformation / V. Y. Gertsman, R. Birringer, R. Z. Valiev, H. Gleiter // Scr. Met. & Mater. – 1994. – Vol. 30, no. 2. – P. 229–234. – DOI: 10.1016/0956-716X(94)90045-0.
5. Erbel S. Mechanical properties and structure of extremely strainhardened copper // Metals Technol. – 1979. – Vol. 6, no. 1. – P. 482–486. – DOI: 10.1179/030716979803276363.
6. Liao X. Z., Zhao Y. H., Zhu Y. T. Grain-size effect on the deformation mechanisms of nanostructured copper processed by high-pressure torsion // J. Appl. Phys. – 2004. – Vol. 96, no. 1. – P. 636–640. – DOI: doi.org/10.1063/1.1757035.
7. Microstructures and properties of copper processed by equal channel angular extrusion for 1–16 passes / F. Dalla Torre, R. Lapovok, J. Sandlin, P. F. Thomson, C. H. J. Davies, E. V. Pereloma // Acta Mater. – 2004. – Vol. 52, no. 16. – P. 4819–4832. – DOI: 10.1016/j.actamat.2004.06.040.
8. Deformation behavior of ultra-fine-grained copper / R. Z. Valiev, E. V. Kozlov, Yu. F. Ivanov, J. Lian, A. A. Nazarov, B. Baudel // Acta Met. & Mater. – 1994. – Vol. 42, no. 7. – P. 2467–2475. – DOI: 10.1016/0956-7151(94)90326-3.
9. Alexandrov I. V., Dubravina A. A., Kim H. S. Nanostructure formation in copper subjected to high pressure torsion // Defect & Diffus. Forum. – 2002. – Vol. 208–209. – P. 229–232. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.208-209.229.
10. Grain coarsening during compression of bulk nanocrystalline nickel and copper / S. Brandstetter, K. Zhang, A. Escudero, Julia Weertman // Scr. Mater. – 2008. – Vol. 58, no. 1. – P. 61–64. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2007.08.042.
11. Horita Z., Langdon T. G. Microstructures and microhardness of an aluminum alloy and pure copper after processing by high-pressure torsion // Mater. Sci. & Eng. A. – 2005. – Vol. 410–411. – P. 422–425. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2007.08.042.

12. Islamgaliev R. K., Chmelik F., Kuzel R. Thermal stability of submicron grained copper and nickel // *Mater. Sci. & Eng. A.* – 1997. – Vol. 237, no. 1. – P. 43–51. – DOI: 10.1016/S0921-5093(97)00107-X.
13. Akhmadeev N. H., Kobelev N. P., Mulyukov R. R. The effect of heat treatment on the elastic and dissipative properties of copper with the submicrocrystalline structure // *Acta Met. & Mater.* – 1993. – Vol. 41, no 4. – P. 1041–1046. – DOI: 10.1016/0956-7151(93)90153-J.
14. Structure and Thermal Stability of Cu after Severe Plastic Deformation / V. V. Popov, A. V. Stolbovskiy, E. N. Popova, V. P. Pilyugin // *Defect and Diffusion Forum.* – 2010. – Vol. 297–301. – P. 1312—1321. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1312.
15. Structure, thermal stability, and state of grain boundaries of copper subjected to high-pressure torsion at cryogenic temperatures / A. V. Stolbovsky, V. V. Popov, E. N. Popova, V. P. Pilyugin // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2014. – Vol. 78. – P. 908–916. – DOI: 10.3103/S1062873814090299.
16. Effect of severe plastic deformation by high-pressure torsion on the structure and properties of copper and tin bronze / A. V. Stolbovsky, V. V. Popov, E. N. Popova, R. M. Falakhutdinov // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures.* – 2017. – Iss. 5. – P. 13–22. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.5.013-022. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-5/2017-5_144.html (accessed: 19.02.2021)
17. Shangina D. V., Bochvar N. R., Dobatkin S. V. Structure and properties of ultrafine-grained Cu–Cr alloys after high pressure torsion // *Materials Science Forum.* – 2011. – Vol. 667–669. – P. 301–306. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.667-669.301.
18. Shangina D. V., Bochvar N. R., Dobatkin S. V. The effect of alloying with hafnium on the thermal stability of chromium bronze after severe plastic deformation // *Journal of Materials Science.* – 2012. – Vol. 47. – P. 7764–7769. – DOI: 10.1007/s10853-012-6525-9.
19. Structure and properties of Cu alloys alloying with Cr and Hf after equal channel angular pressing / D. V. Shangina, Yu. M. Maksimenkova, N. R. Bochvar, Vi. Serebryany, G. Raab, A. Vinogradov, Werner Skrotzki, S. Dobatkin // *Advanced Materials Research.* – 2014. – Vol. 922. – P. 651–656. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.922.651.
20. Effect of deformation schedules and initial states on structure and properties of Cu–0.18%Zr alloy after high–pressure torsion and heating / S. V. Dobatkin, D. V. Shangina, N. R. Bochvar, Miloš Janeček // *Materials Science and Engineering A.* – 2014. – Vol. 598. – P. 288–292. – DOI: 10.1016/j.msea.2013.12.104.
21. Improvement of strength and conductivity in Cu–alloys with the application of high–pressure torsion and subsequent heat–treatments / D. V. Shangina, J. Gubicza, E. Dodony, N. R. Bochvar, P. B. Straumal, N. Yu. Tabachkova & S. V. Dobatkin // *Journal of Materials Science.* – 2014. – Vol. 49. – P. 6674–6681. – DOI: 10.1007/s10853-014-8339-4.
22. High strength and good electrical conductivity in Cu–Cr alloys processed by severe plastic deformation / S. V. Dobatkin, J. Gubicza, D. V. Shangina, N. R. Bochvara, N. Y. Tabachkova // *Materials Letters.* – 2015. – Vol. 153. – P. 5–9. – DOI: doi.org/10.1016/j.matlet.2015.03.144.
23. Dobatkin S. V., Bochvar N. R., Shangina D. V. Aging processes in ultrafine-grained low-alloyed bronzes subjected to equal channel angular pressing // *Advanced Engineering Materials.* – 2015. – Vol. 17. – P. 1862–1868. – DOI: 10.1002/adem.201500099.
24. Influence of microalloying with zirconium on the structure and properties of Cu–Cr alloy after high pressure torsion / D. V. Shangina, N. R. Bochvar, M. V. Gorshenkov, H. Yanar, G. Purcek, S. V. Dobatkin // *Materials Science and Engineering A.* – 2016. – Vol. 650. – P. 63–66. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.10.008.
25. Optimization of strength, ductility and electrical conductivity of Cu–Cr–Zr alloy by combining multi-route ECAP and aging / G. Purcek, H. Yanar, M. Demirtas, Y. Alemdag, D. V. Shangina, S. V. Dobatkin // *Materials Science and Engineering A.* – 2016. – Vol. 649. – P. 114–122. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.09.111.

26. Influence of alloying with hafnium on the microstructure, texture, and properties of Cu–Cr alloy after equal channel angular pressing / D. Shangina, Yu. Maksimenkova, N. Bochvar, Vl. Serebryany, Georgy Raab, A. Vinogradov, Werner Skrotzki & S. Dobatkin // *Journal of Materials Science*. – 2016. – Vol. 51. – P. 5493–5501. – DOI: 10.1007/s10853-016-9854-2.
27. Stolbovsky A. V., Popov V. V., Popova E. N. Structure and Thermal Stability of Tin Bronze Nanostructured by High Pressure Torsion // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2015. – Iss. 5. – P. 118–132. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.118-132. – URL: http://dream-journal.org/issues/2015-5/2015-5_52.html (accessed: 27.06.2020).
28. Evolution of the Structure of Cu–1% Sn Bronze under High Pressure Torsion and Subsequent Annealing / V. V. Popov, E. N. Popova, A. V. Stolbovsky, R. M. Falahutdinov // *Physics of Metals and Metallography*. – 2018. – Vol. 119. – P. 358–367. – DOI: 10.1134/S0031918X18040154.

Received: 28.12.2020**Revised:** 29.01.2021**Accepted:** 26.02.2021**DOI:** 10.17804/2410-9908.2021.1.051-054

THE STRAIN AND STRAIN RATE DEPENDENCE OF THE YIELD STRESS OF ALUMINUM

V. D. Solovei

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation* <https://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  SoloveiVD@yandex.ru

Corresponding author. E-mail: SoloveiVD@yandex.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 92; fax: +7 (343) 374 53 30

The plastic properties of aluminum (99.5 %) are considered. Using the hardening curves (for strain rates of 0.25, 0.4, and 63.0 s⁻¹), analytic dependences of the yield stress of aluminum on strain (in the range between 0.0 and 0.5) and strain rate (in the range between 0.25 and 63.0 s⁻¹) have been found.

Keywords: aluminum, yield stress, hardening curves, analytic dependence of yield stress on strain and strain rate.

References

1. Polukhin P.I., Gun G.Ya., Galkin A.M. *Soprotivlenie plasticheskoi deformatszii metallov i splavov* [Resistance against Plastic Deformation for Metals and Alloys. Handbook]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1976, 488 p. (In Russian).
2. Solovei V.D., Loginov Y.N., Puzanov M.P. Evaluating the Flow Stress of Electrical Steel under Cold Rolling in Terms of the Strain-Rate Hardening Effect. *AIP Conf. Proc.*, 2016, 1785, 040075. DOI: 10.1063/1.4967132.

Подана в журнал: 28.12.2020

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.051-054

ЗАВИСИМОСТЬ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ АЛЮМИНИЯ ОТ ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

В. Д. Соловей

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  SoloveiVD@yandex.ru

Ответственный автор. Электронная почта: SoloveiVD@yandex.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 375–35–92; факс: +7 (343) 374–53–30

Рассматриваются пластические свойства технического алюминия (99,5 %). Используя известные кривые упрочнения при сжатии алюминия для скоростей деформации 0,25; 4,0 и 63,0 с⁻¹, найдены аналитические выражения для предела текучести алюминия от деформации (в области 0,0–0,5) и от скорости деформации (в области 0,25–63,0 с⁻¹).

Ключевые слова: алюминий, напряжение течения, аналитическая зависимость напряжения течения от деформации и скорости деформации.

1. Введение

При совершенствовании технологических процессов обработки металлов давлением, в которых напряженно-деформированное состояние существенно неоднородно, необходимо знать зависимость предела текучести металла от деформации и скорости деформации в аналитическом виде. В литературе, однако, эта зависимость обычно задается с помощью кривых упрочнения для некоторых скоростей деформации. Такое представление усложняет расчеты напряженно-деформированного состояния.

В работе [1] пластические свойства технического алюминия описываются с помощью кривых упрочнения при сжатии для скоростей деформации 0,25; 4,0 и 63,0 с⁻¹, полученных для деформации в пределах 0,0–0,5.

В настоящей работе кривые упрочнения для технического алюминия, представленные в [1], аппроксимируются непрерывными функциями. Аппроксимация производится с помощью метода, использованного в работе [2]. Получены аналитические выражения для предела текучести алюминия от деформации (в области 0,0–0,5) и от скорости деформации (в области 0,25–63,0 с⁻¹).

2. Аппроксимация кривых упрочнения алюминия для скоростей деформаций $\xi = 0,25; 4,0$ и $63,0$ с⁻¹

На рисунке точками представлены кривые упрочнения для сжатия технического алюминия со скоростями деформации $\xi = 0,25; 4,0$ и $63,0$ с⁻¹ [1].

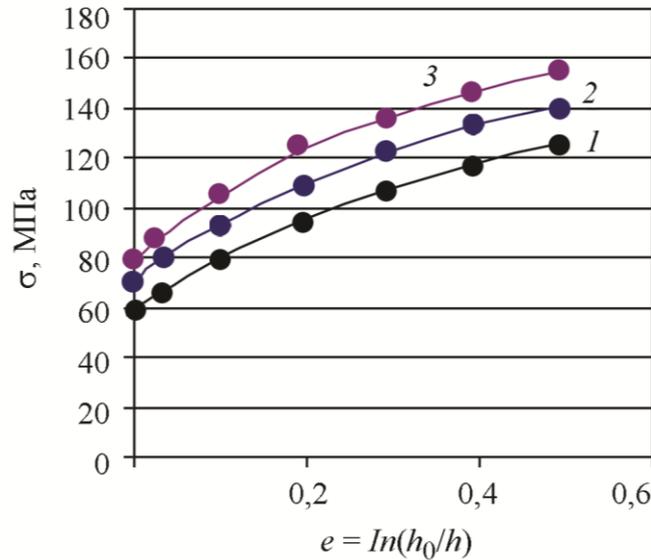
Кривые упрочнения алюминия для различных скоростей деформации построим аппроксимацией по соответствующим точкам с помощью степенных функций

$$\sigma = k_i + l_i e^{m_i}, \quad (1)$$

где $i = 1; 2$ и 3 для скоростей деформации $\xi = 0,25; 4,0$ и $63,0 \text{ с}^{-1}$ соответственно.

Вычисления дают следующие значения искомым коэффициентов:

$$\begin{aligned} k_1 &= 59,0206; & l_1 &= 110,3585; & m_1 &= 0,693; \\ k_2 &= 69,8271; & l_2 &= 116,8319; & m_2 &= 0,676; \\ k_3 &= 76,2594; & l_3 &= 124,0473; & m_3 &= 0,614. \end{aligned}$$



Кривые упрочнения алюминия при $20 \text{ }^\circ\text{C}$ для скоростей деформации, с^{-1} :
 $1 - 0,25; 2 - 4,0; 3 - 63,0$ [1] (точки – данные; сплошные линии – результат аппроксимации)

Точность аппроксимации составляет менее 2 %.

3. Аналитическая зависимость предела текучести алюминия от деформации и скорости деформации

Зависимость предела текучести технического алюминия на сжатие σ от деформации e и скорости деформации ξ определим в виде

$$\sigma(e, \xi) = a_0(e) + a_1(e) \ln \xi + a_2(e) \ln^2 \xi. \quad (2)$$

Аппроксимация кривых упрочнения (1) дает следующие соотношения для коэффициентов в (2):

$$\begin{aligned} a_0(e) &= a_{01} \sigma_1(e) + a_{02} \sigma_2(e) + a_{03} \sigma_3(e); \\ a_1(e) &= a_{11} \sigma_1(e) + a_{12} \sigma_2(e) + a_{13} \sigma_3(e); \\ a_2(e) &= a_{21} \sigma_1(e) + a_{22} \sigma_2(e) + a_{23} \sigma_3(e), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{01} &= 0,3746; & a_{02} &= 0,7514; & a_{03} &= -0,1261; \\ a_{11} &= -0,3607; & a_{12} &= 0,3607; & a_{13} &= -0,0; \\ a_{21} &= 0,0652; & a_{22} &= -0,1308; & a_{23} &= 0,0656. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_1(e)$; $\sigma_2(e)$ и $\sigma_3(e)$ – значения напряжений, относящиеся, соответственно, к кривым упрочнения 1; 2 и 3 представленным соотношением (1), для деформации e .

Точность аппроксимации составляет менее 0,01 %.

Соотношения (1), (2) и (3) определяют зависимость предела текучести технического алюминия на сжатие σ от деформации (в диапазоне $0,0 \leq e \leq 0,5$) и скорости деформации (в диапазоне $0,25 \leq \dot{\xi} \leq 63,0 \text{ с}^{-1}$).

4. Заключение

Аппроксимацией известных кривых упрочнения технического алюминия (99,5 %) для сжатия найдена аналитическая зависимость предела текучести алюминия от деформации (в области $0,0 - 0,5$) и скорости деформации (в области $0,25 - 63,0 \text{ с}^{-1}$). Вне указанной области найденные соотношения могут быть использованы для оценки величины предела текучести технического алюминия.

Литература

1. Полухин П. И., Гун Г. Я., Галкин А. М. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов : справочник. – М. : Металлургия, 1976. – 488 с.
2. Solovei V. D., Loginov Y. N., Puzanov M. P. Evaluating the Flow Stress of Electrical Steel under Cold Rolling in Terms of the Strain-Rate Hardening Effect // AIP Conf. Proc. – 2016. – 1785. – 040075. – DOI: 10.1063/1.4967132.

Received: 30.11.2020
Revised: 01.02.2021
Accepted: 26.02.2021
DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.055-063

ON ONE PROBLEM OF DETERMINING THE OPTIMAL RESIDUAL STRESS FIELD

V. V. Struzhanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation*

 <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

*Corresponding author: E-mail: stru@imach.uran.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7(343)362 30 19

An operator equation is obtained, the solution of which is an intrinsic (residual) stress tensor reducing the stress level to zero in a predetermined region of a rigidly loaded elastic body. It is shown that the operator of this equation is a contraction operator and, therefore, this equation can be solved by the method of successive approximations. An example is given.

Keywords: residual stresses, energy Hilbert space, orthogonal subspaces, operator equation, contraction operator, successive approximations.

References

1. Birger I.A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz Publ., 1963, 262 p. (In Russian).
2. Pozdeev A.A., Nyashin Yu.I., Trusov P.V. *Ostatochnye napryazheniya: teoriya i prilozheniya* [Residual Stresses: Theory and Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 111 p. (In Russian).
3. Pavlov V.F., Kirpichev V.A., and Ivanov V.B. *Ostatochnye napryazheniya i soprotivlenie ustalosti uprochnennykh detalei s kontsentratorami napryazhenii* [Residual Stresses and Fatigue Resistance of the Reinforced Components with Stresses Concentration]. Samara, SNTs RAN Publ., 2008. (In Russian).
4. Abramov V.V. *Ostatochnye napryazheniya i deformatsii v metallakh* [Residual Stresses and Strains in Metals]. Moscow, Mashgiz Publ., 1963, 355 p. (In Russian).
5. Korolev A.V., Mazina A.A., Yakovishin A.S., Shalunov A.V. Technological causes of residual stresses. *Sovremennye Materialy, Tehnika i Tekhnologii*, 2016, vol. 5 (8), pp. 116–119. (In Russian).
6. Struzhanov V.V. Determination of shrinkage stresses in components of stochastically reinforced composites. *Soviet Applied Mechanics*, 1982, vol. 18, no. 5, pp. 445–449. DOI: 10.1007/bf00883786.
7. Shinkin V.N. Residual stresses during expansion of steel pipes. *Young Scientist*, 2015, No. 20, pp. 88–93. ISSN 072-0297. (In Russian).
8. Kolmogorov G.L., Kuznecova E.V., Tiunov V.V. *Tekhnologicheskie ostatochnye napryazheniya i ikh vliyanie na dolgovechnost i nadezhnost metalloizdeliy* [Technological Residual Stresses and their Effect on the Longevity and Reliability of Hardware]. Perm, Izd-vo Permskogo nats. issled. politekhnicheskogo un-ta Publ., 2012, 226 p. (In Russian).

9. Burkin S.P., Shimov G.V., Andryukova E.A. *Ostatochnye napryazheniya v metalloproduksii* [Residual stresses in metal products: tutorial]. Ekaterinburg, Izdatelstvo Uralskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2015, 248 p. (In Russian).
10. Hosford W.F. *Mechanical Behavior of Materials*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 421 p.
11. Kozic D., Gdnser H.-P., Brunner R., Kienerb D., Antretterc T., Kolednik O. Crack arrest in thin metallic film stacks due to material and residual stress inhomogeneities. *Thin Solid Films*, 2018, vol. 668, pp. 14–22. DOI: 10.1016/j.tsf.2018.10.014.
12. Konovalov D.A., Vichuzhanin D.I., Smirnov S.V. Evaluating the residual stresses by the method of indentation. In: *Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference "Matem. Mod. Kraev. Zadachi"*, 1–3 June 2005, part 1, Samara State Technical Univ., Samara, 2005, pp. 155–157. (In Russian).
13. Fishkin A.I. Application of the Tikhonov regularization for residual stresses determination. *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsij i Sooruzhenij*, 2009, No. 4, pp. 48–55.
14. Kudryavtsev I.V. *Vnutrennie napryazheniya kak rezerv prochnosti v mashinostroenii* [Internal Stresses as a Strength Reserve in Mechanical Engineering]. Moscow, Mashgiz Publ., 1951, 278 p. (In Russian).
15. Rozhkov I.I., Mylnikov V.V. Calculation of internal residual stresses arising in hardened parts of machines after chemical-thermal processing. *International Journal of Experimental Education*, 2014. vol. 1, pp. 114–118. (In Russian).
16. Sinchurin D.V. The effect of hydraulic shot peening on the increase of the service reliability of parts. *Young Scientist*, 2015, vol. 21.2 (101.2), pp. 54–57. (In Russian).
17. Lurie A. I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p. (In Russian).
18. Sokolov A.G., Struzhanov V.V. A problem of optimizing the stressed state in an elastic solid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, vol. 65, iss. 2, pp. 311–316. DOI: 10.1016/S0021-8928(01)00035-1.
19. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 512 p. (In Russian).
20. Struzhanov V. V. On the method of orthogonal projections in the theory of elasticity. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 308–325. DOI: 10.14498/vsgtu1542. (In Russian).
21. Kantorovich A.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyi Analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 744 p. (In Russian).
22. Konstantinov R.V. *Lektsii po funktsionalnomu analizu* [Lectures on Functional Analysis]. Moscow, MFTI Publ., 2009, 374 p. (In Russian).

Подана в журнал: 30.11.2020

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.1.055-063

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В. В. Стружанов

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
34, ул. Комсомольская, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7(343)362–30–19

Получено операторное уравнение, решением которого является тензор собственных (остаточных) напряжений, снижающий до нуля уровень напряжений в наперед заданной области упругого тела при его жестком нагружении. Показано, что оператор этого уравнения является оператором сжатия и, следовательно, решение этого уравнения можно найти методом последовательных приближений.

Ключевые слова: остаточные напряжения, энергетическое гильбертово пространство, ортогональные подпространства, операторное уравнение, оператор сжатия, последовательные приближения.

1. Введение

Остаточными (собственными) напряжениями принято называть такие напряжения, которые существуют и уравниваются в теле после устранения воздействий, вызвавших их появление. Уровень остаточных напряжений, возникающих почти при всех технологических процессах термической и механической обработки, является важным параметром, определяющим качество элементов конструкций [1–11]. Эти напряжения, складываясь с напряжениями от внешней нагрузки, либо увеличивают несущую способность конструктивных элементов, либо уменьшают ее [3, 8, 12]. Остаточные напряжения определяют либо экспериментально [12], либо используя современные математические методы [13]. Причем в технике хорошо известны технологии создания благоприятных полей остаточных напряжений [1, 14–16]. Очевидно, что дать оценку влияния остаточных напряжений на прочность изделий желательно получить уже на стадии проектирования для того, чтобы разработать такую технологию изготовления деталей конструкций, при которой возникали бы остаточные напряжения, благоприятно взаимодействующие с напряжениями, появляющимися в процессе их эксплуатации.

В некоторых случаях необходимо снизить уровень напряжений только в отдельных областях – областях концентрации напряжений от внешней нагрузки. В работе приведена методика расчета такого поля собственных напряжений, которое при заданном жестком нагружении упругого тела, складываясь с напряжениями от нагрузки, позволяет в отдельных областях тела получить суммарное напряженное состояние, сколь угодно близкое к нулю. При этом неявно предполагается, что в других областях суммарные напряжения не превосходят предела текучести.

2. Постановка задачи

Рассмотрим упругое тело V , ограниченное достаточно гладкой поверхностью Γ . Зададим точкам части границы Γ_1 перемещения, определяемые вектором $\mathbf{v}(y), y \in \Gamma_1$. Оставшаяся часть границы Γ_2 свободна от напряжений. Напряженно-деформированное состояние в теле находится из решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (1)$$

Здесь первая группа уравнений – это уравнения равновесия; вторая – соотношения Коши; третья – закон Гука [17]. Симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций обозначены, соответственно, символами $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{u} – вектор перемещений внутренних точек тела V ; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ ; \mathbf{C} – симметричный тензор четвертого ранга модулей упругости; ∇ – оператор Гамильтона, точкой обозначено скалярное произведение, двумя точками – двойное скалярное произведение тензоров [10].

Если теперь в теле возникнет поле первоначальных несовместных деформаций [11], заданное симметричным несовместным тензором второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}^*(x)$, $x \in V$, то появятся дополнительные самоуравновешенные напряжения [11]. Для их определения необходимо решить краевую задачу [18]:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}'' = 0, \mathbf{e} = \text{def } \mathbf{u}, \mathbf{q}'' = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0, \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{q}'' и \mathbf{e} – симметричные тензоры, второго ранга напряжений и деформаций.

Согласно принципу суперпозиции напряженное состояние в теле задано теперь суммой тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}(x) + \mathbf{q}''(x), x \in V$. Будем считать, что тензор $\mathbf{q}''(x)$ оптимизирует напряженное состояние в упругом теле, если в некоторой наперед заданной области $V_1 \subset V$ имеет место равенство

$$\chi(x)\mathbf{q}''(x) + \chi(x)\boldsymbol{\sigma}(x) = 0, \chi(x) = \{1, x \in V_1; 0, x \notin V_1\}. \quad (3)$$

Тогда задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется найти такое поле первоначальных деформаций, при реализации которого возникнут такие дополнительные напряжения, что в области V_1 будет выполняться равенство (3).

3. Функциональные пространства тензоров второго ранга

В основу дальнейших рассуждений положим энергетическое гильбертово пространство T , состоящее из всевозможных симметричных тензоров напряжений, определенных в V [19]. Скалярное произведение и норма в нем заданы формулами [19, 20]

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int_V \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_2 dV; \quad \|\mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{p}, \mathbf{p}); \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in T,$$

где \mathbf{S} – тензор модулей податливости $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$. Известно [19, 20], что пространство T является ортогональной суммой следующих подпространств:

$$T_1 = \{\mathbf{p}': \mathbf{e}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}'; \text{Jnk } \mathbf{e}' = 0\}; \quad T_2 = \{\mathbf{p}': \nabla \cdot \mathbf{p}' = 0, \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\}$$

Оператор Jnk – оператор несовместности [17].

Элементами подпространства T_1 являются решения краевой задачи теории упругости при всевозможных объемных и поверхностных силах:

$$\nabla \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{f}; \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}; \quad \mathbf{p}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}'; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'|_{\Gamma} = \mathbf{t}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$; $x \in V$ – вектор объемных сил; $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x)$; $x \in \Gamma$ – вектор поверхностных сил. Элементами подпространства T_2 являются решения краевой задачи:

$$\nabla \cdot \mathbf{p}'' = 0, \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}''|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

для всевозможных симметричных тензоров второго ранга первоначальных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Если $\mathbf{p}' \in T_2$, а $\mathbf{p}'' \in T_2$, то, используя формулу Остроградского–Гауса, находим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}'', \mathbf{p}') &= \int_V \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{e}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot \text{def } \mathbf{u} dV = \\ &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще два подпространства:

$$D_1 = \{\mathbf{q}': \text{Jnk}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q}') = 0; \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0\}; \quad D_2 = \{\mathbf{q}': \nabla \cdot \mathbf{q}' = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}''|_{\Gamma_2} = 0\}.$$

Элементами подпространства D_1 являются решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{q}' = \mathbf{f}; \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}; \quad \mathbf{q}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}'; \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0; \quad \mathbf{q}' \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{t}$$

для всевозможных \mathbf{f} и \mathbf{t} .

Элементы подпространства D_2 – решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{q}'' = 0; \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}; \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*); \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}; \quad \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$$

для различных $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ и V .

Используя формулу Остроградского–Гауса, находим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}'', \mathbf{q}') &= \int_V \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{q}' dV = \int_V \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{e}' dV = \int_V \mathbf{q}'' \cdot \text{def } \mathbf{u} dV = \\ &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{u} d\Gamma = \\ &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{u} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, пространство T есть ортогональная сумма либо подпространств T_1 и T_2 , либо подпространств D_1 и D_2 ; $T = T_1 \oplus T_2$; $D = D_1 \oplus D_2$.

Итак, любой тензор $\mathbf{p} \in T$ [19, 20] можно представить единственным образом: суммой $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ или суммой $\mathbf{p} = \mathbf{q}' + \mathbf{q}''$, где $\mathbf{p}' \in T_1$; $\mathbf{p}'' \in T_2$; $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' = 0$; $\mathbf{q}' \in D_1$; $\mathbf{q}'' \in D_2$; $\mathbf{q}', \mathbf{q}'' = 0$; $\mathbf{p}' = P_1 \mathbf{p}$; $\mathbf{p}'' = P_2 \mathbf{p}$; $\mathbf{q}' = Q_1 \mathbf{p}$; $\mathbf{q}'' = Q_2 \mathbf{p}$.

Здесь P_1 и P_2 – операторы ортогонального проектирования на подпространства T_1 и T_2 соответственно, а Q_1 и Q_2 – ортопроекторы на D_1 и D_2 , причем $P_1 + P_2 = I$; $Q_1 + Q_2 = I$, где I – тождественный оператор. Далее очевидно, что $T_2 \subset D_2$ и $D_1 \subset T_1$. Тогда $Q_1 P_2 = P_2 Q_1 = 0$ [21, 22] (проекторы Q_1 и P_2 ортогональны, так как ортогональны подпространства D_1 и T_2). И кроме того имеют место равенства:

$$P_1 Q_1 = Q_1; Q_1 P_1 = Q_1; Q_2 P_2 = Q_2; P_2 Q_2 = Q_2. \quad (6)$$

Эти равенства проверяются непосредственно. Например:

$$P_1 Q_1 = (I - P_2) Q_1 = Q_1 - P_2 Q_1 = Q_1$$

и т. д. Отметим, наконец, что решения задач (1) и (2) принадлежит подпространству D_2 .

4. Решение системы (2)

1. Найдем теперь общий вид решения системы (2). Задачу будем решать в два этапа. Сначала запишем решение задачи (5). В работе [18] показано, что тензор напряжений здесь определяется выражением $\mathbf{p}'' = -P_2 \boldsymbol{\sigma}^*$ ($\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*$), а совместные деформации и перемещения являются решениями уравнений (4) при $f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*$, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$ (задача (A)), причем $\mathbf{p}' = P_1 \boldsymbol{\sigma}^*$. Итак, получили напряженно-деформированное состояние в теле со свободной границей при заданном поле первоначальных деформаций. Обозначим через \mathbf{w} перемещения, которые получают при этом точки границы ($\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{w}$). На втором этапе необходимо решить задачу (1) при граничных условиях $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = -\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$ (задача (B)) и затем наложить это решение на решение задачи (5).

Рассмотрим дополнительную систему

$$\nabla \cdot \mathbf{p}'_w = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}, \mathbf{p}'_w = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}', \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{w}, \mathbf{p}'_w \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2}. \quad (7)$$

Решение системы (7), очевидно, совпадает с решением задачи (A). Следовательно, $\mathbf{p}'_w = \mathbf{p}' = P_1 \boldsymbol{\sigma}^*$. Из данного тензора \mathbf{p}'_w вычтем тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_w$, удовлетворяющий системе (1) с граничными условиями $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{w}$, $\boldsymbol{\sigma}_w \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$. Тогда $\mathbf{p}'_w - \boldsymbol{\sigma}_w \in D_1$. Отсюда $\mathbf{p}'_w = (\mathbf{p}'_w - \boldsymbol{\sigma}_w) + \boldsymbol{\sigma}_w$, где $\boldsymbol{\sigma}_w \in D_2$.

То есть имеет место разложение тензора \mathbf{p}'_w на сумму элементов из подпространства D_1 и D_2 . В силу единственности такого представления находим, что $\boldsymbol{\sigma}_w = Q_2 \mathbf{p}'_w = Q_2 P_1 \boldsymbol{\sigma}^*$. Теперь решение задачи (B) определяется выражением $(-Q_2 P_1 \boldsymbol{\sigma}^*)$. Итак, искомое решение задачи (2) с учетом равенства (6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'' &= -P_2 \boldsymbol{\sigma}^* - Q_2 P_1 \boldsymbol{\sigma}^* = -(I - P_1) \boldsymbol{\sigma}^* - Q_2 P_1 \boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}^* + (I - Q_2) P_1 \boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}^* + \\ &+ Q_1 P_1 \boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}^* + Q_1 \boldsymbol{\sigma}^* = -(I - Q_1) \boldsymbol{\sigma}^* = -Q_2 \boldsymbol{\sigma}^*. \end{aligned} \quad (8)$$

5. Метод решения задачи оптимизации

Следуя работе [20], перепишем уравнение (3) с учетом равенства (8) в виде $\chi Q_2 \boldsymbol{\sigma}^* = \chi \boldsymbol{\sigma}$. Подставляя сюда выражение $Q_2 = I - Q_1$ получаем операторное уравнение $\chi \boldsymbol{\sigma}^* = \chi Q_1 \boldsymbol{\sigma}^* + \chi \boldsymbol{\sigma}$.

Будем искать решение данного уравнения на множестве χT . Если $\sigma^* \in \chi T$, то $\chi \sigma^* = \sigma^*$, ($\chi \chi = \chi$). Тогда окончательно

$$\sigma^* = \chi Q_1 \sigma^* + \chi \sigma. \quad (9)$$

Оценим норму оператора χQ_1 . Имеем $\|\chi Q_1\| \leq \|\chi\| \cdot \|Q_1\|$. Известно, что $\|Q_1\| = 1$ [14]. Далее $\|\chi p\|^2 = \int_V \chi p \cdot \cdot S \cdot \cdot \chi p \, dv = \int_{V_1} p \cdot \cdot p \, dV < \int_V p \cdot \cdot S \cdot \cdot p \, dV = \|p\|^2$. Здесь $p \cdot \cdot S \cdot \cdot p$ – положительно определенная квадратичная форма, p – некоторый элемент из множества $M \subset T$, которое составляют тензоры, определенные в области V' , где V' – любая область? входящая или совпадающая с V , причем $V_1 \subset V'$. Тогда, рассматривая χ как оператор, действующий из $M \subset T$ в χT , получаем $\|\chi\| < 1$. Если же χ действует из χT в χT , то $\|\chi\| = 1$. Очевидно, что оператор Q_1 отображает элементы из T в M , кроме элементов $\chi q' \in D_1$. Отсюда следует, что оператор χQ_1 , определенный на множестве $\chi T (\chi T \cap D_1)$, имеет норму $\|\chi Q_1\| < 1$. Следовательно, он является оператором сжатия, и решение уравнения (9) представимо сходящимся рядом

$$\sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi Q_1)^n \chi \sigma. \quad (10)$$

Наконец, искомое поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^* = S \cdot \cdot \sigma^*$.

Замечание 1. Так как $Q_2(\sigma^* + q') = Q_2 \sigma^*$, где q' – произвольный элемент из D_1 , то любой тензор $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon'$, где $\varepsilon' = S \cdot \cdot q'$, также инициирует поле напряжений $q'(x)$, обладающее свойством (3).

Замечание 2. Если в теле требуется создать заданное поле напряжений $q'(x)$, то поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^*(x) = \varepsilon''(x) + \varepsilon'(x)$, где $\varepsilon'' = S \cdot \cdot q''$; ε' – произвольный тензор совместных деформаций, которому отвечают перемещения, исчезающие в нуль на границе Γ_1 .

6. Пример

Рассмотрим частный случай. Пусть точкам границы тонкого круглого диска радиуса R заданы радиальные перемещения ν . Требуется найти первоначальные деформации, вызывающие появление таких добавочных напряжений, которые в сумме с напряжениями от внешней нагрузки дают нулевое напряженное состояние в центральной зоне радиуса R_1 .

Решения краевых задач (1) и (2) определяют соответственно формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{E\nu}{(1-\mu)R}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{\nu}{R}; \\ q_r'' = q_\theta'' &= \frac{E \varepsilon_0^*}{2(1-\mu)} \left[(1+\mu) \frac{R_1^2}{R^2} + (1-\mu) \right], \\ e_r = e_\theta &= \frac{1}{2} \varepsilon_0^* (1+\mu) \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2} \right), \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ q_{r,\theta}'' &= \frac{E \varepsilon_0^* R_1^2}{2R^2(1-\mu)} \left[(1+\mu) \pm (1-\mu) \frac{R^2}{r^2} \right], \\ e_{r,\theta} &= -\frac{\varepsilon_0^* (1+\mu) R_1^2}{2R^2} \left(1 \pm \frac{R_1^2}{R^2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

Индексами r и θ обозначены, соответственно, радиальные и тангенциальные напряжения и деформации; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; $\varepsilon_0^* = \varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^*$ – первоначальные деформации в центральной зоне, требующие определения.

Используя данные выражения, находим, что в формуле (10) величина

$$\chi\sigma = \chi \frac{E\nu}{(1-\mu)R}$$

и оператор

$$Q_1 = \frac{1}{2}(1+\mu) \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right),$$

где $\chi = 1$, $r \in [0, R_1]$; $\chi = 0$, $r \in [R_1, R]$. Тогда суммируя ряд (10), который представляет собой убывающую геометрическую прогрессию, получаем:

$$\sigma_0^* = \chi\sigma_r^* = \chi\sigma_\theta^* = \frac{2\chi R \nu E}{(1-\mu)[(1-\mu)R^2 + (1+\mu)R_1^2]}$$

Отсюда искомое значение $\varepsilon_0^* = (1-\mu)E^{-1}\sigma_0^*$. Далее получаем:

$$q_r'' = q_\theta'' = \frac{E \mu}{(1-\mu)R}; \quad 0 \leq r \leq R_1;$$

$$q_{r,\theta}'' = \frac{E R^2 \nu}{R(1-\mu)[(1-\mu)R^2 + (1+\mu)R_1^2]} \left[(1+\mu) \pm (1-\mu) \frac{R^2}{r^2} \right]; \quad R_1 \leq r \leq R.$$

Таким образом, суммарные напряжения в центральной зоне равны нулю, а в кольце, окружающем эту область, получаем решение задачи Ляме для соответствующих граничных условий.

Литература

1. Биргер И. А. Остаточные напряжения. – М. : Машгиз, 1963. – 262 с.
2. Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусков П. В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М. : Наука, 1982. – 111 с.
3. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Иванов В. Б. Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений. – Самара : Самар. науч. центр РАН, 2008. – 64 с.
4. Абрамов В. В. Остаточные напряжения и деформации в металлах. – М. : Машгиз, 1961. – 355 с.
5. Технологические причины возникновения остаточных напряжений / А. В. Королев, А. А. Мазина, А. С. Яковишин, А. В. Шалунов // Современные материалы, техника и технологии. – 2016. – № 5 (8). – С. 116–119.
6. Struzhanov V. V. Determination of shrinkage stresses in components of stochastically reinforced composites // Soviet Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 18, no. 5. – P. 445–449. – DOI: 10.1007/bf00883786.
7. Шинкин В. Н. Остаточные напряжения при экструдировании стальной трубы // Молодой ученый. – 2015. – № 20 (100). – С. 88–95.

8. Колмогоров Г. Л., Кузнецова Е. В., Тиунов В. В. Технологические остаточные напряжения и их влияние на долговечность и надежность металлоизделий. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехнического ун-та, 2012. – 226 с.
9. Буркин С. П., Шимов Г. В., Андрюкова Е. А. Остаточные напряжения в металлопродукции : учебное пособие. – Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 2015. – 248 с.
10. Hosford W. F. Mechanical Behavior of Materials. – Cambridge : Cambridge University Press, 2005. – 421 p.
11. Crack arrest in thin metallic film stacks due to material and residual stress inhomogeneities / D. Kozic, H.-P. Gdnser, R. Brunner, D. Kienerb, T. Antretterc, O. Kolednik // Thin solid Films. – 2018. – Vol. 668. – P. 14–22. – DOI: 10.1016/j.tsf.2018.10.014.
12. Коновалов Д. А., Вичужанин Д. И., Смирнов С. В. Оценка остаточных напряжений методом внедрения индентора // Труды Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», 1–3 июня 2005 г. – СамГТУ, Самара, 2005. – Ч. 1 : Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. – С. 155–157.
13. Фишкин А. И. Применение метода регуляризации Тихонова для определения остаточных напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 48–55.
14. Кудрявцев И. В. Внутренние напряжение как резерв прочности в машиностроении. – М. : Машгиз, 1951. – 278 с.
15. Рожков И. И., Мильников В. В. Расчет внутренних остаточных напряжений, возникающих в закаленных деталях после химико-термической обработки // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 1. – С. 114–118.
16. Синчуринов Д. В. Влияние метода дросструйного упрочнения на повышение эксплуатационной надежности деталей // Молодой ученый. – 2015. – № 21.2 (101.2). – С. 54–57.
17. Лурье А. И. Теория упругости. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
18. Sokolov A. G., Struzhanov V. V. A problem of optimizing the stressed state in an elastic solid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – Vol. 65, iss. 2. – P. 311–316. – DOI: 10.1016/S0021-8928(01)00035-1.
19. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
20. Стружанов В. В. О методе ортогональных проекций в теории упругости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 308–325. – DOI: 10.14498/vsgtu1542.
21. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М. : Наука., 1977. – 744 с.
22. Константинов Р. В. Лекции по функциональному анализу. – М. : МФТИ, 2009. – 374 с.