

DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2

Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

<http://dream-journal.org>

2,2018

March-April

Editor-in-Chief: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**, **Sergey V. Gladkovsky**

Editorial Council

Chairman: **Eduard S. Gorkunov**, RAS Academician (Russia)

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Sergey G. Psakhye (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Alexander A. Bogatov (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Kononov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povolotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н.
Заместители главного редактора: **Сергей Витальевич Смирнов**, д.т.н.; **Сергей Викторович Гладковский**, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Псахье Сергей Григорьевич, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – **Горкунов Эдуард Степанович**, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Смирнов Сергей Витальевич**, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – **Гладковский Сергей Викторович**, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Богатов Александр Александрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазиский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

CONTENTS

| | |
|---|----|
| Emelyanov I. G. Mechanics of shells and its applications | 6 |
| Stepanova L. V. Asymptotic analysis of the stress field at a crack tip in a linearly elastic material: experimental determination of Williams expansion coefficients | 29 |
| Polyakov A. P. Dynamic powder compaction processes | 42 |
| Solovei V. D. A variational principle for the disturbances of particle velocities in the flow of a perfectly plastic strip under rolling | 83 |
| Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary | 92 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Емельянов И. Г. Механика оболочек и ее приложения | 6 |
| Степанова Л. В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины в линейно упругом материале: экспериментальное определение коэффициентов разложения М. Уильямса..... | 29 |
| Поляков А. П. Динамические процессы уплотнения порошков..... | 42 |
| Соловей В. Д. Вариационный принцип для возмущений скоростей перемещений идеально пластической полосы при прокатке..... | 83 |
| Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения, описывающие конвективное ползущее течение Куэтта–Хименца при линейном распределении температуры на верхней границе | 92 |

Received: 25.12.2017

Revised: 26.03.2018



Accepted: 30.03.2018

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.006-028

MECHANICS OF SHELLS AND ITS APPLICATIONS

I. G. Emelyanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russia*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>;  emelyanov@imach.uran.ru

Corresponding author. E-mail: emelyanov@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 73; fax: +7 (343)374 53 30

The paper presents the results of applying shell theory methods to solving problems of determining the stress-strain state and durability of thin-walled structures. Some basic concepts and principles of the shell theory are given, as well as some information on its history. A relationship is shown between the construction of a mathematical model of a certain class of problems for shells and the development of a problem solution method. Frequently used shell models and numerical methods for solving applied problems are considered. A way of reducing problem dimensionality is considered; namely, the application of the method of reducing the equations of the theory of shells to a number of Cauchy problems with Godunov orthogonalization. It is shown that one type of problems for shells, which is often encountered in the analysis of various technical objects, is problems with moving boundaries, particularly, contact problems. The paper considers one of the effective ways of solving contact problems for shells of revolution, namely, the virtual element method. In contrast to the finite element method, an increase in the number of virtual elements does not increase the size of the structure stiffness matrix. This is a great advantage of the virtual element method, which allows one to save computational resources for many problems. The study presents scientific papers on the investigation of thin-walled structures and results obtained with allowance made for the use of application of recent methods of shell mechanics.

Keywords: shell elements, shell theory, evaluation of strength and durability, contact problems, problem dimensionality reduction, numerical methods, and virtual element method.

References

1. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1935, 674 p. (In Russian).
2. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike* [General Theory of Shells and its Application in Engineering]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, 784 p. (In Russian).
3. Goldenveyzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. M., Nauka Publ., 1976, 512 p. (In Russian).
4. Lur'e A. I. *Statics of thin-walled elastic shells*, transl. from Russian, ed. [AEC-tr-3798, U.S. Atomic Energy Commission]. Tech. Info. Service, 1947.
5. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin-Walled Shells]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1962, 431p. (In Russian).
6. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1959.

7. Flügge W. *Statik und Dynamik der Schalen*, 2-te neubearb. Aufl. Springer-Verl., 1957.
8. Chernykh K.F. *Lineynaya teoriya obolochek* [Linear Theory of Shells. Part I]. Leningrad, LGU Publ., 1962, 274 p. (In Russian).
9. Chernykh K.F. *Lineynaya teoriya obolochek* [Linear Theory of Shells. Part II]. Leningrad, LGU Publ., 1964, 396 p. (In Russian).
10. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. *Metody rascheta obolochek. T. 4. Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti* [Shell Calculation Methods. Vol. 4. Theory of Variable-Stiffness Shells]. Kiev, Nauk. Dumka, 1981, 544 p. (In Russian).
11. Volmir A.S., Kuranov B.A., Turbaisvsky A.T. *Statika i dinamika slozhnykh struktur* [Statics and Dynamics of Complex Structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 248 p. (In Russian).
12. Grigorenko Ya.M. *Izotropnye i anizotropnye sloistye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti* [Isotropic and anisotropic layered shells of revolution with a variable stiffness]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1973, 228 p. (In Russian).
13. Rogalevich V.V. *Kollokatsionnye metody. Sushchnost. Primery* [Collocation Methods. Essence. Examples]. Ekaterinburg, AMB Publ., 2001, 298 p. (In Russian).
14. Crouch S. L., Starfield A. M. *Boundary element methods in solid mechanics*. George Allen & Unwin, London, 1983, 322 p.
15. Brebbia C.A., Walker S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, London, 1979.
16. Artyukhin Yu.P., Gribov A.P. *Resheniye zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov* [Solution of Nonlinear Deformation Problems by the Boundary Element Method]. Kazan, Fen Publ., 2002, 199 p. (In Russian).
17. Banerjee P. K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill Book Company, London, 1981.
18. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate Methods of Higher Analysis*. Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 2018, 704 p.
19. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Emelyanov I.G., Kryukov N.N., Nemish Yu.N., Pankratova N.D., Pelekh B.L., Vlaikov G.G., Maksimuk A.V., Urusova G.P., A.N. Guz ed. *Mekhanika kompozitov: v 12 t. T. 8. Statika elementov konstruksiy* [Composite Mechanics. In 12 vols. Vol. 8. Statics of Structural Components]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1999, 379 p. (In Russian).
20. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 376 p. (In Russian).
21. Godunov S.K. Numerical solution of boundary-value problems for a system of linear ordinary differential equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1961, vol. 16, no. 3, pp. 171–174.
22. Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.Ya. *Chislenno-analiticheskoye resheniye zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley* [Numerical Analytical Solution of Shell Mechanics Problems on the Basis of Different Models]. Kiev, Akademperiodika Publ., 2006, 472 p. (In Russian).
23. Emelyanov I.G. *Kontaktnye zadachi teorii obolochek* [Contact Problems of the Shell Theory]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2009, 185 p. (In Russian).
24. Emelyanov I.G., Mironov V.I. *Dolgovechnost obolocheknykh konstruksiy* [Durability of Shell Structures]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2012, 224 p. (In Russian).
25. Gallagher R.H. *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
26. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite Element Method in Thin-Walled Structure Statics and Dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p. (In Russian).
27. Rikards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [Finite Element Analysis in Theory of Shells and Plates]. Riga, Zinatne Publ., 1988, 284 p. (In Russian).

28. Zenkevich O.K. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Boundary-Element Method in Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 541p. (In Russian).
29. Novozhilov I.I. *Voprosy mekhaniki sploshnoy sredy* [Issues of Continuum Mechanics]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1989, 400 p. (In Russian).
30. Emelyanov I.G., Efimov V.P., Kuznetsov A.V. A model of the stress-strain state of a tank car boiler with an improved scheme of support on the frame. *Tyazheloe Mashinostroyeniye*, 2005, no. 8, pp. 44–49. (In Russian).
31. Emelyanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V. Evaluation of the stress state and service life of shell structures. *Problemy Mashinostroeniya i Nadezhnosti Mashin*, 2007, no. 5, pp. 57–65. (In Russian).
32. Vasilenko A.T., Golub G.P., Grigorenko Ya.M. Calculating the parameters of the stress state of composite structural components on the basis of shell models. In: *Raschety na prochnost, vyp. 30* [Strength Calculations, iss. 30]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, pp. 87–96. (In Russian).
33. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
34. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, num. 92, ss. 156–171.
35. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnyye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact Problems in Plates and Shells Theory]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1980, 411p. (In Russian).
36. Kantor B.Ya. *Kontaktnyye zadachi nelineynoy teorii obolochek vrashcheniya* [Contact Problems in Nonlinear Theory of Rotated Shells]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1990, 136 p. (In Russian).
37. Artyukhin Ju.P., Malkin S.A. Artjuhina Ju.P., Malkin S.A. *Analiticheskie i chislennyye metody resheniya integralnykh uravneniy v zadachakh uprugogo vozdeystviya tel* [Analytical and Numerical Methods for Solving Integral Equations in Problems of Elastic Action of Bodies]. Kazan, Kazanskiy Gos. Un-t Publ., 2007, 292 p. (In Russian).
38. Mossakovskii, V.I., Gudramovich, B.C., and Makeev, E.M. *Kontaktnoe vzaimodeystvie elementov obolochechnykh konstruksii* [Contact Interaction of Shell Elements]. Kiev, Naukova dumka Publ., 288 p. (In Russian).
39. Obratsov I.F., Nerubailo B.V., Olshansky V.P. *Obolochki pri lokalizovannykh vozdeystviyakh (obzor rabot, osnovnyye rezultaty i napravleniya issledovaniy)*. Dep. v VINITI 12.02.88 [Shells under Local Effects. Survey, Main Results and Lines of Research]. Moscow, VINITI Publ., 1988, 192 p. (In Russian).
40. Pelekh B.L., Maksimuk A.V., Korovaichuk I.M. *Kontaknyye zadachi dlya sloistykh elementov konstruksiy i tel s pokrytymi* [Contact Problems for Layered Structural Components and Coated Bodies]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, 280 p. (In Russian).
41. Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V. Application of Virtual Elements to the Determination of the Stress State of Shells of Revolution. *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 245–252. (In Russian).
42. Emel'yanov I.G. Investigation into the contact interaction between shell and base with notches. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 263–270. DOI: 10.3103/S1052618815030048.
43. Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V. Evaluation of the life of a shell construction lying on supports. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2010, vol. 39, iss. 1, pp. 83–88. DOI: 10.3103/S1052618810010139.
44. Mironov V.I., Yemel'yanov I.G. Complete diagram method for fatigue resistance calculation. In: *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Prochnost materialov i elementov konstruksiy"* [Strength of materials structure elements: Proceedings of International Scientific and Technical Conference, Kiev, September 28–30, 2010]. Kiev, IPP NANU, 2011, pp. 697–704.

45. Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V. Cyclic life of tank car shell. In: *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Prochnost materialov i elementov konstruksiy"* [Strength of materials structure elements: Proceedings of International Scientific and Technical Conference, Kiev, September 28–30, 2010]. Kiev, IPP NANU, 2011, pp. 836–843.
46. Yemelyanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V., Yakushev A.V. Contact interaction of boiler at the tank-truck with the tracks bearings. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*, vol. 13, nos. 1–2, 2011, pp. 436–439. (In Russian).
47. Yemelyanov I.G. Mironov V.I., Yakushev A.V. Contact problem in the fatigue strength calculation of tank wagon elements. *Transport Urala*, 2011, no. 3 (30), pp. 49–55.
48. Yemelyanov I.G., Mironov V.I., Yakushev A.V., Lukashuk O.A. Development of rapid method for car steel quality. *Transport Urala*, 2012, no. 2 (33), pp. 13–17. (In Russian).
49. Barashkova E., Emelyanov I. Stress State of Shells under Arbitrary Load. In: *Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Finite Differences - Finite Elements – Finite Volumes - Boundary Elements (F-and-B'12)*, Prague, Czech Republic, September 24-26, 2012. Prague, WSEAS Press, 2012, pp.33–37.
50. Emelyanov I. G., Mironov V. I. Contact problem for a shell considering the transverse load. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 1, pp. 36–40. DOI: 10.3103/S1052618813010056.
51. Barashkova Ye.A., Yemel'yanov I.G. Determining stress state of shells at local loading. In: *Matematicheskiye metody i metody optimizatsii v mashinostroyenii: materialy I Mezhdunarodnoy konferentsii po metodam optimizatsii v tekhnike (OTENG '13)* [Mathematical methods and optimization methods in mechanical engineering: Proceedings of the Ist International Conference on Optimization Methods in Engineering, Antalya, Turkey, October 8-10, 2013, pp.109–113.
52. Yemelyanov I.G., Kuznetsov A.V., Mironov V.I. Mathematical model describing the stress state of gas turbine locomotive cabin upon collision with obstacle. *Transport Urala*, 2013, no. 4 (39), pp. 71–74. (In Russian).
53. Emelyanov I. G., Kuznetsov A. V. The stressed state of shell structures under local loads. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 1, pp. 42–47. DOI: 10.3103/S1052618814010051.
54. Yemel'yanov I.G., Kuznetsov A.V., Mironov V.I. Determination of lifetime of tank car structural elements. *Reliability and life of machines and structures*, 2014, iss. 38, pp. 45–54.
55. Mironov V.I., Kuznetsov A.V., Emel'yanov I.G. Consideration of cyclic degradation of the material and abnormality of the surface layer mechanical properties in calculating the life of a plate with an opening. *Strength of Materials*, 2014, vol. 46, no. 5, pp. 638–643. DOI: 10.1007/s11223-014-9594-y.
56. Yemel'yanov I.G. Application of discrete Fourier series to the stress analysis of shell structures. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 245–253. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20.
57. Emel'yanov I.G. Mironov V.I. Kuznetsov A.V. Estimation of the fracture strength of a spatial beam–rod structure notches. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 5, pp. 449–454. DOI: 10.3103/S1052618815050076.
58. Emel'yanov I. G. Mironov V.I. Kuznetsov A.V. On an approach to the evaluation of the strength of a spatial rod system under impact loading. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 2, pp. 16–23. Available at http://dream-journal.org/issues/2015-2/2015-2_24.html (accessed 05.05.2015).
59. Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V. The definition of the resistance area boundaries for a locomotive operator cab under non-regulated loads. In: *AIP Conf. Proc.*, 2016, 1785, 040014. DOI: 10.1063/1.4967071.

60. Emel'yanov I.G. Mironov V.I. Kuznetsov A.V. Determination of safe operating conditions for supporting structures under abnormal loads. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 5, pp. 136–142. DOI: 10.3103/S1052618817020042.
61. Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V. Vehicle Survivability Calculation. *Russian Journal of Construction Science and Technology*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 40–44. DOI: 10.15826/rjct.2017.1.005.
62. Yemel'yanov I.G., Kuznetsov A.V. Opredeleniye napryazhennogo sostoyaniya tonkostennykh konstruktsiy s ispol'zovaniyem metodov teorii obolochek. *Transportnye Sistemy i Tekhnologii*, 2017, no. 3, pp. 64–78.
63. Emelyanov I. G., Mironov V. I., Kuznetsov A. V. Evaluating the effect of damping structures in the design of a locomotive cab during a collision. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, pp. 040011. DOI: 10.1063/1.5017359. Available at: <http://aip.scitation.org/toc/apc/1915/1?expanded=1915>.

Подана в журнал: 25.12.2017

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.006-028

МЕХАНИКА ОБОЛОЧЕК И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

И. Г. Емельянов

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-9733-5485>  emelyanov@imach.uran.ru

Ответственный автор. Электронная почта: emelyanov@imach.uran.ru

Адрес для переписки: 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–73; факс: +7 (343) 374–53–30

В статье представлены результаты использования методов теории оболочек для решения задач определения напряженно-деформированного состояния и долговечности тонкостенных конструкций. Приведены некоторые базовые понятия и принципы теории оболочек, а также некоторые сведения ретроспективы ее развития. Показана взаимосвязь между процессом построения математической модели какого-либо класса задач для оболочек и разработкой метода решения задачи. Рассмотрены наиболее часто используемые в настоящее время модели оболочек и численные методы решения прикладных задач, а также один из способов уменьшения размерности задачи – использование численно-аналитического метода сведения уравнений теории оболочек к ряду задач Коши с ортогонализацией по С. К. Годунову. Показано, что одной из разновидностей задач для оболочек, которые часто встречаются при расчете различных технических объектов, являются задачи с подвижными границами – контактные задачи. В статье рассмотрен один из эффективных способов решения контактных задач для оболочек вращения – метод виртуальных элементов. В отличие от метода конечных элементов увеличение количества виртуальных элементов не увеличивает размер матрицы жесткости конструкции. Это большое преимущество метода виртуальных элементов, которое позволяет сохранять вычислительные ресурсы для многих задач. Приведены результаты и научные статьи по исследованию тонкостенных конструкций, полученные с учетом использования методов механики оболочек в последнее время.

Ключевые слова: тонкостенные элементы, теории оболочек, оценка прочности и долговечности, контактные задачи, уменьшения размерности задачи, численные методы, метод виртуальных элементов.

1. Введение

В настоящее время многие конструкционные элементы в инженерных конструкциях самого различного назначения, например авиационного, судостроительного, строительного, выполнены в виде тонкостенных оболочек и пластин. Экономическая эффективность таких конструкций доказана на практике. Обладая завидной легкостью, тонкостенные пространственные конструкции представляют исключительно прочную конструктивную форму. При проектировании таких тонкостенных элементов конструкций достаточно часто приходится решать задачи по оценке прочности, устойчивости, колебаниям, долговечности данных элементов конструкций. При решении прикладных задач для конструкций из тонкостенных элементов очень часто используют различные методы и подходы, которые развиваются в теории оболочек.

Известно, что для расчета конструкционных элементов в машиностроении, один размер которых значительно меньше двух других, используются различные теории оболочек. Суть которых, заключается в том, что трёхмерные тела с помощью некоторых гипотез сводят к их двумерному представлению. С математической точки зрения это сильно упрощает решение различных прикладных задач, а вносимая погрешность для многих задач незначительна.

Поскольку в докладе будут рассматриваться тонкостенные элементы конструкций, то необходимо привести некоторые базовые понятия и принципы теории оболочек, а также некоторые сведения ретроспективы ее развития.

Первые задачи о равновесии и устойчивости пластин и оболочек ставились еще до установления общих уравнений теории упругости. В работе Огастеса Эдварда Лява [1] указывается, что эти задачи были в числе тех проблем, которые привели к созданию теории упругости.

Современная научная литература располагает огромным количеством работ, посвященных как вопросам общей теории оболочек, так и различным задачам расчета конкретных оболочечных конструкций. Основным теоретическим результатам, полученным в теории оболочек, посвящены известные монографии В. З. Власова [2], А. Л. Гольденвейзера [3], А. И. Лурье [4], А. Лява [1], В. В. Новожилова [5], С. П. Тимошенко [6] В. Флюгге [7], К. Ф. Черных [8, 9].

Хотя основные уравнения и соотношения теории оболочек были получены достаточно давно, лишь для некоторых сравнительно простых классов оболочек получены аналитические решения при определенных видах нагрузки и граничных условий. Одной из характерных особенностей развития теории оболочек является взаимосвязь между процессом построения математической модели какого-либо класса задач и разработкой метода решения задач, описываемых этой моделью.

Вопросу изучения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек при различных силовых воздействиях посвящено огромное количество публикаций. В любой из вышеперечисленных монографий по теории оболочек содержится исчерпывающее количество ссылок, которое позволяет сориентироваться по данному вопросу. Например в работе Я. М. Григоренко [10] их приведено более пятисот. Однако не всегда удается правильно оценить уникальность и научную новизну той или иной публикации ввиду большой ретроспективы данной проблематики.

С появлением вычислительной техники для решения задач определения напряженно-деформированного состояния, колебаний, устойчивости и др. различных оболочечных конструкций стали широко использоваться методы численного анализа.

Расчет сложных конструкций различного назначения при учете реальных условий эксплуатации возможен только при использовании численных методов и современной вычислительной техники.

В основном задачи теории оболочек и пластин, моделирующие тонкостенные элементы конструкций, сводятся к решению уравнений в частных производных. Эти уравнения имеют аналитические решения только для очень ограниченного круга задач для границ простой формы и простых нагрузок. Если нет возможности получить аналитическое решение задачи, то необходимо использовать численные методы.

Среди используемых в настоящее время численных методов решения инженерных задач ни один метод сам по себе не позволяет в общем случае обеспечить создание идеальных алгоритмов расчета сложной конструкции. Поэтому развитие и разработка численных методов, а также учет рационального объединения в одном алгоритме различных методов численного анализа является достаточно актуальной научной задачей. Среди наиболее часто используемых в настоящее время численных методов решения прикладных задач для тонкостенных конструкций можно выделить – метод конечных разностей [11, 12], метод коллока-

ций [11, 13, 14], метод граничных элементов [15, 16, 17, 18], методы численного интегрирования дифференциальных уравнений [10, 12, 19, 20].

При использовании методов численного интегрирования дифференциальных уравнений краевая задача должна быть сведена к одномерной. Краевая задача сводится к решению ряда задач Коши, что позволяет использовать хорошо разработанные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Одним из таких методов является метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова [21], который широко применяется в настоящее время для различных задач расчета тонкостенных конструкций [22, 23, 24].

Одним из самых универсальных и широко применяемых методов расчета для тонкостенных конструкций является метод конечных элементов [25, 26, 27, 28]. Этот метод относится к вариационно-разностным методам и имеет в своей основе представление исходной области со сложной формой границ совокупностью простых подобластей – конечных элементов. Такое представление исследуемой области имеет смысл дискретизации континуальной задачи, т.е. замены реальной области тела с бесконечно большим числом степеней свободы приближенно-эквивалентным телом с конечным числом степеней свободы.

В настоящее время при определении напряженного состояния, устойчивости, динамики различных тонкостенных элементов широко используются вычислительные комплексы, такие как NASTRAN, COSMOS, ANSYS, LS DYNE и др., основанные на методе конечных элементов. Задача может быть решена в одномерной, двумерной или трехмерной постановке в зависимости от типа и цели задачи и располагаемой вычислительной мощности. В данных вычислительных комплексах имеются библиотеки с оболочечными конечными элементами, которые основаны на различных теориях оболочек. Если предлагается новая модель оболочки, то появляется новый конечный элемент. Этот процесс непрерывный, поскольку – как шутят «оболочечники» – оболочка неисчерпаема как атом, т. е. различные теории оболочек – это какое-то новое приближение к реальному описанию континуума. По этому поводу известный советский академик В. В. Новожилов [29], писал, что при конечном числе дифференциальных уравнений теории оболочек точно описать трехмерное тело нельзя.

2. Численно аналитический метод решения задач для оболочек

Однако существует класс задач, где заложенная в вычислительных комплексах, основанных на методе конечных элементов, универсальность, теряет свою эффективность. Это происходит при решении задач для оболочек с подвижными границами, т. е. контактных задач для конструкций, взаимодействующих с жесткими или упругими телами. При решении задач методом конечных элементов для тонкостенных конструкций, взаимодействующих с другими телами, необходимо выбрать такую сетку конечных элементов, чтобы «схватить» все возможные сингулярности напряженного состояния, но при этом использовать минимально возможную размерность задачи. На рис. 1 представлена оболочка с выделенным конечным элементом.

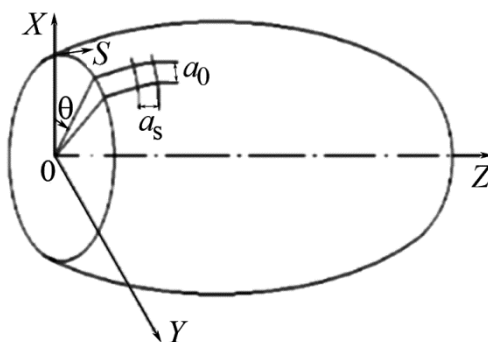


Рис. 1. Конечный элемент на оболочке вращения

Чтобы корректно учитывать различные сингулярности, необходимо уменьшать размер конечных элементов. Уменьшение размеров элементов приводит к увеличению размеров матрицы жесткости и необходимым вычислительным мощностям, чтобы решить разрешающую систему линейных алгебраических уравнений. При решении реальных прикладных задач даже при достаточно грубой сетке количество элементов может превышать сотни тысяч. Например, при определении неосесимметричного напряженного состояния оболочки вагона-цистерны, изображенной на рис. 2, потребовалось около 100 тыс. оболочечных конечных элементов типа shell [30, 31].



Рис. 2. Вагон цистерна

При решении такой задачи в одномерной постановке (осесимметричное напряженное состояние) необходимо около 1 тыс. элементов. При решении данной задачи в трехмерной постановке (в рамках теории упругости) необходимо не менее 2 млн объемных конечных элементов типа solid для случая, если толщина оболочки будет аппроксимирована одним конечным элементом (при необходимом соблюдении соотношений между размерами конечного элемента). Если для увеличения точности расчета толщина оболочки будет аппроксимирована тремя элементами, то число элементов возрастет до 10 млн конечных элементов. Если толщина оболочки будет аппроксимирована шестью элементами необходимо не менее 80 млн элементов. Если для первого расчетного случая для получения решения необходимо около суток, то для третьего случая речь пойдет уже о месяцах, к тому же объем вычислений будет достаточно велик и далеко не всякий компьютер сможет такое решение обработать. Поэтому вопрос уменьшения размерности задачи при решении прикладных задач для тонкостенных конструкций является весьма актуальным. Один из способов уменьшения размерности задачи – это использование численно-аналитического метода сведения уравнений теории оболочек к ряду задач Коши с ортогонализацией по Годунову.

В механике твердого деформируемого тела оболочкой принято называть тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими его размерами. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих образующих оболочки поверхностей, называется срединной поверхностью оболочки. В общем случае будем рассматривать анизотропные оболочки, собранные из неоднородных слоев переменной толщины. На оболочки могут действовать неравномерные поверхностные и объемные нагрузки. Оболочки могут находиться в некотором температурном поле. Принимается, что для каждого слоя оболочки справедливы уравнения линейной теории упругости неоднородного анизотропного тела.

Для многих моделей оболочек в общем случае строится разрешающая система уравнений в частных производных. В ней в качестве искоемых функций принимаются величины, входящие в произвольные граничные условия на одном из контуров координатной поверхно-

сти оболочки. Если отнести выбранную поверхность оболочки к ортогональной системе координат α, β , как на рис. 3, где линии $\alpha = const, \beta = const$ представляют собой линии главных кривизн, то такая система имеет вид [10, 32]:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \alpha} = A_0(\alpha, \beta) \bar{N} + A_1(\alpha, \beta) \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} + A_2(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \beta^2} + A_3(\alpha, \beta) \frac{\partial^3 \bar{N}}{\partial \beta^3} + A_4(\alpha, \beta) \frac{\partial^4 \bar{N}}{\partial \beta^4} + \bar{f}(\alpha, \beta)$$

где A_0, A_1, \dots, A_4 – матрицы, элементы которых определяются через геометрические и жесткостные параметры оболочки; \bar{f} – вектор, компоненты которого зависят от приложенных к оболочке поверхностных нагрузок и интегральных характеристик температурного поля.

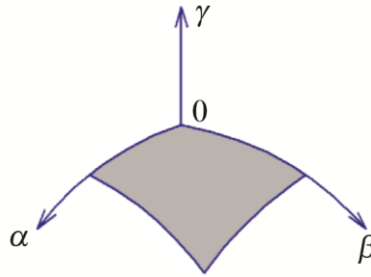


Рис. 3. Поверхность оболочки в ортогональной системе координат α, β

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, можно использовать следующий искомый вектор восьмого порядка:

$$\bar{N} = \{ N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \vartheta_\alpha \},$$

где $N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha$ – усилия, приложенные к контуру $\alpha = const$; M_α – изгибающий момент; $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ – перемещения координатной поверхности; ϑ_α – угол поворота нормали.

Для уточненной модели, основанной на гипотезе прямой для всего пакета оболочки в целом, в уравнении $A_3(\alpha, \beta) = A_4(\alpha, \beta) = 0$, а искомый вектор можно принять десятого порядка:

$$\{ N_\alpha, N_{\alpha\beta}, Q_\alpha, M_\alpha, M_{\alpha\beta}, u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \psi_\alpha, \psi_\beta \},$$

где $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ – сдвигающее усилие, и крутящий момент, действующие на контуре $\alpha = const$; ψ_α и ψ_β – углы поворота прямолинейного элемента.

Для уточненной модели, основанной на гипотезе прямолинейного элемента, с учетом изменения его длины искомый вектор имеет вид двенадцатого порядка:

$$\bar{N} = \{ N_\alpha, N_{\alpha\beta}, Q_\alpha, M_\alpha, M_{\alpha\beta}, P_\alpha, u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma \},$$

где P_α – статическая величина, которая интерпретируется как момент первого порядка от касательных напряжений поперечного сдвига по толщине пакета оболочки; ψ_γ – величина, характеризующая поперечное обжатие оболочки.

Аналогично можно представить разрешающие системы уравнений и для других вариантов уточненных моделей.

При исследовании оболочек вращения (рис. 1), в рамках классической модели, численно аналитическим методом, систему дифференциальных уравнений в частных производных можно привести к виду, который позволяет разделить переменные s и θ [10, 19, 23]:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s, \theta) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta); \quad \bar{Y} = \{N_x, N_z, \widehat{S}, M_s, u_x, u_z, v, \theta_s\}^T,$$

где N_x, N_z – радиальное и осевое усилия; u_x, u_z – аналогичные перемещения; \widehat{S} – сдвигающее усилие; M_s – меридиональный изгибающий момент; v – окружное перемещение; θ_s – угол поворота нормали; s – длина дуги меридиана; θ – центральный угол в сечении радиуса $r(s)$, перпендикулярном оси вращения. Элементы матрицы A_m зависят от геометрических и механических характеристик оболочки.

Не для всех моделей оболочек это разделение возможно, но для классической теории переменные разделяются. Таким образом, представляя переменные и нагрузки с использованием рядов Фурье [10, 19], приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = A(s)\bar{Y} + \bar{f}(s); \quad (s_0 \leq s \leq s_L),$$

с граничными условиями

$$B_1 \bar{Y}(s_0) = \bar{b}_1; \quad B_2 \bar{Y}(s_L) = \bar{b}_2.$$

Здесь $\bar{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ – вектор функция искомого решения; $A(s), B_1, B_2$ – заданные матрицы порядка соответственно $n \times n, k \times n, k \times n$ ($k = n/2$); $\bar{f}(s), \bar{b}_1, \bar{b}_2$ – заданные векторы.

Данную систему можно проинтегрировать с использованием ортогонализации по С. К. Годунову [21].

3. Контактные задачи теории оболочек

Одной из разновидностей задач для оболочек, которые часто встречаются при расчете различных технических объектов, являются задачи с подвижными границами – контактные задачи. Прикладное значение контактных задач трудно переоценить, поскольку любая конструкция обычно представляют собой, совокупность элементов, каким-либо образом закрепленных в пространстве и контактирующих при эксплуатации. В предисловии монографии Кеннета Джонсона [33] отмечено, что экономические потери от разрушения контактирующих элементов в США составляют более 50 млрд долларов в год. Достаточно часто области контакта и распределение контактного давления между элементами наперед не известны. При этом экспериментальными методами распределение контактной нагрузки точно определить достаточно трудно. Поэтому приходится ставить и решать самые разнообразные контактные задачи, которые будут определять напряжённое состояние контактирующих элементов.

Впервые задача о контакте упругих тел, первоначально соприкасавшихся в точке, была поставлена и решена Генрихом Герцем. Можно сказать, что с появлением его классической работы в контакте упругих тел [34] начала формироваться область механики деформируемого твердого тела – механика контактного взаимодействия.

Среди разнообразных методов, применяемых при решении задач контактного взаимодействия оболочек, можно выделить основные: это – метод сопряжения решений дифференциальных уравнений, метод интегральных уравнений, методы редуцированных систем и вариационных неравенств и асимптотические методы [35, 36, 37, 38, 39, 40].

При решении аналитическими методами чаще всего используется метод приведения задачи к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода. Если интегральное уравнение получено в рамках гипотез Кирхгофа-Лява, то оно имеет лишь обобщенное решение – контактная реакция представляет собой сосредоточенные на границе области контакта силы.

При использовании теорий оболочек, учитывающих поперечный сдвиг, решение можно получить только в классе функций, имеющих разрывы первого рода. При заданной области контакта терпит разрыв поперечная сила. При неизвестной области (на границе этой области), контактное давление конечно. Однако известно, что при решении задач с использованием уравнений теорий упругости на границе зоны сосредоточенные реакции не возникают.

Контактную задачу теории оболочек можно сделать математически корректной методами регуляризации, сущность которых заключается в переходе от уравнений Фредгольма первого рода к уравнениям Фредгольма второго рода. В контактных задачах получили распространение методы физической регуляризации, которые основаны на уточнении физической постановки задачи. Один из них заключается в том, что в зоне контакта вводится упругий слой, учитывающий реальные свойства микрогеометрии контактирующих поверхностей. В этом подходе параметр регуляризации определяется экспериментально и характеризует свойства поверхностей.

Другой метод физической регуляризации основан на учете в зоне контакта обжатия оболочки по толщине, которым классическая теория пренебрегает. Здесь коэффициент регуляризации имеет другой физический смысл. Учет изменения расстояния между средней и внешней поверхностями оболочки под действием контактного давления дает необходимый вклад в интегральное уравнение и приводит его к уравнению Фредгольма второго рода.

Одним из эффективных способов решения контактных задач для оболочек вращения является метод виртуальных элементов [41, 42]. На рис. 4 представлена расчетная схема для оболочки, лежащей на опоре ложементного типа.

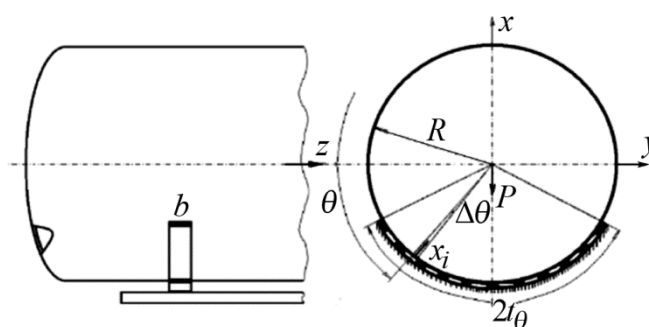


Рис. 4. Расчетная схема для задачи передачи нагрузки от котла вагона-цистерны на лежневые опоры

Данная схема моделирует работу конструкции вагона-цистерны, изображенной на рис. 2. Задача заключается в нахождении контактной нагрузки, области контакта и определения напряженного состояния оболочки цистерны от внешних нагрузок и найденной контактной нагрузки, действующих на конструкцию.

Суть метода в том, что неизвестная область контакта покрывается виртуальными элементами (рис. 5).

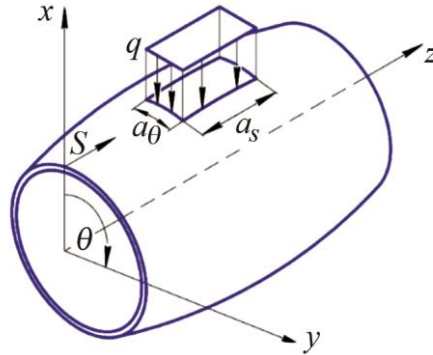


Рис. 5. Оболочка нагружена локальной нагрузкой, распределенной на виртуальном элементе

На элементах принимается постоянное контактное давление. В отличие от конечного элемента количество виртуальных элементов не увеличивает размер матрицы жесткости. Также размеры элемента по направляющей и образующей являются независимыми, в отличие от размеров, принимаемых в методе конечных элементов. Это большое преимущество, которое позволяет сохранять вычислительные ресурсы для многих задач.

Затем строятся канонические уравнения сопряжения оболочки с основанием (опорой). Для одномерного случая (длина контакта по образующей задана) такая система имеет вид [19, 23]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i - Z \cos \theta_1 + \Delta_{P1} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \delta_{2i} X_i - Z \cos \theta_2 + \Delta_{P2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i - Z \cos \theta_N + \Delta_{PN} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i &= P, \quad N = \frac{\pi R_1}{a_\theta}. \end{aligned}$$

Здесь δ_{ij} – перемещение в основной системе координат по направлению i связи от единичного усилия, введенного по направлению отброшенной j связи; $Z \cos \theta_i$ – перемещение в основной системе по направлению отброшенной i связи, происходящее от единичного перемещения по направлению введенной связи; Δ_{Pi} – перемещение по направлению i связи, вызванное действием заданной внешней нагрузки на оболочку; P – внешняя нагрузка, действующая определенным образом на оболочку; X_i – неизвестные усилия взаимодействия.

В общем случае из-за разности радиусов между оболочкой и основанием может существовать первоначальный зазор Δ_R . Также в некоторых случаях между оболочкой и основанием может присутствовать упругий слой. Следовательно, учитывая эти факторы, уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_{1i} X_i + DX_1 - Z \cos \theta_1 + \Delta_{P1} + \Delta_{R1} &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \delta_{Ni} X_i + DX_N - Z \cos \theta_N + \Delta_{PN} + \Delta_{RN} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i X_i - P = 0.$$

Здесь Δ_{Ri} – величина зазора по направлению i связи; D – оператор, связывающий реактивное усилие i точки поверхности основания (прокладки) и ее перемещение. Оператор D является аналогом параметра регуляризации, применяемым в аналитических методах решения контактных задач теории оболочек. При этом предположим, что оператор D состоит из двух слагаемых:

$$D = D_1 + D_2,$$

где оператор D_1 определяет изменение толщины оболочки за счет обжатия, а оператор D_2 характеризует упругие свойства прокладок.

Решая данную систему уравнений и применяя итерационные процедуры, находим распределение контактного давления и область контакта. С использованием дискретных рядов Фурье найденная нагрузка аппроксимируется как

$$q_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Коэффициенты разложения представим следующим образом:

$$a_k = \frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} q_{\Sigma i} + \sum_{i=1}^{N-1} q_{\Sigma i} \cos \frac{\pi k}{N} i + \frac{1}{2} (-1)^k q_{\Sigma N} \right],$$

$$b_k = 0.$$

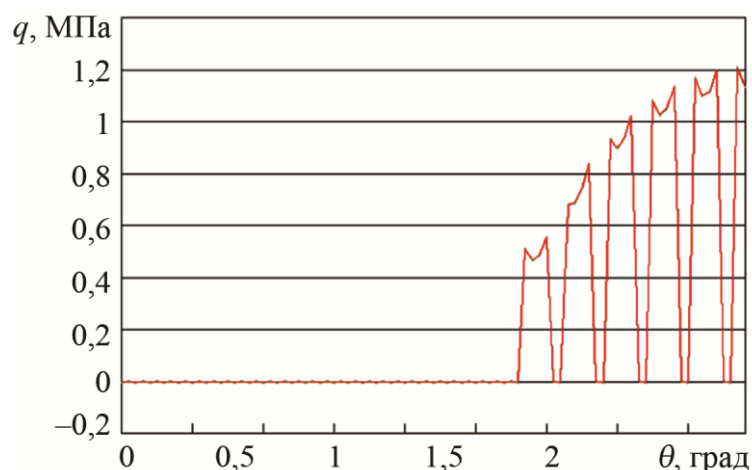


Рис. 6. Аппроксимация контактного давления на половине области контакта для случая взаимодействия оболочки с несплошным упругим основанием

На рис. 6 показана ее аппроксимация на половине области контакта. При этом определяется и контролируется невязка аппроксимации. Такое представление контактной нагрузки необходимо для определения напряженного состояния оболочки от найденной контактной нагрузки.

4. Результаты по исследованию тонкостенных конструкций

1. В уравнениях, описывающих контакт оболочки с основанием, использовалось понятие виртуальный элемент, на котором приложена некоторая постоянная сила. Оболочка под действием этой локальной силы деформируется. Была проведена оценка деформации с использованием предлагаемой методики и известных коммерческих вычислительных комплексов ANSYS, COSMOS. Получено хорошее совпадение результатов расчета (по напряжениям и перемещениям) по предлагаемой численно-аналитической методике и методом конечных элементов.

2. Проведено обобщение метода для задачи при возникающей боковой нагрузке (рис. 7).

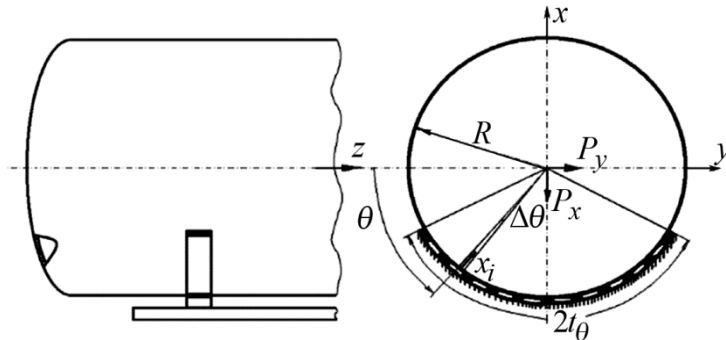


Рис. 7. Контактная задача для оболочки при нагрузке, действующей в вертикальной и горизонтальной плоскости

Определено контактное давление для тонкой изотропной оболочки, лежащей на не сплошном упругом или жестком основании. При этом оболочка нагружена системой массовых сил, включая поперечную нагрузку, которые вызывают несимметричное контактное давление. Данная задача моделирует передачу нагрузки от котла вагона-цистерны на лежневые опоры при прохождении вагоном поворота, т. е. с учетом центробежной силы. Вычисленная, несимметричная относительно вертикальной оси контактная нагрузка, представлена на рис. 8.

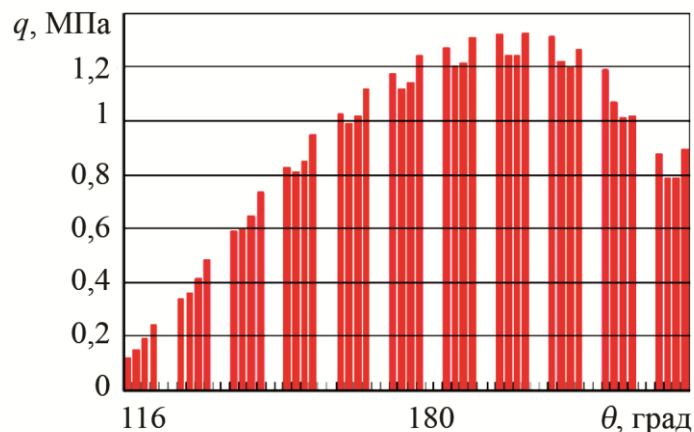


Рис. 8. Распределение контактного давления для случая взаимодействия оболочки с упругим основанием с учетом поперечной нагрузки

3. Поскольку получаемая контактная нагрузка не симметричная, то предложено ее новое разложение в дискретный ряд Фурье по синусам и косинусам. На рис. 9 показана ее аппроксимация на половине области контакта. Невязка аппроксимации составляет менее 0,1 %.

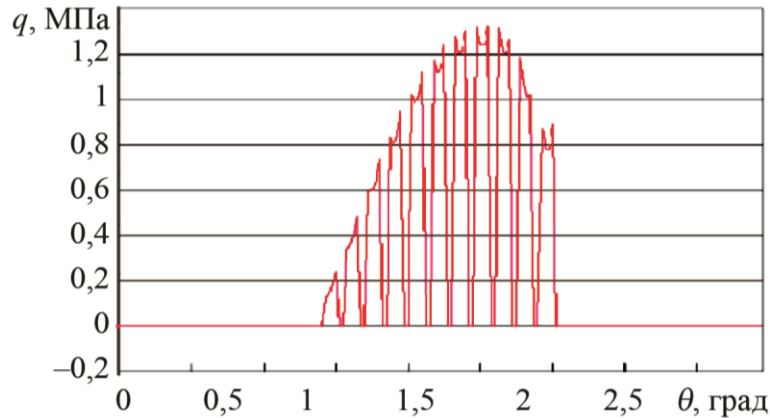


Рис. 9. Аппроксимация контактного давления для случая взаимодействия оболочки с упругим основанием при вертикальной и поперечной нагрузке

4. Проведено обобщение метода для задачи взаимодействия оболочки по неизвестной области контакта в двух координатных направлениях по направляющей и образующей. При этом область основания может быть несплошной, как на рис. 4. На рис. 10–11 показано распределение контактного давления по двумерной сплошной области, на рис. 12–13 распределение контактного давления по двумерной области в области имеющей разрывы.

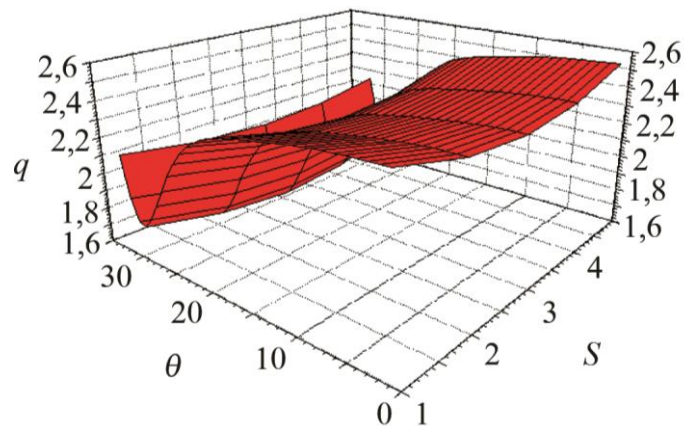


Рис. 10. Распределение контактных напряжений на половине области контакта в случае взаимодействия со сплошным упругим основанием

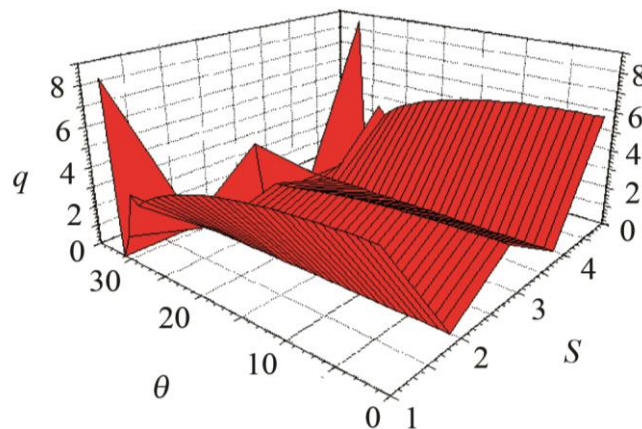


Рис. 11. Распределение контактных напряжений на половине области контакта в случае взаимодействия со сплошным жестким основанием

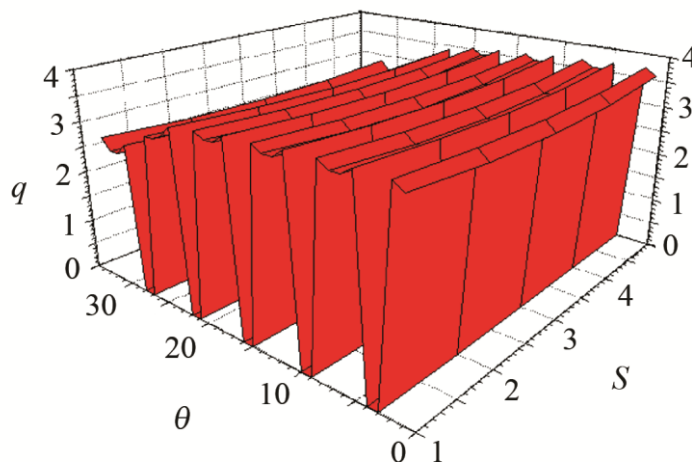


Рис. 12. Распределение контактных напряжений на половине области контакта в случае взаимодействия с несплошным упругим основанием

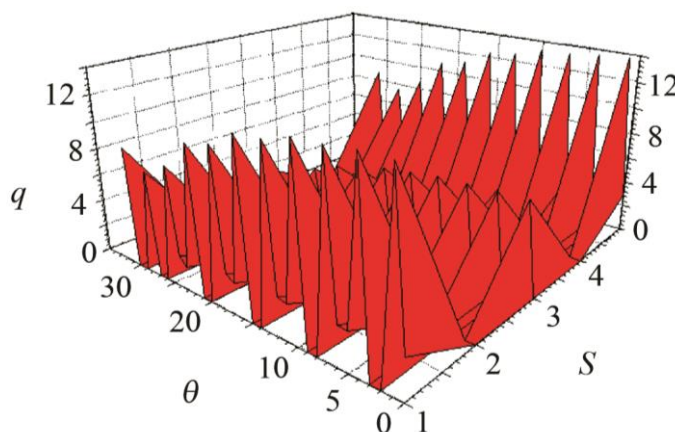


Рис. 13. Распределение контактных напряжений на половине области контакта в случае взаимодействия с несплошным жестким основанием

5. Метод виртуальных элементов, обобщен для решения контактных задач для цилиндрических оболочек, лежащих на основании с поверхностью несогласованной формы. Контакт оболочки может происходить как по согласованной, так и по несогласованной поверхности контакта. Контакт называется согласованным, если поверхности обоих тел в недеформированном состоянии точно «подогнаны» друг к другу. Тела, имеющие различные по форме профили, называются несогласованными. Тела несогласованной формы первоначально вступают в контакт в точке или по линии. Под действием внешней нагрузки они деформируются в окрестности точки начального контакта и приходят в соприкосновение по некоторой конечной области.

6. Показано, что существует аналогия между линейными интегральными уравнениями, описывающими одномерную контактную задачу для оболочки и разрешающими линейными алгебраическими уравнениями метода виртуальных элементов. Доказано, что уравнение Фредгольма второго рода, определяющее распределение контактного давления в одномерной постановке, совпадает с точностью до констант с уравнениями по предлагаемой методике. Численно построенная функция податливости δ_{ij} является аналогом функции Грина G . Необходимо добавить, что только для ограниченного класса оболочек (прямоугольных пластин, круглых пластин, сферических оболочек, цилиндрических оболочек бесконечной длины) существуют аналитические выражения для функции Грина. Для оболочки вращения

конечной длины с переменными параметрами вдоль образующей, построить аналитическую функцию Грина невозможно. Но достаточно просто ее вычислить численно, используя выше изложенный численно-аналитический метод.

7. Определено напряженно-деформированное состояние оболочечной конструкции вагона-цистерны (рис. 2), лежащей на опорах ложементного типа, при воздействии нормативных нагрузок разного вида. При расчете использован метод конечных элементов и использован оболочечный конечный элемент типа shell. Расчетная схема конструкции представлена на рис. 14.

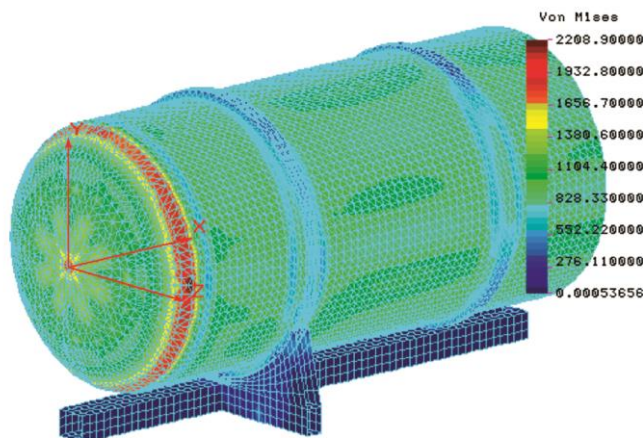


Рис. 14. Напряженное состояние вагона-цистерны при расчете на крупной конечно-элементной сетке

Ресурс нерегулярно нагруженной конструкции вагона-цистерны, работающей в области многоциклового усталости, оценен по линейной гипотезе накопления усталостных повреждений. Предложен альтернативный подход к определению долговечности конструкции, основанный на дополнительных нестандартных экспериментах с образцами материала конструкции и законом нелинейного суммирования повреждений. Результат по определению долговечности конструкции вагона-цистерны представлен на рис. 15.

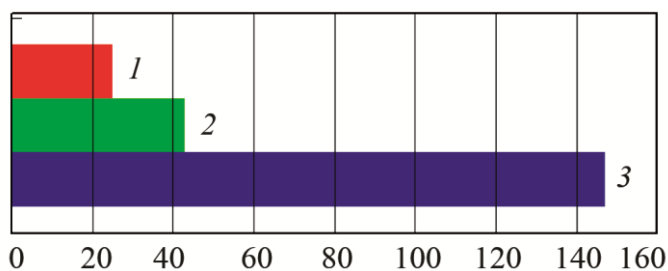


Рис. 15. Оценка долговечности вагона, годы: 1 – гарантийный срок службы; 2 – срок, рассчитанный по методике нелинейного суммирования напряжений; 3 – срок, рассчитанный по стандартной методике

8. Разработана математическая модель, позволяющая оценить сопротивление разрушению кабины локомотива с учетом буферного устройства (рис. 16).



Рис. 16. Кабина локомотива

На примере расчета кабины локомотива при наезде на препятствие предложен подход к определению параметров области безопасной эксплуатации конструкции. Для несущей конструкции балочно-стержневого типа предложен вариант нахождения области безопасной эксплуатации при действии сверхнормативной нагрузки. Рассмотрено нагружение силового тонкостенного каркаса кабины локомотива при наезде на препятствие (рис. 17).

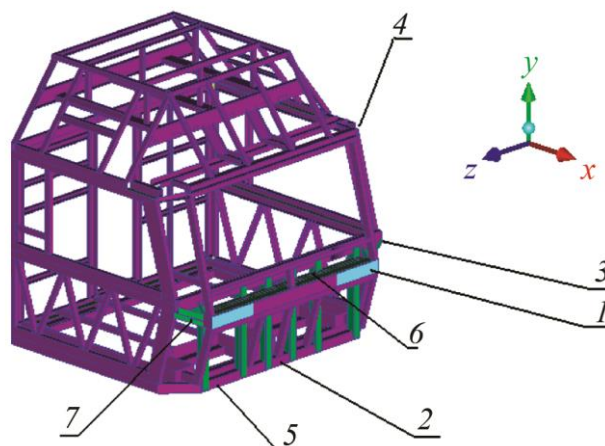


Рис. 17. Расчетная схема силового каркаса кабины локомотива: 1 – лобовая балка; 2 – крепящие элементы; 3 – силовой пояс; 4 – верхняя обвязка кабины; 5 – нижняя обвязка кабины; 6 – набор сотовых элементов; 7 – боковые упоры

При расчете использован метод конечных элементов и использован оболочечный конечный элемент типа shell. Предложенная детерминированная инженерная оценка напряженного состояния сложной конструкции позволяет определить в трехмерном пространстве неизвестных параметров препятствия предельную поверхность, которая должна ограничивать область безопасной эксплуатации локомотива (рис. 18). На примере расчета кабины локомотива показано, каким образом необходимо обосновать требование сохранения ее прочности и тем самым сохранить безопасность работы машинистов и дорогостоящего оборудования кабины.

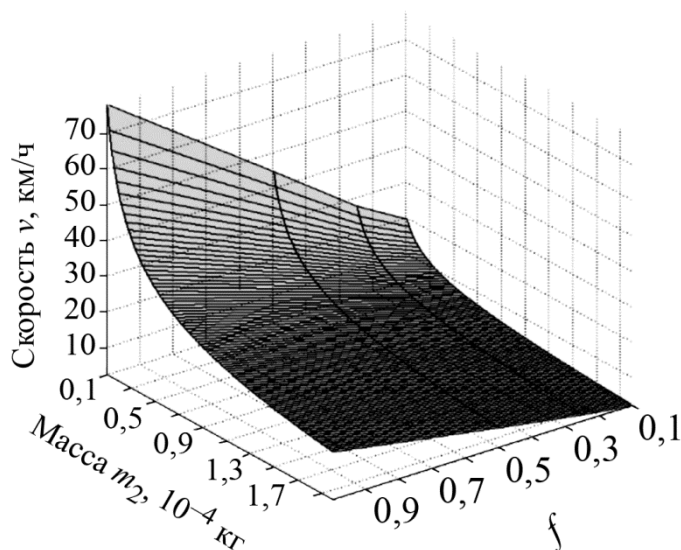


Рис. 18. Область безопасной эксплуатации кабины локомотива

5. Заключение

Полученные в последнее время вышперечисленные результаты фундаментальных и прикладных исследований для тонкостенных конструкций с использованием методов и подходов механики оболочек опубликованы в следующих работах [24, 41–63].

Литература

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.; Л. : ОНТИ, 1935. – 674 с.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.; Л. : Гостехиздат, 1949. – 784 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. – 2-е изд. испр. и доп. – М. : Наука, 1976. – 512 с.
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – М.; Л. : Гостехиздат, 1947. – 252 с.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Л. : Судостроение, 1962. – 431 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / пер. с англ. – М. : Физматгиз, 1963. – 635 с.
7. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / пер. со второго нем. изд. инж. В. Л. Шадурского. – М. : Госстройиздат, 1961. – 306 с.
8. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1962. – Ч. 1. – 274 с.
9. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1964. – Ч. 2. – 396 с.
10. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек : в 5 т. – Киев : Наукова думка, 1981. – Т. 4 : Теория оболочек переменной жесткости. – 544 с.
11. Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т. Статика и динамика сложных структур. – М. : Машиностроение, 1989. – 248 с.
12. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев : Наукова думка, 1973. – 228 с.
13. Рогалевич В. В. Коллокационные методы. Сущность. Примеры. – Екатеринбург : Издательство АМБ, 2001. – 298 с.
14. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела / пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
15. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике / пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 248 с.

16. Артюхин Ю. П., Грибов А. П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. – Казань : Фэн, 2002. – 199 с.
17. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках / пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
18. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М. : Физматгиз, 1948. – 708 с.
19. Механика композитов : в 12 т. / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов, Н. Н. Крюков, Ю. Н. Немиш, Н. Д. Панкратова, Б. Л. Пелех, Г. Г. Влайков, А. В. Максимук, Г. П. Урусова / ред. А. Н. Гузь. – К. : Наук. думка, 1999. – Т. 8 : Статика элементов конструкций / НАН Украины. Ин-т механики. – Киев : А.С.К., 1999. – 379 с.
20. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. – М. : Машиностроение, 1975. – 76 с.
21. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16. – № 3. – С. 171–174.
22. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев : Академперіодика, 2006. – 472 с.
23. Емельянов И. Г. Контактные задачи теории оболочек. – Екатеринбург : УрО РАН, 2009. – 185 с.
24. Емельянов И. Г., Миронов В. И. Долговечность оболочечных конструкций. – Екатеринбург : УрО РАН, 2012. – 224 с.
25. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
26. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
27. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига : Зинатне, 1988. – 284 с.
28. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
29. Новожилов И. И. Вопросы механики сплошной среды. – Л. : Судостроение, 1989. – 400 с.
30. Емельянов И. Г., Ефимов В. П., Кузнецов А. В. Модель напряженно-деформированного состояния котла вагона-цистерны с усовершенствованной схемой опирания на раму // Тяжелое машиностроение. – 2005. – № 8. – С. 44–49.
31. Емельянов И. Г., Миронов В. И., Кузнецов А. В. Определение напряженного состояния и ресурса оболочечной конструкции // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 5. – С. 57–65.
32. Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М. Расчет параметров напряженного состояния конструктивных элементов из композиционных материалов на основе оболочечных моделей // Расчеты на прочность : сборник научных статей. – Вып. 30. – М. : Машиностроение, 1989. – С. 87–96.
33. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
34. Hertz Н. Über die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – num. 92. – P. 156–171.
35. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М. : Машиностроение, 1980. – 411 с.
36. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – Киев : Наукова думка, 1990. – 136 с.

37. Артюхин Ю. П., Малкин С. А. Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений в задачах упругого воздействия тел. – Казань : Казанский гос. ун-т, 2007. – 292 с.
38. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. – Киев : Наукова думка, 1988. – 288 с.
39. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). – М., 1988. – 192 с. – Деп. в ВИНТИ 12.02.88.
40. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев : Наукова думка, 1988. – 280 с.
41. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В. Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, no. 3. – С. 245–252.
42. Emel'yanov I. G. Investigation into the Contact Interaction between Shell and Base with Notches // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol. 44, no. 3. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S1052618815030048.
43. Emel'yanov I. G., Mironov V. I., Kuznetsov A. V. Evaluation of the life of a shell construction lying on supports // Journal of Machinery Manufacture and Reliability . – 2010. – Vol. 39, iss. 1, pp. 83–88. – DOI: 10.3103/S1052618810010139.
44. Миронов В. И., Емельянов И. Г. Метод полных диаграмм в расчетах на сопротивление усталости // Международная научно-техническая конференция «Прочность материалов и элементов конструкций», Киев, 28–30 сентября 2010 г. : труды конференции / отв. ред. В. Т. Трощенко. – Киев : ИПП НАНУ, 2011. – С. 697–704.
45. Емельянов И. Г., Миронов В. И., Кузнецов А. В. Циклическая долговечность оболочек вагона - цистерны // Международная научно-техническая конференция «Прочность материалов и элементов конструкций», Киев, 28–30 сентября 2010 г. : труды конференции / отв. ред. В. Т. Трощенко. – Киев : ИПП НАНУ, 2011. – С. 836–843.
46. Контактное взаимодействие котла вагона-цистерны с лежневыми опорами / И. Г. Емельянов, В. И. Миронов, А. В. Кузнецов, А. В. Якушев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Том 13, № 1–2. – С. 436–439.
47. Емельянов И. Г. Миронов В. И., Якушев А. В. Контактная задача в расчетах усталостной прочности элементов вагона-цистерны // Транспорт Урала. – 2011. – № 3 (30). – С. 49–55.
48. Разработка экспресс-метода для контроля свойств вагонных сталеб / И. Г. Емельянов, В. И. Миронов, А. В. Якушев, О. А. Лукашук // Транспорт Урала. – 2012. – № 2 (33). – С. 13–17.
49. Barashkova E., Emelyanov I. Stress State of Shells under Arbitrary Load // Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Finite Differences - Finite Elements – Finite Volumes - Boundary Elements (F-and-B'12), Prague, Czech Republic, September 24–26, 2012. – Prague : WSEAS Press, 2012. – P. 33–37.
50. Emelyanov I. G., Mironov V. I. Contact problem for a shell considering the transverse load // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2013. – Vol. 42, no. 1. – P. 36–40. – DOI: 10.3103/S1052618813010056.
51. Barashkova E. A., Emelyanov I. G. Determination of the Stress State of Shells under Local Load // Mathematical methods and optimization techniques in engineering : proceedings of the First International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG '13), Antalya, Turkey, October 8–10, 2013. – 2013. – P. 109–113.
52. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В., Миронов В. И. Математическая модель, описывающая напряженное состояние кабины газотурбовоза при встрече с препятствием // Транспорт Урала. – 2013. – № 4 (39). – С. 71–74.

53. Emelyanov I. G., Kuznetsov A. V. The stressed state of shell structures under local loads // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, no. 1. – P. 42–47. – DOI: 10.3103/S1052618814010051.
54. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В., Миронов В. И. Определение долговечности элементов конструкций вагона-цистерны // *Надежность и долговечность машин и сооружений*. – 2014. – Вып. 38. – С. 45–54.
55. Mironov V. I., Kuznetsov A. V., Emel'yanov I. G. Consideration of cyclic degradation of the material and abnormality of the surface layer mechanical properties in calculating the life of a plate with an opening // *Strength of Materials*. – 2014. – Vol. 46, no. 5. – P. 638–643. – DOI: 10.1007/s11223-014-9594-y.
56. Yemel'yanov I. G. Application of discrete Fourier series to the stress analysis of shell structures // *Computational Continuum Mechanics*. – 2015. – Vol. 8, no. 3. – P. 245–253. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.20.
57. Emel'yanov I. G. Mironov V. I. Kuznetsov A. V. Estimation of the Fracture Strength of a Spatial Beam–Rod Structure Notches // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2015. – Vol. 44, no. 5. – P. 449–454. – DOI: 10.3103/S1052618815050076.
58. Emel'yanov I. G. Mironov V. I. Kuznetsov A. V. On An Approach to the Evaluation of the Strength of a Spatial Rod System under Impact Loading // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2015. – Iss. 2. – P. 16–23. – URL: http://dream-journal.org/issues/2015-2/2015-2_24.html (accessed 05.05.2015).
59. Emel'yanov I. G., Mironov V. I., Kuznetsov A. V. The definition of the resistance area boundaries for a locomotive operator cab under non-regulated loads // *AIP Conf. Proc.* – 2016. – Vol. 1785. – P. 040014. – DOI: 10.1063/1.4967071.
60. Emel'yanov I. G. Mironov V. I. Kuznetsov A. V. Determination of safe operating conditions for supporting structures under abnormal loads // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2017. – Vol. 46. – No. 5. – P. 136–142. – DOI: 10.3103/S1052618817020042.
61. Emel'yanov I. G., Mironov V. I., Kuznetsov A. V. Vehicle Survivability Calculation // *Russian Journal of Construction Science and Technology*. – 2017. – Vol. 3, no. 1. – P. 40–44. – DOI: 10.15826/rjct.2017.1.005.
62. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В. Определение напряженного состояния тонкостенных конструкций с использованием методов теории оболочек // *Транспортные системы и технологии*. – 2017. – № 3. – С. 64–78.
63. Emelyanov I. G., Mironov V. I., Kuznetsov A. V. Evaluating the effect of damping structures in the design of a locomotive cab during a collision. – *AIP Conference Proceedings*. – 2017. – Vol. 1915. – P. 040011. – DOI: 10.1063/1.5017359. – URL: <http://aip.scitation.org/toc/apc/1915/1?expanded=1915>.

Received: 11.08.2017

Revised: 19.03.2018



Accepted: 30.03.2018

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.029-041

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STRESS FIELD AT A CRACK TIP IN A LINEARLY ELASTIC MATERIAL: EXPERIMENTAL DETERMINATION OF WILLIAMS EXPANSION COEFFICIENTS

L. V. Stepanova

*S. P. Korolev Samara National Research University,
34 Moskovskoe Hw, Samara, 443086, Russian Federation*

 <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>  stepanova@v@samsu.ru

Corresponding author. E-mail: stepanova@v@samsu.ru

Address for correspondence: Moskovskoe shosse, 34, 443086, Samara, Russian Federation
Tel.: +7 927 752 21 02

The paper deals with analytical determination of the coefficients of the complete Williams asymptotic expansion for the stress field at the tips of two collinear cracks in an infinite elastic plate under mixed-mode (Mode I and Mode II) loading. A method for the determination of the coefficients is presented, which is based on the classical complex representation of the Kolosov-Muskhelishvili solution and its series expansion in the vicinity of the crack tip. An analytical representation of the coefficients of the complete Williams asymptotic expansion (T -stresses and higher-order approximation coefficients) as functions of applied loads, crack lengths and inter-crack distances is found for a plate with two collinear cracks. The paper presents experimental results on the photoelastic study of the stress field at the crack tips of two collinear cracks in a plate made of an optically active material (epoxy resin). It is demonstrated that higher-order approximations must be kept in the Williams asymptotic expansion for the accurate description of the stress field and the correct processing of the interference fringe pattern. The longer the distance from the crack tip to the point on the isochromatic fringe, the more terms of the asymptotic expansion need to be kept.

Key words: Williams asymptotic expansion, experimental determination of the coefficients of the Williams power series expansion, photo elasticity method, higher-order terms of the Williams asymptotic expansion.

References

1. Hello G., Tahar M.-B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, iss. 3–4, pp. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.
2. Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniya* [Mathematical methods of fracture mechanics]. Samara, Samarskii universitet Publ., 2006, 232 p. (In Russian).
3. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian).
4. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T -stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 134, 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013

5. Matvienko Yu.G. The effect of the non-singular t-stress components on crack tip plastic zone under mode I loading. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 141–146. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.026.
6. Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical*, 2014, vol. 55, iss. 5, pp. 181–194. DOI: 10.1134/S0021894414050186.
7. Kobayashi A.S. *Handbook on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, Seattle, 1987.

Подана в журнал: 11.08.2017



УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.029-041

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ЛИНЕЙНО УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ М. УИЛЬЯМСА

Л. В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева,
443086, Московское шоссе, 34, Самара, Российская Федерация

 <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>  stepanovalv@samsu.ru

Ответственный автор. Электронная почта: stepanovalv@samsu.ru

Адрес для переписки: Московское шоссе, 34, 443086, г. Самара, Российская Федерация

Тел.: +7-927-752-21-02

Работа посвящена аналитическому определению коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения. Представлен метод вычисления коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса, базирующийся на классическом комплексном представлении решения Колосова–Мусхелишвили и его разложения в ряд в окрестности вершины трещины. Найдены аналитические зависимости коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса (T -напряжений и коэффициентов высших приближений) от приложенной нагрузки, длин трещин и расстояний между ними для пластины с двумя коллинеарными трещинами. В работе представлены результаты экспериментального исследования поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин в пластине из оптически активного материала (эпоксидной смолы) методом фотоупругости. Показано, что для аккуратного описания поля напряжений и правильной обработки интерференционной картины полос в асимптотическом разложении М. Уильямса следует удерживать высшие приближения. Чем дальше точка изохроматической полосы находится от вершины трещины, тем больше слагаемых в асимптотическом разложении необходимо удерживать.

Ключевые слова: асимптотическое разложение М. Уильямса, экспериментальное определение коэффициентов разложения М, Уильямса, метод фотоупругости, высшие приближения разложения М. Уильямса

1. Введение

Полное асимптотическое представление поля напряжений в окрестности вершины трещины, содержащее высшее приближение, – асимптотическое решение М. Уильямса, является общим описанием поля напряжений вблизи вершины трещины в линейно упругом изотропном материале [1, 2]. Асимптотическое разложение М. Уильямса для каждой конфигурации образца содержит последовательность коэффициентов, зависящих от геометрических параметров образца и системы приложенных нагрузок. Широко известны аналитические представления для первых двух слагаемых в асимптотических разложениях поля напряжений: для коэффициентов интенсивности напряжений и T -напряжений для целого ряда конфигураций образцов с трещинами [1]. Более сложную задачу представляет собой определение коэффициентов высших приближений как функций приложенной нагрузки и геометрии рассматриваемого образца с трещиной. В настоящей статье приводятся аналитические выражения для коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса

поля напряжений в окрестности вершин двух коллинеарных трещин в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного деформирования, когда на бесконечности приложены растягивающая и сдвиговая нагрузки. Идентификация коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса основана на точном аналитическом решении задачи, полученным с помощью классического комплексного представления решения плоской задачи теории упругости [3]. Используя метод разложения по собственным функциям, М. Уильямс представил функцию напряжений Эри в окрестности вершины трещины в форме $\chi(r, \theta) = \sum_i f_i(\theta) r^{\lambda_i}$, где $f_i(\theta)$ и λ_i – собственные функции и собственные значения соответственно. При этом компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины принимают вид:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где индекс m отвечает типу нагружения; коэффициенты a_k^m зависят от геометрии образца с трещиной и от системы приложенных нагрузок; $f_k^{m,ij}(\theta)$ – универсальные угловые распределения, определяемые в ходе решения краевой задачи. Хорошо известны угловые распределения напряжений в (1):

$$\begin{aligned} f_k^{1,11}(\theta) &= k \left[\left(2 + k/2 + (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,22}(\theta) &= k \left[\left(2 + k/2 - (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,12}(\theta) &= k \left[(k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta - (k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta \right] / 2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_k^{2,11}(\theta) &= -k \left[\left(2 + k/2 - (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,22}(\theta) &= -k \left[\left(2 - k/2 + (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,12}(\theta) &= k \left[(k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta - (k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta \right] / 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Характеристики краевой задачи механики трещин, такие как геометрия области с разрезом, природа и интенсивность приложенной нагрузки, не входят ни в радиальное, ни в угловое распределение компонент тензора напряжений. Таким образом, все разнообразие задач механики разрушения учитывается коэффициентами a_k^m . В настоящее время в механике разрушения сложилось ясное понимание необходимости удержания высших слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса (1–3) и, следовательно, о необходимости определения его коэффициентов a_k^m для различных образцов, наиболее часто используемых в инженерной практике [4–6]. Одним из перспективных методов, позволяющих найти аналитические выражения для коэффициентов асимптотических разложений, является метод, основанный на комплексном представлении Колосова – Мухелишвили [3], и последующем сращивании аналитического решения, полученного с помощью теории функции комплексного переменного, с асимптотическим решением М. Уильямса. В настоящей работе получены аналитические выражения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса для бесконечной пластины с двумя коллинеарными трещинами (рис. 1).

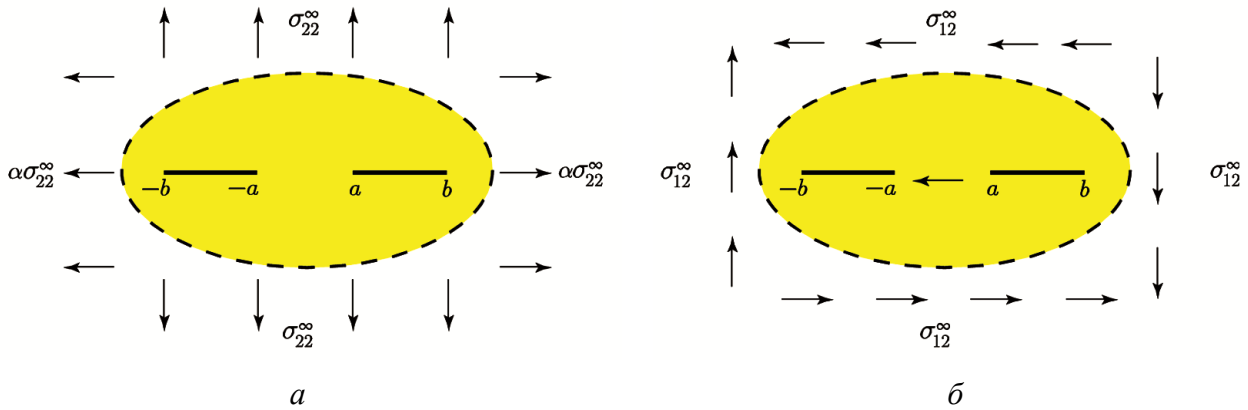


Рис. 1. Симметричное и антисимметричное нагружение пластины с двумя коллинеарными трещинами

2. Комплексное представление решения для бесконечной пластины с двумя коллинеарными трещинами

В случае двухосного симметричного растяжения пластины (рис. 1 а) комплексное представление поля напряжений имеет вид [1, 3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= 2\text{Re}[\varphi_1'(z)] - 2x_2 \text{Im}[\varphi_1''(z)] + C_1, \quad \sigma_{22}^1(z) = 2\text{Re}[\varphi_1'(z)] + 2x_2 \text{Im}[\varphi_1''(z)] - C_1, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -2x_2 \text{Re}[\varphi_1''(z)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ для пластины с двумя трещинами определяется формулой [4]:

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \frac{z^2 - c_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad C_1 = (\alpha - 1)\sigma_{22}^\infty / 2, \quad c_2 = b^2 \frac{E(\pi/2, k)}{F(\pi/2, k)}, \quad k = \sqrt{1 - a^2/b^2},$$

где $E(\pi/2, k)$, $F(\pi/2, k)$ – полные эллиптические интегралы третьего и первого рода. Выражения (4) для симметричного нагружения трещины (рис. 2 а) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= \sigma_{22}^\infty \left\{ \text{Re} \left[\frac{z^2 - c_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + (\alpha - 1) - \right. \\ &\quad \left. - x_2 \text{Im} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{22}^1(z) &= \sigma_{22}^\infty \left\{ \text{Re} \left[\frac{z^2 - c_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + x_2 \text{Im} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -\sigma_{22}^\infty x_2 \left\{ \text{Re} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для поперечного сдвига (рис. 2 в) поле напряжений определяется комплексным потенциалом:

$$\sigma_{11}^2(z) = 2 \operatorname{Re}[\phi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im}[\phi_2''(z)], \quad \sigma_{22}^2(z) = 2x_2 \operatorname{Im}[\phi_2''(z)],$$

$$\sigma_{12}^2(z) = -2 \operatorname{Im}[\phi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Re}[\phi_2''(z)] - C_2.$$

Комплексный потенциал $\phi_2'(z)$ в соответствии с [3] имеет вид:

$$\phi_2'(z) = -i(\sigma_{12}^\infty/2) \left[(z^2 - c_2) / \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right] + i\sigma_{12}^\infty/2, \quad C_2 = \sigma_{12}^\infty.$$

Компоненты тензора напряжений для антисимметричного нагружения трещины принимают вид:

$$\sigma_{11}^2(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ 2 \operatorname{Im} \left[\frac{z^2 - c_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] + x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\},$$

$$\sigma_{22}^2(z) = -\sigma_{12}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right],$$

$$\sigma_{12}^2(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{z^2 - c_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] - x_2 \operatorname{Im} \left[\frac{2z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} - \frac{z(z^2 - c_2)(2z^2 - a^2 - b^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}(z^2 - b^2)^{3/2}} \right] \right\}.$$

Сравнивая асимптотическое решение М. Уильямса с угловыми распределениями (1) и (5), можно найти $K_I(b) = \sqrt{\pi} \sigma_{22}^\infty b^{3/2} [1 - E(\pi/2, k) / F(\pi/2, k)] / \sqrt{b^2 - a^2}$, $T = (\alpha - 1) \sigma_{22}^\infty$.

3. Экспериментальное исследование пластины с двумя коллинеарными трещинами (метод цифровой фотоупругости)

К числу актуальных направлений исследований в механике разрушения относится многопараметрический анализ поля напряжений в окрестности вершины трещины или углового выреза. Поле напряжений вблизи вершины трещины можно описать с помощью полного асимптотического разложения М. Уильямса [1, 2]. Проблему составляет определение коэффициентов асимптотических разложений (коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений и коэффициентов высших приближений) как функций приложенной нагрузки и геометрических параметров образца с трещиной. В настоящей работе для вычисления коэффициентов полных асимптотических разложений М. Уильямса был использован метод фотоупругости [3–5], в рамках которого можно получить распределение изохроматических полос в окрестности вершины трещины. Для проверки результатов обработки экспериментальных данных была проведена серия конечно-элементных расчетов для серии экспериментальных образцов с трещинами и надрезами. Необходимо отметить, что метод фотоупругости и оптико-механический закон, дающий математическую основу определения коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и вектора перемещений, широко используется в настоящее время в механике деформируемого твердого тела. К преимуществам метода фотоупругости относятся: 1) возможность формулировки оптико-механического закона для любого наперед заданного количества экспериментальных точек; 2) тщательный анализ функции формы, фигурирующей в выражениях для коэффициентов интенсивности напряжений (в настоящее время предложены новые экспериментальные об-

разцы, отличающиеся постоянным значением функции формы, например, надрезанный полудиск для испытания на сжатие); 3) возможность быстрой обработки экспериментальной информации с помощью пакетов прикладных программ.

Настоящая работа представляет собой попытку вычисления коэффициентов в высших приближениях полного асимптотического разложения М. Уильямса (1), (2) на основе методов фотоупругости и метода конечного элемента с помощью алгоритма, специально разработанного для вычисления данных коэффициентов.

Основываясь на классической концепции фотоупругости, положение изохроматической полосы определяется с помощью оптико-механического закона Вертгейма (таким образом, интерференционная картина дает возможность получить линии равных разностей главных напряжений в модели):

$$\left(\frac{Nf_{\sigma}}{h}\right)^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2, \quad (6)$$

где N представляет собой порядок изохроматической полосы; f_{σ} – оптическая постоянная материала, характеризуемая разностью главных напряжений, необходимой для изменения порядка полос на единицу в модели единичной толщины. Описываемый ниже метод базируется на функции:

$$g_m = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)_m^2 + (\sigma_{12})_m^2 - \left(\frac{N_m f_{\sigma}}{2h}\right)^2. \quad (7)$$

a_k^1 и a_l^2 , где k – количество параметров, представляющих деформацию отрыва, и l – количество слагаемых, описывающих поперечный сдвиг. Для решения системы нелинейных уравнений необходимо задать начальные приближения для неизвестных коэффициентов a_k^1 и a_l^2 . Если эти значения корректны, то функция g_m обращается в нуль. В общем случае, очевидно, что функция g_m в нуль не обратится и следует прибегнуть к итерационной процедуре. Для реализации данной процедуры используется следующий подход. Неизвестные коэффициенты a_k^1 и a_l^2 находятся путем разложения функции g_m в ряд Тейлора, в котором удерживаются слагаемые первого порядка относительно разностей.

Заменяя уравнение, описывающее поле напряжений вблизи вершины трещины, были получены неизвестные коэффициенты $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_L^1$ и $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_K^2$, где L – число, характеризующее количество слагаемых трещины типа I (трещины нормального отрыва); K – типа II (трещины поперечного сдвига). Чтобы решить систему нелинейных алгебраических уравнений, часто прибегают к переопределенному методу, суть которого заключается в линеаризации системы уравнений, следующей из оптико-механического закона (6). Линеаризация системы уравнений заключается в разложении полученной системы функций в окрестности нулевого (начального) приближения для коэффициентов $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_L^1$ и $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_K^2$. Следующий этап – задание начального приближения коэффициентов, если эти приближения корректны, то функция g_m обратится в нуль.

Конечно, невозможно найти заранее правильные приближения для $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_L^1$ и $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_K^2$, поэтому используется итерационный процесс для нахождения решения. В уравнении (7) приближение этих коэффициентов оценено посредством ряда Тейлора:

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1} \Delta a_1^1 + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1} \Delta a_2^1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_L^1} \Delta a_L^1 + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2} \Delta a_1^2 + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2} \Delta a_2^2 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^2} \Delta a_K^2,$$

где нижний индекс i – индекс итерации; $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \Delta a_3^1, \dots, \Delta a_L^1$ и $\Delta a_1^2, \Delta a_2^2, \Delta a_3^2, \dots, \Delta a_K^2$ – поправки для предыдущих оценок параметров $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_L^1$ и $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_K^2$.

Новые значения для масштабных множителей вычисляются путем решения уравнения $(g_m)_{i+1} = 0$. Коэффициенты в последнем уравнении для каждой точки m относительно коэффициентов $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_L^1$ и $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_K^2$ вычисляются согласно равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_m}{\partial a_n^1} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})_m \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_n^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_n^1} \right)_m + 2 \left(\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_n^1} \right)_m, \\ \frac{\partial g_m}{\partial a_n^2} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})_m \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_n^2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_n^2} \right)_m + 2 \left(\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_n^2} \right)_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, необходимо получить решение системы уравнений $\{g\}_i = -[b]_i \{\Delta a\}_i$ и вектор поправок $\{\Delta a\}_i = -[c]_i^{-1} \{d\}_i$, где $[c]_i = [b]_i^T [b]_i$, $\{d\}_i = [b]_i^T \{g\}_i$. На втором шаге итерации используется новая поправка $\{a\}_{i+1} = \{a\}_i + \{\Delta a\}_i$. Используя уравнения Алтури и Кобаяси относительно известных коэффициентов [7], получим уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_n^1} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_n^1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_n^1} \end{Bmatrix} &= \frac{n}{2} r^{(n-2)/2} \begin{Bmatrix} \left[2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ \left[2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ - \left[(-1)^n + \frac{n}{2} \right] \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_n^2} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_n^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_n^2} \end{Bmatrix} &= \frac{n}{2} r^{(n-2)/2} \begin{Bmatrix} \left[2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ \left[2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ - \left[(-1)^n + \frac{n}{2} \right] \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Производные от напряжений не зависят от неизвестных коэффициентов и не меняются с изменением шага итерации. Это неверно для производных от функции g_m , которые изменяются при каждой итерации. Первоначально векторы типа $\partial \sigma_{11} / \partial a_n^1$ вычисляются для каждого $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \Delta a_3^1, \dots, \Delta a_L^1$ и $\Delta a_1^2, \Delta a_2^2, \Delta a_3^2, \dots, \Delta a_K^2$. Теперь можно построить

матрицу $[b]$ и скорректировать значения $\{\Delta A\}_i$ и параметры, которые будут использоваться в следующей итерации.

В работе также выполнена серия экспериментов с помощью метода фотоупругости на пластинках с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины. Картина изохроматических полос изображена на рис. 2. На рис. 3 показана интерференционная картина в пластине с двумя коллинеарными наклонными трещинами для разных значений приложенной нагрузки. Выполнена цифровая обработка экспериментальной информации и найдены коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса. Точки, принадлежащие изохромам, найденные в ходе процедуры цифровой обработки данных и используемые для вычисления параметров механики разрушения, приведены на рис. 4 и отмечены зеленым цветом. Оказалось, что для экспериментального определения параметров механики разрушения следует прибегать к многопараметрическим асимптотическим разложениям механических полей. Результаты вычислений представлены в табл. 1–5. При удержании высших приближений значения коэффициентов интенсивности напряжений, соответствующие нормальному отрыву и поперечному сдвигу, T -напряжения быстро стабилизируются. Результаты аналитического решения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

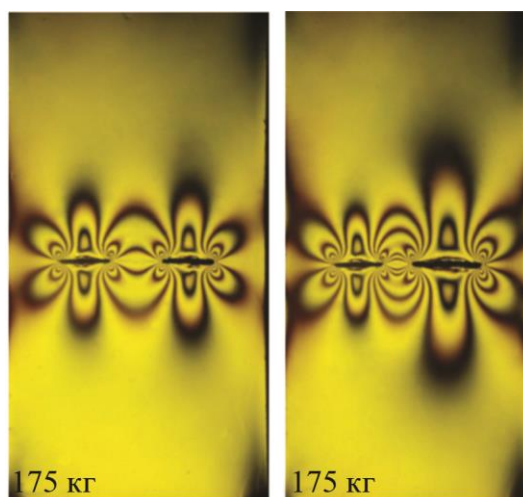


Рис. 2. Картины изохром в пластинках с двумя коллинеарными трещинами при разной интенсивности нагружения

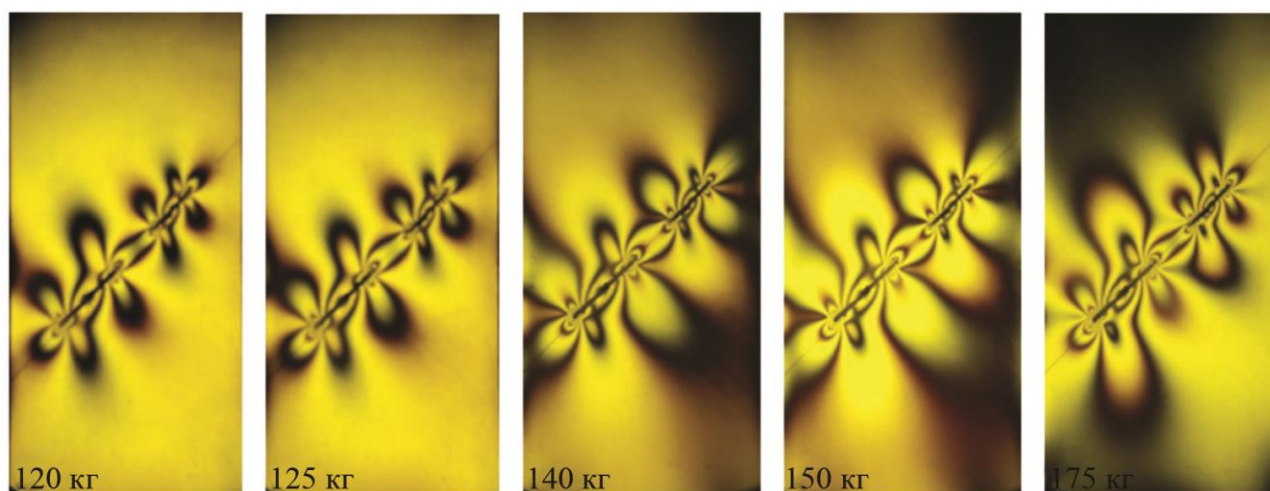


Рис. 3. Картины изохром в пластинках с двумя наклонными коллинеарными трещинами при разной интенсивности нагружения

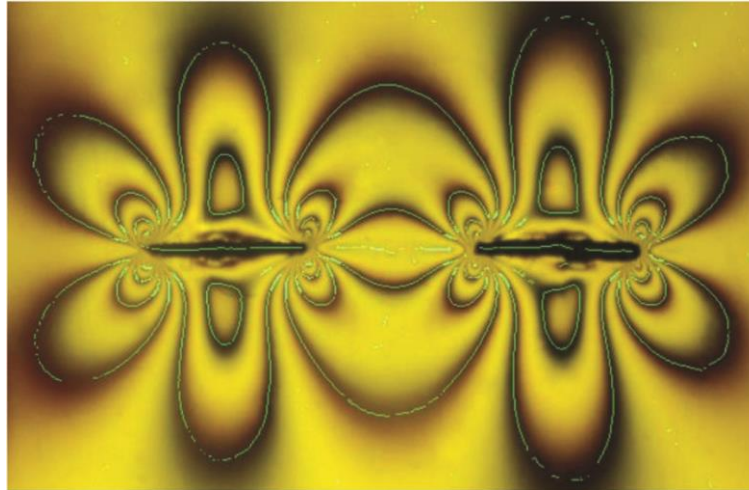


Рис. 4. Точки, принадлежащие изохромам, найденные в ходе процедуры цифровой обработки данных и используемые для вычисления параметров механики разрушения

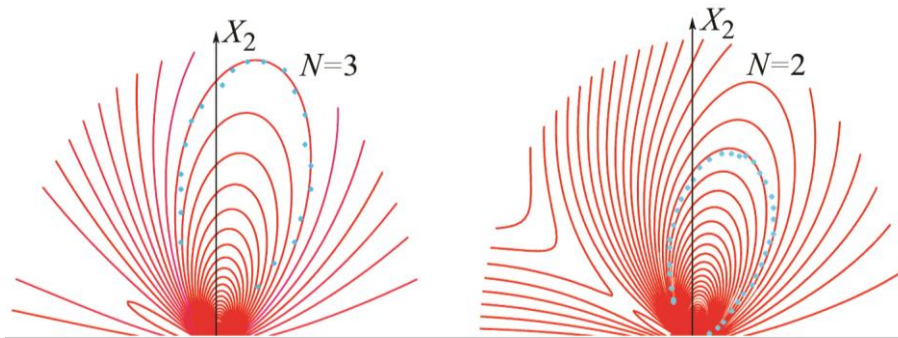


Рис. 5. Теоретически полученные изохроматические полосы (красный цвет) и экспериментальные точки (синий цвет)

На рис. 5 изображены теоретически полученные картины изохроматических полос для изохром различных порядков и экспериментальные точки.



Рис. 6. Теоретически реконструированное поле изохроматических полос, полученное с помощью различного числа слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса

Таблица 1 – Коэффициенты полного асимптотического разложения Уильямса у вершины трещины $z = a$ ($a = 1.5\text{cm}, b = 0.5\text{cm}, c = -0.5\text{cm}, d = -1.5\text{cm}$)

| | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_1^1 (cm^{-3/2})$ | $a_2^1 (cm^{-2})$ | $a_3^1 (cm^{-5/2})$ | $a_5^1 (cm^{-7/2})$ | $a_7^1 (cm^{-9/2})$ | $a_9^1 (cm^{-11/2})$ | $a_{11}^1 (cm^{-13/2})$ | $a_{13}^1 (cm^{-15/2})$ | $a_{15}^1 (cm^{-17/2})$ |
| 0,5139 | -0,2500 | 0,2512 | -0,0646 | 0,0330 | -0,0208 | 0,0145 | -0,0109 | 0,0086 |
| $a_{17}^1 (cm^{-19/2})$ | $a_{19}^1 (cm^{-21/2})$ | $a_{21}^1 (cm^{-23/2})$ | $a_{23}^1 (cm^{-25/2})$ | $a_{25}^1 (cm^{-27/2})$ | $a_{27}^1 (cm^{-29/2})$ | $a_{29}^1 (cm^{-31/2})$ | $a_{31}^1 (cm^{-33/2})$ | $a_{33}^1 (cm^{-35/2})$ |
| -0,0069 | 0,0058 | -0,0049 | 0,00426 | -0,0037 | 0,0033 | -0,0029 | 0,0026 | -0,0024 |
| $a_{35}^1 (cm^{-37/2})$ | $a_{37}^1 (cm^{-39/2})$ | $a_{39}^1 (cm^{-41/2})$ | $a_{41}^1 (cm^{-43/2})$ | $a_{43}^1 (cm^{-45/2})$ | $a_{45}^1 (cm^{-47/2})$ | $a_{47}^1 (cm^{-49/2})$ | $a_{49}^1 (cm^{-51/2})$ | $a_{51}^1 (cm^{-53/2})$ |
| 0,0022 | -0,0020 | 0,0018 | -0,0017 | 0,0016 | -0,00015 | 0,0014 | -0,0013 | 0,0012 |

Таблица 2 – Коэффициенты полного асимптотического разложения Уильямса у вершины трещины $z = c$ ($a = 1.5\text{cm}, b = 0.5\text{cm}, c = -0.5\text{cm}, d = -1.5\text{cm}$)

| | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_1^1 (cm^{-3/2})$ | $a_2^1 (cm^{-2})$ | $a_3^1 (cm^{-5/2})$ | $a_5^1 (cm^{-7/2})$ | $a_7^1 (cm^{-9/2})$ | $a_9^1 (cm^{-11/2})$ | $a_{11}^1 (cm^{-13/2})$ | $a_{13}^1 (cm^{-15/2})$ | $a_{15}^1 (cm^{-17/2})$ |
| 0,52398 | -0,25000 | 0,27936 | -0,04384 | 0,04700 | -0,00820 | 0,00234 | -0,00279 | 0,001468 |
| $a_{17}^1 (cm^{-19/2})$ | $a_{19}^1 (cm^{-21/2})$ | $a_{21}^1 (cm^{-23/2})$ | $a_{23}^1 (cm^{-25/2})$ | $a_{25}^1 (cm^{-27/2})$ | $a_{27}^1 (cm^{-29/2})$ | $a_{29}^1 (cm^{-31/2})$ | $a_{31}^1 (cm^{-33/2})$ | $a_{33}^1 (cm^{-35/2})$ |
| -0,00126 | 0,01027 | -0,00068 | 0,00769 | -0,00041 | 0,00603 | -0,00027 | 0,00489 | -0,00018 |
| $a_{35}^1 (cm^{-37/2})$ | $a_{37}^1 (cm^{-39/2})$ | $a_{39}^1 (cm^{-41/2})$ | $a_{41}^1 (cm^{-43/2})$ | $a_{43}^1 (cm^{-45/2})$ | $a_{45}^1 (cm^{-47/2})$ | $a_{47}^1 (cm^{-49/2})$ | $a_{49}^1 (cm^{-51/2})$ | $a_{51}^1 (cm^{-53/2})$ |
| 0,00407 | -0,00013 | 0,00345 | -0,00009 | 0,00298 | -0,00007 | 0,00260 | -0,00005 | 0,00230 |

Таблица 3 – Коэффициенты полного асимптотического разложения Уильямса у вершины трещины $z = a$ ($a = 2\text{cm}, b = 0.5\text{cm}, c = -0.5\text{cm}, d = -1.5\text{cm}$)

| | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_1^1 (cm^{-3/2})$ | $a_2^1 (cm^{-2})$ | $a_3^1 (cm^{-5/2})$ | $a_5^1 (cm^{-7/2})$ | $a_7^1 (cm^{-9/2})$ | $a_9^1 (cm^{-11/2})$ | $a_{11}^1 (cm^{-13/2})$ | $a_{13}^1 (cm^{-15/2})$ | $a_{15}^1 (cm^{-17/2})$ |
| 0,62576 | -0,25000 | 0,20400 | -0,03470 | 0,01181 | -0,00499 | 0,00234 | -0,00117 | 0,00061 |
| $a_{17}^1 (cm^{-19/2})$ | $a_{19}^1 (cm^{-21/2})$ | $a_{21}^1 (cm^{-23/2})$ | $a_{23}^1 (cm^{-25/2})$ | $a_{25}^1 (cm^{-27/2})$ | $a_{27}^1 (cm^{-29/2})$ | $a_{29}^1 (cm^{-31/2})$ | $a_{31}^1 (cm^{-33/2})$ | $a_{33}^1 (cm^{-35/2})$ |
| -0,00033 | 0,00018 | -0,00010 | 0,00005 | -0,00003 | 0,00002 | -0,00001 | $0.733 \cdot 10^{-5}$ | $-0.442 \cdot 10^{-5}$ |

Таблица 4 – Коэффициенты полного асимптотического разложения Уильямса у вершины трещины
 $z = d$ ($a = 1.5\text{cm}, b = 0.5\text{cm}, c = -0.5\text{cm}, d = -1.5\text{cm}$)

| | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_1^1 (cm^{-3/2})$ | $a_2^1 (cm^{-2})$ | $a_3^1 (cm^{-5/2})$ | $a_5^1 (cm^{-7/2})$ | $a_7^1 (cm^{-9/2})$ | $a_9^1 (cm^{-11/2})$ | $a_{11}^1 (cm^{-13/2})$ | $a_{13}^1 (cm^{-15/2})$ | $a_{15}^1 (cm^{-17/2})$ |
| 0,52397 | -0,25000 | 0,27937 | -0,04384 | 0,04700 | -0,00820 | 0,02343 | -0,00279 | 0,014687 |
| $a_{17}^1 (cm^{-19/2})$ | $a_{19}^1 (cm^{-21/2})$ | $a_{21}^1 (cm^{-23/2})$ | $a_{23}^1 (cm^{-25/2})$ | $a_{25}^1 (cm^{-27/2})$ | $a_{27}^1 (cm^{-29/2})$ | $a_{29}^1 (cm^{-31/2})$ | $a_{31}^1 (cm^{-33/2})$ | $a_{33}^1 (cm^{-35/2})$ |
| -0,00126 | 0,01027 | -0,000068 | 0,00769 | -0,00041 | 0,00603 | -0,00026 | 0,00489 | -0,00018 |
| $a_{35}^1 (cm^{-37/2})$ | $a_{37}^1 (cm^{-39/2})$ | $a_{39}^1 (cm^{-41/2})$ | $a_{41}^1 (cm^{-43/2})$ | $a_{43}^1 (cm^{-45/2})$ | $a_{45}^1 (cm^{-47/2})$ | $a_{47}^1 (cm^{-49/2})$ | $a_{49}^1 (cm^{-51/2})$ | $a_{51}^1 (cm^{-53/2})$ |
| 0,00407 | -0,00013 | 0,00345 | -0,00009 | 0,00298 | -0,00007 | 0,00260 | -0,00005 | 0,00230 |

Таблица 5 – Коэффициенты полного асимптотического разложения Уильямса у вершины трещины
 $z = d$ ($a = 2.5\text{cm}, b = 0.5\text{cm}, c = -0.5\text{cm}, d = -1.5\text{cm}$)

| | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_1^1 (cm^{-3/2})$ | $a_2^1 (cm^{-2})$ | $a_3^1 (cm^{-5/2})$ | $a_5^1 (cm^{-7/2})$ | $a_7^1 (cm^{-9/2})$ | $a_9^1 (cm^{-11/2})$ | $a_{11}^1 (cm^{-13/2})$ | $a_{13}^1 (cm^{-15/2})$ | $a_{15}^1 (cm^{-17/2})$ |
| 0,56275 | -0,25000 | 0,31993 | -0,02563 | 0,06089 | -0,00065 | 0,02999 | 0,00117 | 0,01853 |
| $a_{17}^1 (cm^{-19/2})$ | $a_{19}^1 (cm^{-21/2})$ | $a_{21}^1 (cm^{-23/2})$ | $a_{23}^1 (cm^{-25/2})$ | $a_{25}^1 (cm^{-27/2})$ | $a_{27}^1 (cm^{-29/2})$ | $a_{29}^1 (cm^{-31/2})$ | $a_{31}^1 (cm^{-33/2})$ | $a_{33}^1 (cm^{-35/2})$ |
| 0,00122 | 0,01286 | 0,00106 | 0,00958 | 0,00901 | 0,00749 | 0,00766 | 0,00060 | 0,00065 |
| $a_{35}^1 (cm^{-37/2})$ | $a_{37}^1 (cm^{-39/2})$ | $a_{39}^1 (cm^{-41/2})$ | $a_{41}^1 (cm^{-43/2})$ | $a_{43}^1 (cm^{-45/2})$ | $a_{45}^1 (cm^{-47/2})$ | $a_{47}^1 (cm^{-49/2})$ | $a_{49}^1 (cm^{-51/2})$ | $a_{51}^1 (cm^{-53/2})$ |
| 0,00504 | 0,00057 | 0,00027 | 0,00050 | 0,00368 | 0,00044 | 0,00321 | 0,00039 | 0,00284 |

На рис. 6 показано теоретически реконструированное поле изохроматических полос, полученное с помощью различного числа слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса. На рис. 6 слева показаны изохроматические полосы, полученные с помощью двучленного асимптотического разложения М. Уильямса, в центре картина изохроматических полос построена с помощью пятичленного асимптотического разложения М. Уильямса. Справа изображение получено посредством девятичленного асимптотического разложения поля напряжений у вершины трещины.

Выводы и обсуждение результатов

Работа посвящена аналитическому определению коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения. Представлен метод вычисления коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса, базирующийся на классическом комплексном представлении решения Колосова–Мусхелишвили. Метод позволяет получить аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений и коэффициентов высших приближений в разложении М. Уильямса. Найдены аналитические зависимости коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса от приложенной нагрузки, длин трещин и расстояний между ними для пластины с двумя коллинеарными трещинами. С помощью метода фотоупругости выполнено экспериментальное исследование пластин с двумя коллинеарными трещинами. Проведена цифровая обработка экспериментальной информации, с помощью которой вычислены коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса у вершин трещин. Проведена серия конечно-элементных расчетов в САЕ пакете SIMULIA Abaqus для численного определения коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса. МКЭ расчеты подтверждают полученные аналитические выражения.

Литература

1. Hello G., Tahar M.-B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49, iss. 3–4. – P. 556–566. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.
2. Степанова Л. В. Математические методы механики разрушения. – Самара : Самарский университет, 2006. – 232 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
4. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2015. – Vol. 134. – P. 218–241. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.
5. Matvienko Yu. G. The effect of the non-singular t-stress components on crack tip plastic zone under mode I loading // *Procedia Materials Science*. – 2014. – Vol. 134. – P. 141–146. – DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.026.
6. Stepanova L. V., Adylina E. M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical*. – 2014. – Vol. 55, iss. 5. – P. 181–194. – DOI: 10.1134/S0021894414050186.
7. Экспериментальная механика : в 2-х книгах / пер. с англ. под ред. А. Кобаяси. – М. : Мир, 1990. 616 с. – Кн. 1.

Received: 08.12.2017

Revised: 30.03.2018

Accepted: 06.04.2018

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.042-082

DYNAMIC POWDER COMPACTION PROCESSES

A. P. Polyakov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation*

 <http://orcid.org/0000-0003-0109-6916>  pap@imach.uran.ru

Corresponding author. E-mail: pap@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 343 374 50 51; fax: +7 343 374 53 30

Mathematical models of dynamic compaction and extrusion of incompact metallic materials are considered. According to the model of dynamic compaction, irreversible material volume changes occurring under the shock action are considered on the basis of the general equations of mass, momentum and energy conservation, which are written for the discontinuity surface.

A mathematical model of impact extrusion of incompact wire stock through a conical die is proposed. It is based on the superposition of the solutions of two problems, namely, compaction of powder material in a cylindrical press mold and impact extrusion of an incompressible material. The model allows one to determine the minimum tool velocity required to perform extrusion.

Keywords: powder material, dynamic compaction, shock wave, tool speed, porosity, extrusion.

References

1. Krupin A.V., Solovyev V.Ya., Popov G.S., Kr"stev M.R. *Obrabotka metallov vzryvom* [Explosion Processing of Metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1991, 496 p. (In Russian).
2. Dmitriev A.M., Vorontsov A.L. *Tekhnologiya kovki i obyemnoy shtampovki*. Ch. 1. Obyemnaya shtampovka vydavlivaniem: ucheb. dlya vuzov [Technology of Forging and Bulk Stamping. Part 1. Bulk Stamping by Extrusion: Textbook for Colleges]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2002, 400 p. (In Russian).
3. Roman O.V., Gorobtsov V.G. *Aktualnye problemy poroshkovoi metallurgii* [Actual problems of powder metallurgy, eds., O.V. Roman, V.S. Arunachalam,]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1990, pp. 78–99.
4. Belyakov G.V., Rodionov V.N., Samosadnyi V.P. Heating of porous material under impact compression. *Combustion explosion and shock waves*, 1977, vol. 13, iss. 4, pp. 524–528. DOI: 10.1007/BF00744803.
5. Gerasimov A.V., Krektuleva R.A. Numerical simulation of deformation and destruction of functionally gradient porous materials under explosive and impact loading. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 94–106. (In Russian).
6. Alekseev Yu.L., Ratnikov V.P., Rybakov A.P. Shock adiabats of porous metals. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 257–262. DOI: 10.1007/BF00850698.
7. Anisichkin V.F. Shock compression of porous bodies. *Combustion explosion and shock waves*, 1979, vol. 15, no. 6, pp. 796–799. DOI: 10.1007/BF00739873.
8. Fomin V.M., Gulidov A.I., Sapozhnikov G.A., Shabalin I.I., Babakov V.A., Kuropatenko V.F., Kiselev A.B., Trishin Yu.A., Sadyrin A.I., Kiselev S.P., Golovlev I.F. *Vysokoskorostnoe vzai-*

- modeistvie tel* [High-speed interaction of bodies]. Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1999, 600 p. (In Russian).
9. Deribas A.A., Staver A.M. The shock compression of porous cylindrical bodies. *Phizika Goreniya i Vzryva*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 568–578. (In Russian).
 10. Kuzmin G.E., Staver A.M. To the determination of flow parameters in shock-loaded powder materials. *Fizika Goreniya i Vzryva*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 898–905. (In Russian).
 11. Yakovlev S.P., Kukhar V.D., Proskuryakov N.E., Seledkin E.M., Nechepurenko N.G. *Magnitno-impulsnaya shtampovka polykh tsilindricheskykh zagotovok* [Magnetic Pulse Forming of Hollow Cylindrical Blanks]. Tula, Reproniks Ltd. Publ., 1998, 240 p. (In Russian).
 12. Nesterenko V.F. *Impul'snoe nagruzhenie geterogennykh materialov* [Pulse loading of heterogeneous materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 200 p. (In Russian).
 13. Roman O.V., Mirilenko A.P., Pikus I.M. Theory and technology of the component formation process - effect of high-speed loading conditions on the pressing mechanism. *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 1989, vol. 28, no. 11, pp. 840–844. DOI: 10.1007/BF01198890.
 14. Serdyuk G.G., Svistun L.I. Shock compaction of metal powders (theoretical research). In: *Reologicheskie modeli i protsessy deformirovaniya poristyykh i kompozitsionnykh materialov*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1985, pp. 115–126. (In Russian).
 15. Hermann W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, 1969, vol. 40, no. 6, pp. 2490–2499. DOI: 10.1063/1.1658021.
 16. Shtertser A.A. Transmission of pressure in porous-media under explosive loading. *Combustion explosion and shock waves*, 1988, vol. 24, iss. 5, pp. 610–615.
 17. Butcher B.M., Carroll M.M., Holt A.C. Shock wave compaction of porous aluminum. *J. Appl. Phys.*, 1974, vol. 45, no. 9, pp. 3864–3875. DOI: 10.1063/1.1663877.
 18. Carroll M.M., Holt A.C. Steady waves in ductile porous solids. *J. Appl. Phys.*, 1973, vol. 44, no. 10, pp. 4388–4392. DOI: 10.1063/1.1661970.
 19. Davison L. Shock-wave structure in porous solids. *J. Appl. Phys.*, 1971, vol. 42, no. 13, pp. 5503–5512. DOI: 10.1063/1.1659971.
 20. Hörluck S., Dimon P. Statistics of shock waves in a two-dimensional granular flow. *Physical Review E*, 1999, vol. 60, no. 1, pp. 671–686. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.671.
 21. Nunziato J.W., Walsh E.K. One-dimensional shock waves in uniformly distributed granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, vol. 14, no. 8, pp. 681–689. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90006-9.
 22. Ayzenberg-Stepanenko M.V., Osharovich G.G., Sher E.N., Yanovitskaya Z.Sh. Numerical Simulation of Shock-Wave Processes in Elastic Media and Structures. Part I: Solving Method and Algorithms. *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 76–95. DOI: 10.1134/S1062739148010091.
 23. Afanas'eva S.A., Belov N.N., Burkin V.V., Dudarev E.F., Ishchenko A.N., Rogaev K.S., Tabachenko A.N., Khabibullin M.V., Yugov N. T. Simulation of the action of a shock wave on titanium alloy. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2017, vol. 90, no. 1, pp. 24–34. DOI: 10.1007/s10891-017-1535-8.
 24. Roman O.V., Shmuradko V.T., Tarasov G.D. Curve of the dynamic compressibility of powder media. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2006, vol. 79, no. 4, pp. 817–823.
 25. Chikova O.A., Shishkina E.V., Petrova A.N., Brodova I.G. Measuring the Nanohardness of Commercial Submicrocrystalline Aluminum Alloys Produced by Dynamic Pressing. *The Physics of Metals and Metallography*, 2014, vol. 115, no. 5, pp. 523–528. DOI: 10.1134/S0031918X14050044.
 26. Shorokhov E.V., Zhgilev I.N., Gunderov D.V., Gurov A.A. Dynamic Pressing of Titanium for Producing an Ultrafine-Grained Structure. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2008, vol. 2, no. 2, pp. 251–254. DOI: 10.1134/S1990793108020139.
 27. Rogozin V.D. *Vzryvnaya obrabotka poroshkovykh materialov* [Explosive Processing of Powder Materials]. Volgograd, Polytekhnik Publ., 2002, 136 p. (In Russian).

28. Kinelovskii S.A., Maevskii K.K. Model of the behavior of the mixture with different properties of the species under high dynamic loads. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 524–530. DOI: 10.1134/S0021894413040020.
29. Vogler T. Shock Wave Perturbation Decay in Granular Materials. *J. dynamic behavior mater.*, 2015, vol. 1, pp. 370–387. DOI: 10.1007/s40870-015-0033-3.
30. Shtern M.B., Kartuzov E.V. Formation and propagation of shock waves in highly porous materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 2016, vol. 55, no. 3–4, pp. 134–140. DOI: 10.1007/s11106-016-9788-x.
31. Leitsin V.N. A model of reacting powder medium. In: *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Byulleten Operativnoi Tekhnicheskoi Informatsii* [Bulletin of Tomsk State University: technical newsletter]. Tomsk, TGU Publ., 2001, no. 5, 40 p. (In Russian).
32. Boltachev G.Sh., Kaygorodov A.S., Volkov N.B. Densification of the granular medium by the low amplitude shock waves. *Acta Mechanica*, 2009, vol. 207, pp. 223–234. DOI: 10.1007/s00707-008-0127-2.
33. Boltachev G.Sh., Volkov N.B., Ivanov V.V., Kaygorodov A.S. Shock-wave compaction of the granular medium initiated by magnetically pulsed accelerated striker. *Acta Mechanica*, 2009, vol. 204, pp. 37–50. DOI: 10.1007/s00707-008-0046-2.
34. Olevsky E.A., Bokov A.A., Boltachev G.Sh., Volkov N.B., Zayats S.V., Ilyina A.M., Nozdrin A.A., Paranin S.N. Modeling and optimization of uniaxial magnetic pulse compaction of nanopowders. *Acta Mech.*, 2013, vol. 224, pp. 3177–3195. DOI 10.1007/s00707-013-0939-6
35. Boltachev G.Sh., Volkov N.B., Chingina E.A. Nanopowders in Dynamic Magnetic Pulse Compaction Processes. *Nanotechnologies in Russia*, 2014, vol. 9, no. 11–12, pp. 650–659. DOI: 10.1134/S1995078014060056.
36. Bokov A.A., Boltachev G.Sh., Volkov N.B., Zayats S.V., Il'ina A.M., Nozdrin A.A., Paranin S.N., Olevskii E.A. Uniaxial Compaction of Nanopowders on a Magnetic_Pulse Press. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 10, pp. 1459–1468. DOI: 10.1134/S106378421310006X.
37. Fedotov A.F., Amosov A.P., Radchenko V.P. *Modelirivanie protsessa pressovaniya poroshkovykh materialov v uslovyakh samorasprostranyayuschegosya vysokotemperaturnogo sinteza* [Modeling the Powder Material Compaction in Conditions of the Self-Propagating High-Temperature Synthesis]. Moscow, Mashinostroenie-1 Publ., 2005, 282 p. (In Russian).
38. Kiselev A.B., Yumashev M.V. Deformation and Failure under Impact Loading. Model of a Thermoelastoplastic Medium. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1990, vol. 31, no. 5, pp. 116–123. (In Russian).
39. Godunov S.K., Romenskii E.I. *Elementy mekhaniki sploshnykh sred i zakony sokhraneniya* [Elements of continuum mechanics and conservation laws]. Novosibirsk, Nauchnaya Kniga Publ., 1998, 267 p. (In Russian).
40. Bardet J.P., Proubet J. Application of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. In: J. Biarez, R. Gourvès, eds. *Powders and Grains*, Int. Conf. on micromechanics of granular media, Clermont-Ferrand, 4–8 September, 1989: Proceedings., pp. 265–273.
41. Resnyansky A.D., Bourne N.K. Shock-wave compression of a porous material. *J. Appl. Phys.*, 2004, vol. 95, no. 4, pp. 760–1769. DOI: 10.1063/1.1640460.
42. Boshoff-Mostert L., Viljoen H. J. Comparative study of analytical methods for Hugoniot curves of porous materials. *J. Appl. Phys.*, 1999, vol. 86, no. 3, pp. 1245–1254. DOI: 10.1063/1.370878.
43. Fenton G., Grady D., Vogler T. Shock Compression Modeling of Distended Mixtures. *Journal of Dynamic Behavior Materials*, 2015, vol. 1, pp. 103–113. DOI: 10.1007/s40870-015-0021-7.
44. Shen A.H., Ahrens T.J., O'Keefe J.D. Shock wave induced vaporization of porous solids. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, pp. 5167–5174. DOI: 10.1063/1.1563035.
45. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 336 p. (In Russian).

46. Dunin S.Z., Surkov V.V. Dynamics of the closing of pores at the shock-wave front. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, vol. 43, iss. 3, pp. 550–558. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90103-5.
47. Kraiko A.N., Miller L.G., Shirkovskii I.A. About gas flow in porous media with surfaces of porosity Discontinuity. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1982, no. 1, pp. 111–118. (In Russian).
48. Zhdanovich G.M. *Theory of Compaction of Metal Powders*, transl. *Teoriya Pressovaniya Metallicheskih Poroshkov* [Theory of Metal Powder Pressing, 1969, pp. 1–262]. Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, OH, 1971.
49. Ivanov V.V., Nozdrin A.A. Method of determining dynamic adiabatic compression curves of powders. *Technical Physics Letters*, 1997, vol. 23, pp. 527–528. DOI: 10.1134/1.1261734.
50. Nowacki W.K. *Stress Waves in Non-Elastic Solids*, Pergamon Press, Oxford, U.K, 1978, 182 p.
51. Proskuryakov N.E., Orlov S.Yu., Cherevatyi R.S. The effect of deformation velocity on dynamic yield stress. In: *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela i obrabotka metallov davleniem*, Tula, Tuskii Gosudarstvennyi Universitet Publ., 2001, pp. 134–138. (In Russian).
52. Carroll M.M., Kim K.T., Nesterenko V.F. The effect of temperature on viscoplastic pore collapse. *J. Appl. Phys.*, 1986, vol. 59, no. 6, pp. 1962–1967. DOI: 10.1063/1.336426.
53. Polyakov A.P., Zalazinskaya E.A. Dynamic compaction of compacts of non-compacted metal stock. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Tsvetn. Metall.*, 2003, no. 1, pp. 30–34. (In Russian).
54. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, iss. 4, pp. 215–224. DOI: 10.1016/0020-7403(72)90063-X.
55. Zalazinskii A.G., Polyakov A.A., Polyakov A.P. On plastic compression of a porous body. *Mechanics of Solids*, 2003, vol. 38, no. 1, pp. 101–110.
56. Kolachev B.A., Livanov V.A., Bukhanova A.A. *Mekhanicheskie svoistva titana i ego splavov* [Mechanical Properties of Titanium and its Alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1974, 544 p. (In Russian).
57. Polyakov A.P., Mokrousova M.S. Mathematical modeling of the process of dynamic compaction of a powder material. *Kuznechno-Shtampovochnoe Proizvodstvo. Obrabotka Materialov Davleniem*, 2004, no. 2, pp. 20–22, 24–27. (In Russian).
58. Polyakov A.P. The effect of parameters of dynamic loading on the propagation character of shock waves in a powder. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, 2009, vol. 50, no. 1, pp. 33–38. DOI: 10.3103/S106782120901009X.
59. Druyanov B.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti poristykh tel* [Applied Theory of Plasticity of Porous Bodies]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 168 p. (In Russian).
60. Zalazinskii A.G., *Plasticheskoe deformirovanie strukturno-neodnorodnykh materialov* [Plastic Deformation of Structurally Nonuniform Materials]. Yekaterinburg, Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk Publ., 2000, 492 p. (In Russian).
61. Polyakov A.P. Impact extrusion of rod stock through conical die. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Tsvetn. Metall.*, 2004, no. 4, pp. 50–54. (In Russian).
62. Grigor'ev A.K., Rudskoi A.I. *Deformatsiya i uplotnenie poroshkovykh materialov* [Deformation and Compaction of Powder Materials]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1992, 192 p. (In Russian).
63. Polyakov A.P. Impact extrusion process of billet production from low compressible material. *Izv. VUZov. Chernaya Metallurgiya*, 2006, no. 3, pp. 32–37. (In Russian).
64. Polyakov A.P. Power Parameters of the Impact Pressing Process of an Incompact Wire Stock. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, 2007, vol. 48, no. 2, pp. 136–142. DOI: 10.3103/S1067821207020125.

Подана в журнал: 08.12.2017

УДК 539.37

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.042-082

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВ

А. П. Поляков

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, 34,
Екатеринбург, Российская Федерация*

 <http://orcid.org/0000-0003-0109-6916>  pap@imach.uran.ru

Ответственный автор. Электронная почта: pap@imach.uran.ru

Адрес для переписки: 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 374–50–51; факс: +7 (343) 374–53–30

Рассмотрены математические модели динамического прессования и выдавливания некомпактных металлических материалов. В соответствии с моделью динамического прессования, происходящие под действием ударных волн, необратимые изменения объема в материале рассматриваются на основе общих уравнений сохранения массы, количества движения и энергии, записанных для поверхности разрыва.

Построена математическая модель процесса ударного выдавливания некомпактной заготовки через коническую матрицу. Она основывается на суперпозиции решений задачи о прессовании порошкового материала в цилиндрической пресс-форме и задачи об ударном выдавливании несжимаемого материала. Модель позволяет определить минимальную скорость инструмента, позволяющую осуществить выдавливание заготовки.

Ключевые слова: порошковый материал, динамическое прессование, ударная волна, скорость инструмента, пористость, выдавливание.

Финансирование: работа выполнена по теме 0391-2016-0004 (№ гос. регистрации АААА-А18-118020790142-9).

1. Введение

Процессы динамического прессования нашли широкое применение в порошковой металлургии. Обработка металлов методами импульсного нагружения обладает рядом преимуществ по сравнению со статическими способами, позволяя отказаться от использования крупногабаритного и дорогостоящего оборудования, повысить производительность процесса и т. д. Процесс высокоскоростной деформации по сравнению со статическим обладает рядом особенностей, определяемых ударно-волновым характером нагружения. При разработке технологических параметров динамического прессования некомпактных материалов следует обеспечить режим нагружения, позволяющий получить заготовку с заданными свойствами. Необходимо исследовать влияние на процесс нагружения таких параметров как размеры и исходная пористость заготовки, давление и температура на фронте ударной волны, массовая скорость вещества, изменение предела текучести материала и его структуры в процессе деформации, трение заготовки об инструмент и т. д. [1]. Более подробно классификацию задач, решаемых при исследовании процессов динамического прессования можно найти в [2].

В случае химических и фазовых превращений процесс уплотнения сопровождается схлопыванием пор и интенсивным перемешиванием компонентов, трением на поверхности частиц и их деформацией. Это резко активизирует процессы структурной перестройки, коэф-

фициенты диффузии увеличиваются на несколько порядков, возрастает скорость химических и фазовых превращений. Различные процессы и их стадии требуют различного времени для своего развития, поэтому за короткие времена, характерные для взрывного нагружения, подобно тепловой инерции, не все процессы успевают развиться и вещество реагирует на нагрузку совсем иначе, чем при квазистатическом режиме.

Источником энергии при импульсном прессовании являются взрыв заряда взрывчатого вещества, энергия электрического разряда в жидкости, импульсное магнитное поле, сжатый газ, вибрация. В зависимости от источника энергии прессование называют взрывным, электрогидравлическим, электромагнитным, пневмомеханическим, вибрационным.

Передача давления на прессуемый порошок также может осуществляться различными способами: непосредственно от источника энергии, а также через промежуточную среду или тело. Во втором случае в качестве среды, передающей давление, часто используется жидкость, и прессование называют гидродинамическим. Наконец, давление может также передаваться и через твердое тело – например тонкую пластину, разгоняемую энергией взрыва. Отдельно следует выделить прессование на специальных установках типа «копр» массивным ударником, приводимым в движение с помощью порохов, сжатых газов и т. д. Более полный обзор и классификация методов импульсного прессования представлены в работе [3].

Уплотнение при импульсном прессовании, в отличие, например, от изостатического, не происходит одновременно по всему объему. По порошку перемещается ударная волна сжатия, при прохождении волны происходит локальный разогрев частиц порошка (иногда до точки плавления), происходит его частичное спекание [4]. Это облегчает процесс деформирования, позволяя обеспечить большее уплотнение, чем при статическом прессовании. В результате импульсного прессования плотность распределена в заготовке более равномерно, чем после статического [1]. При этом появляются сложности, связанные с необходимостью достижения высоких энергий и сложностью управления процессом на таких скоростях. Динамическая нагрузка может привести к нарушению сплошности порошковой заготовки [1, 5].

Сложность и многообразие происходящих при импульсном нагружении процессов обусловили в последние десятилетия значительное количество публикаций по данному вопросу [1, 3, 6–30]. Различные аспекты процесса ударного прессования, связанные с физико-химическими превращениями при ударе, происходящем при разогреве пористых сред, рассмотрены в работах [4, 12, 31]. Динамическое прессование используется при равноканальном угловом прессовании (РКУП) [26], используются магнитно-импульсные методы прессования порошков [11, 32–36]. Следует также упомянуть о процессе самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС). Обзор работ по этому вопросу приведен в [37]. В ряде работ рассматриваются вопросы, связанные с разрушением материалов при ударном воздействии. Предложена модель материала с градиентным изменением физико-механических свойств (в частности пористого), исследованы особенности деформирования и разрушения таких материалов под действием импульсных нагрузок, при этом рассмотрено напряженно-деформированное состояние на микроуровне [5]. Модель повреждаемой термоупруговязкопластической среды, описывающая микроразрушение структурно-неоднородного материала в процессе динамического деформирования, приведена также в работе [38].

Далее рассматриваются вопросы, связанные с определением энергосиловых параметров процесса динамического прессования некомпактных материалов, определение величины и характера распределения остаточной пористости, влияние сил трения.

2. Динамическое прессование порошкового материала в закрытой цилиндрической пресс-форме

2.1. Основные подходы при моделировании процессов динамического прессования и принятые допущения

Решение задач динамического прессования некомпактного материала предполагает исследование процесса распространения ударных волн уплотнения. Для решения таких задач есть два основных подхода. Согласно первому подходу пористый материал рассматривается как идеальная сжимаемая жидкость, при этом для исследования процесса используются уравнения газовой динамики или гидродинамики, основанные на известных соотношениях Рэнкина-Гюгонио [6, 15, 39–41], другой подход связан с применением различных теорий пластичности [14, 17, 18]. Заметим, что оба подхода имеют свои достоинства и недостатки, определяемые кроме всего прочего классом решаемых задач. Первый подход оправдан, если рассматриваются сильные ударные волны с давлениями на фронте волны существенно больше 200–300 ГПа [39]. В этом случае металл становится «текучим», проявляет свойства «псевдожидкости». Правомерность гидродинамической аналогии зависит также от свойств прессуемого материала. Неслучайно идентификация таких моделей часто выполняется на вязких пластичных материалах, таких как алюминий, медь [6, 40–43]. Наилучшие результаты применения гидродинамической аналогии достигаются при решении задач динамики грунтов [44].

В ряде случаев гидродинамическая аналогия является неудовлетворительной. Так в работе [10] представлены результаты расчетных и экспериментальных исследований ударного сжатия железного порошка продуктами детонации конденсированных взрывчатых веществ. Процесс деформирования порошка изучен с позиций механики сплошной среды. Результаты признаны приемлемыми, если не исследуются структуры полей напряжений и деформаций на микроуровне. Показано, что для принятых условий эксперимента модели идеальной сжимаемой жидкости или вязкой жидкости являются неудовлетворительными.

В последнее время развивается подход, согласно которому процессы ударного сжатия некомпактного материала рассматриваются в рамках механики гетерогенных сред [12, 45], при этом существенное внимание уделяется динамике выборки пор [17, 31, 46, 47]. Однако решаемые задачи, как правило, связаны с исследованием структуры ударных волн в двухкомпонентных средах («твердое тело–газ» или «твердое тело–жидкость»).

Важно отметить, что при математическом моделировании процессов динамического прессования, как правило, не рассматривается вопрос о характере распределения остаточной пористости по высоте заготовки, обычно она принимается постоянной [6, 9, 14, 17, 48, 49]. Между тем сложный волновой характер нагружения приводит к неравномерному распределению пористости, что подтверждается экспериментальными данными [1]. Неравномерность распределения остаточной пористости по высоте заготовки может отрицательно повлиять на потребительские свойства заготовки.

Для построения математических моделей динамического прессования используется подход, основанный на теории пластичности пористых тел. Решения, основанные на указанной теории, получены при следующих основных допущениях.

1. Изменение пористости под действием ударных волн происходит, когда вся заготовка переходит в пластическое состояние, упругими деформациями пренебрегают [14, 46].
2. Плотность среды после прохождения ударной волны остается постоянной [10, 50].
3. Эффекты, связанные с разогревом вещества, не учитываются [3, 15, 17, 18].
4. Предел текучести материала принимается по аналогии с решением квазистатической задачи [14, 17].
5. Трение в области контакта заготовки и пресс-формы не учитывается [10, 14, 17].

Относительно первых двух допущений заметим следующее. Ряд авторов считает необходимым учитывать также упругую составляющую ударной волны (упругий предвестник) [16, 39]. Необходимость учета упругой составляющей ударной волны зависит от степени сжатия пористого тела (при больших необратимых деформациях упругими можно пренебречь). Допущение 3 справедливо при не очень высоких давлениях, в десятки килобар [46]. При этом локальный разогрев вещества, вызывающий частичное спекание, можно учесть в определяющих соотношениях.

Что касается допущения 4, изменение предела текучести при динамическом нагружении является известным фактом. Сложность состоит в конкретизации зависимости. В работе [48] предлагается ввести коэффициент динамичности κ_d (отношение динамического σ_s^d и статического σ_s пределов текучести), причем его величина при взрывном прессовании является значительной, $\kappa_d \approx 3$. В работе [51] используется модель Соколовского-Малверна:

$$\sigma_s^d = \sigma_s \left\{ 1 + (\dot{\epsilon} / D)^{1/n} \right\},$$

где $\dot{\epsilon}$ – скорость деформации, а величины D и n определяются экспериментально.

В. Ф. Нестеренко в рамках построения модели деформирования гетерогенного материала при ударно-волновом нагружении предложена зависимость предела текучести от температуры в следующем виде [52]:

$$\sigma_s = \sigma_{s0} (1 - T / T_{nl}),$$

где σ_{s0} – предел текучести материала в холодном состоянии.

Автором при математическом моделировании процессов динамического прессования использованы зависимости вида:

$$\sigma_s^d = \sigma_s (1 + \lambda e^p),$$

где e^p – накопленная необратимая деформация; λ – параметр, зависящий от пористости θ .

Рассмотрим последнее допущение. При математическом моделировании процессов динамического прессования порошков принято считать, что влияние сил трения в этом случае значительно меньше, чем при статическом нагружении. Подобный вывод был сделан на основе результатов исследования процессов прессования при взрывном нагружении, при очень высоких скоростях, причем экспериментально определить влияние сил трения в этом случае очень сложно. Однако, если ударное прессование осуществляется массивным ударником (при меньшей скорости инструмента), неучет сил трения может привести к значительной ошибке. От величины коэффициента трения зависят энергосиловые параметры процесса. В моделях без трения остаточная пористость постоянна по высоте прессовки, что в той или иной степени не соответствует реальным процессам. В ряде случаев неравномерность распределения остаточной пористости по высоте заготовки может отрицательно повлиять на формирование ее поровой структуры и механические свойства.

Таким образом, при построении математических моделей процессов динамического прессования некомпактных материалов необходимо учитывать особенности ударно-волнового характера нагружения, влияние скорости нагружения на предел текучести материала, силы трения, а также совместное влияние указанных факторов, как на величину, так и на характер распределения остаточной пористости.

2.2. Решение на основе уравнения баланса энергии

В соответствии с работой [53] предположим, что пористое (пластически сжимаемое) тело, первоначально занимавшее объем с размерами h_0 и $2R_0$, подвергается ударному воздействию со стороны инструмента (ударник + пуансон), движущегося поступательно вниз со скоростью $v_h = v_h(t)$ (рис. 1). В результате происходит уменьшение высоты заготовки на величину $\Delta h = h_0 - h$, где h – текущая высота заготовки.

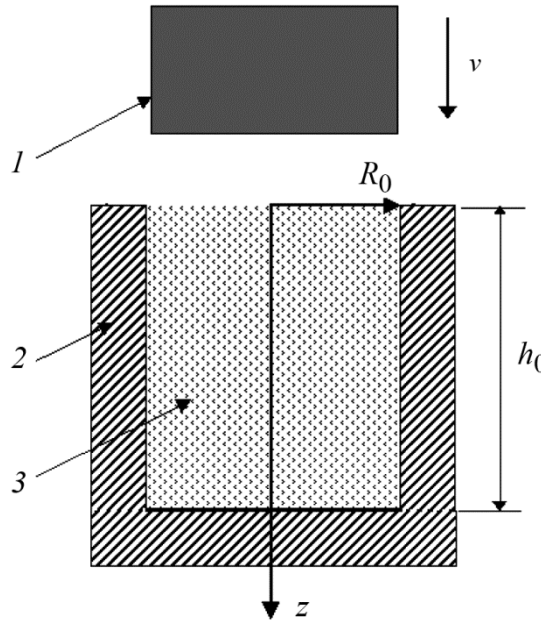


Рис. 1. Схема ударного прессования: 1 – ударник; 2 – контейнер; 3 – порошок

Примем, что на поверхности контакта заготовки с инструментом трение отсутствует, а на контакте заготовки с боковыми стенками пресс-формы действуют касательные напряжения трения τ_k , подчиняющиеся закону трения Зибеля: $\tau_k = f\tau_s^*$, где f – коэффициент пропорциональности. В силу осевой симметрии для решения задачи используем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Одновременно введем сопутствующую безразмерную систему координат: $(\tilde{r} = r/R_0, \varphi, \tilde{z} = z/h_0)$.

Кинематически допустимое поле скоростей зададим в виде:

$$v_r = v_\varphi = 0; \quad v_z = -v_h(t)\varphi(\tilde{z}, \alpha),$$

где α – варьируемый параметр, а функция $\varphi(z, \alpha)$ должна удовлетворять граничным условиям: $\varphi(0, \alpha) = 0$, $\varphi(h, \alpha) = 1$. Выберем ее в виде:

$$\varphi(\tilde{z}, \alpha) = (z/h)[1 - \alpha(1 - (z/h))] = \tilde{z}[1 - \alpha(1 - \tilde{z})].$$

Используем условие текучести эллиптического типа и определяющие соотношения для пластически сжимаемого тела [54, 55]:

$$\sigma^2 / (\sigma_s^*)^2 + \tau^2 / (\tau_s^*)^2 = 1; \quad \sigma_s^* = -(2/\sqrt{3})K_2\tau_s \ln(\eta/\theta); \quad \tau_s^* = \tau_s(1 - K_1\theta^\epsilon), \quad (1)$$

где σ, τ – первый и второй инварианты тензора напряжений соответственно; τ_s^* и σ_s^* – пределы текучести некомпактного материала на сдвиг и сжатие соответственно; τ_s – предел

текучести на сдвиг компактного материала; K, ζ, η – коэффициенты, характеризующие форму, расположение и различие в размерах пор.

Исходя из поля перемещений в соответствии с формулой получаем следующий закон распределения плотности по высоте заготовки:

$$\rho = \rho_0 / (1 - (\Delta h / h_0)(1 - \alpha + 2\alpha\tilde{z})), \quad (2)$$

где ρ – относительная плотность (плотность заготовки, отнесенная к ρ_k – плотности компактного материала); индекс «0» относится к начальному состоянию.

Из последней формулы определим диапазон допустимых значений параметра α . Полагая, что разрыхления материала в процессе прессования не происходит, получаем: $\alpha \leq 1$. Значению $\alpha \geq 0$ соответствует ситуация, когда плотность заготовки максимальна в области ее контакта с инструментом и убывает по мере удаления от указанной зоны.

Для определения энергосиловых параметров и распределения остаточной пористости по высоте заготовки запишем уравнение баланса энергии:

$$\int_{\Omega} [\pi H + \sigma_{\xi}^{\xi} + \rho_k w_z v_z] d\Omega - \int_{S_s} (\sigma_{rz} v_z)|_{r=R} dS - \int_{S_v} (\sigma_{zz} v_z)|_{z=h} dS = 0, \quad (3)$$

где S_v – поверхность, на которой заданы граничные условия в скоростях; S_s – поверхность, где задан закон трения; σ_{zz}, σ_{rz} – нормальная и касательная компоненты тензора напряжений. Формула (3) справедлива в любой фиксированный момент времени t . Выразим из (3) величину контактного давления $\sigma_{zz}|_{z=h}$. Получаем:

$$\sigma_{zz}|_{z=h} = -\frac{1}{\pi R^2 v_h(t)} \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\sigma - \frac{2}{\sqrt{3}} \tau \right) \xi + \rho_k w_z v_z \right] d\Omega - \int_{S_s} (\sigma_{rz} v_z)|_{r=R} dS \right\}. \quad (4)$$

Поскольку момент времени фиксирован, считаем, что величины $v_h(t)$ и $\dot{v}_h(t)$ известны. Следовательно, правая часть формулы (4) содержит единственный неизвестный (варьируемый) параметр α . Чтобы определить в каждый фиксированный момент времени величину давления необходимо минимизировать выражение в правой части формулы (4) относительно варьируемого параметра α , при этом должно выполняться ограничение $\alpha \leq 1$. Решение построим следующим образом. Задаем малое перемещение Δh . По формуле (2) находим распределение плотности по высоте заготовки, которое будет начальным для следующего шага по времени (изменению Δh). Для определения значений скорости $v_h(t)$ и ускорения $\dot{v}_h(t)$, являющихся функциями времени, используем условие:

$$M_u \dot{v}_z|_{z=h} = \int_{S_v} \sigma_{zz}|_{z=h} dS, \quad (5)$$

где M_u – масса инструмента (полагаем $M_u \gg m$, где m – масса заготовки). Производную по времени в левой части (5) перепишем следующим образом: $dv_z(t)/dt = [dv_z(t)/dh][dh/dt]$. На контакте заготовки с инструментом $v_z|_{z=h} = -v_h(t)\tilde{z}[1 - \alpha(1 - \tilde{z})]|_{\tilde{z}=1} = -v_h(t)$, и ввиду малости Δh можно считать, что $\Delta h \approx dh$. Получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d([v_h(t)]^2)}{dh} = \frac{2}{M_u} \pi R^2 \int \sigma_{zz|z=h} dz.$$

Отсюда для малого промежутка времени имеем:

$$v_h(t) = \sqrt{[v_h(0)]^2 - \frac{2}{K_m \rho_k \langle \rho \rangle} \left[\frac{\sigma_{zz|z=h}(t) + \sigma_{zz|z=h}(0)}{2} \right] \frac{\Delta h}{h}}, \quad (6)$$

где перемещение Δh соответствует моменту времени t ; $K_m = M_u / m$.

Для данного шага с малым перемещением Δh известны все необходимые параметры (распределение плотности по высоте заготовки, поле напряжений, скорость перемещения инструмента). Задаем новое малое перемещение Δh_1 ; по известной скорости $v_h(t)$ к началу нового шага определяем величину ускорения $\dot{v}_h(t)$ и снова повторяем процедуру расчета. В качестве начального распределения плотности принимаем то, которое получено в конце предыдущего шага. Расчет продолжается, пока скорость $v_h(t)$ не станет достаточно малой.

Проверка адекватности модели путем сравнения расчетных и экспериментальных данных показала удовлетворительное количественное и качественное совпадение результатов [53].

Рассмотрим, как влияют на остаточную пористость заготовок коэффициент трения f и начальная скорость пуансона $v_h(0)$. Скорость $v_h(0)$ варьировали в диапазоне 7,5–120 м/с при условии постоянства сообщаемой заготовке кинетической энергии $E_k = \frac{M_u}{2} [v_h(0)]^2$.

В качестве материала выбрана титановая губка: $\rho_k = 4500 \text{ кг/м}^3$; $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s = 250 \text{ МПа}$ (σ_s – предел текучести на одноосное растяжение/сжатие компактного материала) [56].

Результаты расчета средней остаточной пористости заготовок $\tilde{\theta}$ и ее изменения по высоте $\Delta \theta$ представлены на рис. 2 а и рис. 2 б соответственно. Отметим, что при высоких начальных скоростях инструмента неравномерность распределения остаточной пористости по высоте возрастает. Ее величина может достигать $\Delta \theta = 0,06 \div 0,08$ [53].

На рис. 2 в и рис. 2 г приведены результаты расчета ударного прессования заготовок до достижения средней остаточной пористости $\tilde{\theta} \approx 0,1$. Брикеты такой пористости можно использовать в качестве заготовок для последующего выдавливания прутков. Расчеты выполнены при начальной скорости инструмента $v_h(0) \in [120; 135] \text{ м/с}$. Варьировали величину коэффициента трения f и отношение начальных размеров заготовки h_0 / R_0 . Начальная пористость $\theta_0 \approx 0,7$ (состояние свободной насыпки). На рис. 2 в приведена зависимость от величин f и h_0 / R_0 безразмерной энергии деформации \tilde{E} (относительно энергии деформации процесса с минимальной начальной скоростью инструмента при отсутствии трения).

Из рис. 2 б и 2 г следует, что остаточная пористость может быть распределена существенно неравномерно по высоте заготовки. На рис. 3 показан характер изменения этой неравномерности в процессе деформирования.

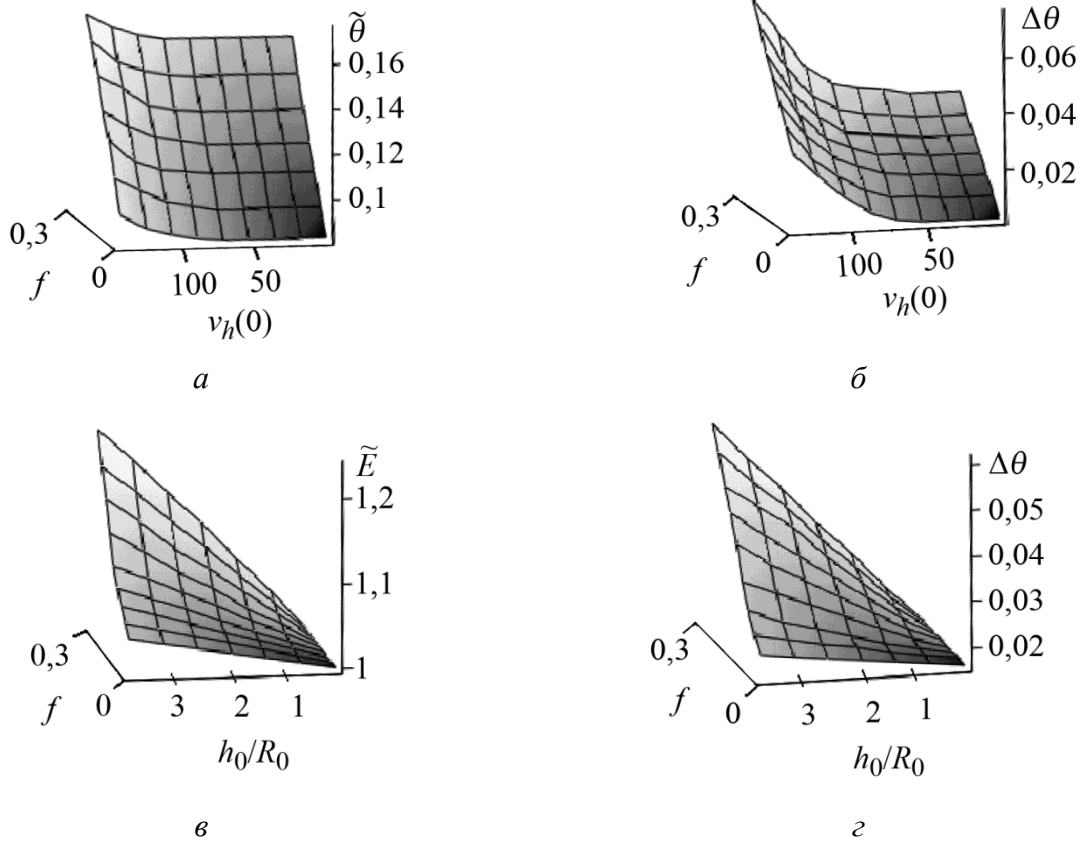


Рис. 2. Графики для оценки остаточной пористости заготовок, неравномерности ее распределения по высоте и энергии деформации

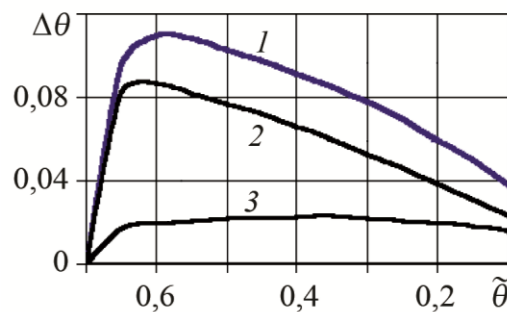


Рис. 3. Характер изменения неравномерности распределения пористости по высоте заготовки:
1 – $v_h(0)=125$ м/с , $f = 0,3$; 2 – $v_h(0)=125$ м/с , $f = 0$; 3 – $v_h(0)=8$ м/с , $f = 0,3$

При малой начальной скорости и отсутствии трения процесс близок к квазистатическому, изменение пористости по высоте не превышает 0,005. При состояниях, близких к беспористому, плотность по высоте распределена достаточно равномерно. Для заготовок с малой остаточной пористостью ($\tilde{\theta} \leq 0,05$) этот факт легко объяснить исходя из результатов, представленных на рис. 3. Однако, если остаточная пористость не слишком мала и трение значительно, ее распределение по высоте может оказаться существенно неравномерным (рис. 2 б, з). Это следует учитывать в частности при оценке потребительских свойств полученных заготовок.

2.3. Волновое решение

Решение, представленное выше, количественно верно описывает энергосиловые параметры процесса динамического прессования. Однако оно имеет недостаток, заключающийся в том, что при отсутствии трения распределение пористости по высоте получается практически равномерным (при малых и умеренных скоростях инструмента), а при высоких скоростях и наличии трения более плотными всегда оказываются слои, непосредственно прилегающие к инструменту, что не соответствует реальным процессам.

Ниже в соответствии с [57] приведена математическая постановка решения задачи прессования в замкнутой пресс-форме, основанная на волновом представлении процесса. Рассмотрены случаи, когда давление на заготовку передается посредством массивного ударника, приводимого в движение, например, гидросистемой пресса, или же тонкой пластины, движущейся за счет использования энергии взрывчатых веществ.

Решение задачи динамического прессования порошков предполагает исследование процесса распространения ударных волн уплотнения. В этом случае происходящие под действием ударных волн необратимые изменения объема в материале рассматриваются на основе общих уравнений сохранения массы, количества движения и энергии, записанных для поверхности разрыва [50]. В соответствии с подходом, который принят за основу в представленном ниже решении, процессы ударно-волнового сжатия некомпактного материала рассматриваются в рамках механики гетерогенных сред [45].

Расчетная схема процесса соответствует рис. 1. Примем следующие допущения:

- 1) В исходном состоянии среда однородна, плотность постоянна.
- 2) Изменение плотности под действием ударных волн происходит, когда вся заготовка переходит в пластическое состояние, упругими деформациями пренебрегаем.
- 3) Пластические деформации локализованы на фронте ударной волны, за и перед фронтом ударной волны среда ведет себя как твердое тело.
- 4) Эффекты, связанные с разогревом вещества не учитываются.

Относительно правомерности 2-го и 3-го допущения заметим следующее. Известно, что заметное изменение пористости под действием ударных волн происходит, когда вся масса вещества переходит в пластическое состояние [18, 46], поэтому упругими деформациями в данном случае можно пренебречь. Кроме того, в работах ряда авторов отмечено, что плотность среды после прохождения волны уплотнения меняется незначительно. Например, для грунтов при высоких давлениях [50], для порошков при динамическом прессовании [10] и результаты работы [49] по динамическому сжатию наноразмерных порошков). Допущение 4 справедливо при не слишком высоких давлениях, порядка десятков килобар [39, 46].

Указанные допущения позволяют искать решение в аналитическом виде и одновременно учесть характерные особенности, связанные с динамикой процесса.

Рассмотрим процесс распространения ударной волны в идеальном пластически сжимаемом материале. Для любой точки среды в области непрерывных движений справедливы дифференциальные уравнения движения:

$$\sigma_{ji,j} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_{i,j} v_j. \quad (7)$$

Поскольку $v_z = const$ (допущение 2), проинтегрируем уравнение (7) по координате "z". Без трения с учетом закона сохранения массы $\int_{\Omega} \rho d\Omega = const$ имеем:

$$\sigma_{zz} = \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} z - p(t), \quad (8)$$

где $p(t) = -\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0}$ – давление в зоне контакта порошка и инструмента.

Координаты точек, принадлежащих ударной волне, являются функциями времени. Обозначим их $z = \varphi(t)$. Известные соотношения на ударной волне имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho\{v - \dot{\varphi}(t)\} &= -\rho_0 \dot{\varphi}(t) \\ \sigma_{zz} - \sigma_{zz}(\rho_0) &= \rho\{v - \dot{\varphi}(t)\}v = -\rho_0 \dot{\varphi}(t)v \end{aligned} \quad (9)$$

где $(\sigma_{zz}(\rho_0))$ – напряжение в упругой волне, соответствующее переходу среды в пластическое состояние при плотности ρ_0 , $(\dot{}) = \partial/\partial t$.

С учетом закона движения инструмента в виде (5) $p(t) = -M_u v' / S$. Обозначив $A = M_u / [(1 - \theta_0)\rho_k S]$ и $B = \sigma_{zz}(\theta_0) / [(1 - \theta_0)\rho_k]$, где S – площадь поперечного сечения заготовки, имеем:

$$Av' = -\{\varphi(t)v\}' + B. \quad (10)$$

Далее получаем выражение для массовой скорости:

$$v = (Av_0 + Bt) / (A + \varphi(t)). \quad (11)$$

Уравнение ударной волны записываем следующим образом:

$$\varphi(t) = A\beta\tilde{t} / (v_0 - \beta\tilde{t}),$$

где $\tilde{t} = t/t_g$, t_g – время распространения пластической ударной волны по частицам среды; $t_g = -Av_0 / B$.

При этом скорость распространения ее фронта равна [57]:

$$\dot{\varphi}(t) = -B\beta / (v_0 - \beta\tilde{t})^2, \quad (12)$$

где $\beta = -\dot{\varphi}(0)(v_0)^2 / B$.

Плотность при прохождении ударной волны определяем в виде:

$$\rho = \rho_0 \frac{\dot{\varphi}(0)(v_0)^2}{\dot{\varphi}(0)(v_0)^2 - \left(1 + B \frac{\varphi(t)}{(A + \varphi(t))\dot{\varphi}(0)v_0}\right) \left(\frac{Av_0}{A + \varphi(t)}\right)^3}. \quad (13)$$

Выражение, учитывающее неравномерность остаточной пористости при импульсном пресовании приведено также в работе [1]. Оно получено в предположении линейной связи между скоростью фронта ударной волны и массовой скоростью вещества. Недостаток такого подхода отмечен выше. Кроме того, не приведены результаты конкретного применения зависимости.

В рамках построенной модели можно учесть влияние сил трения. Предположим, что на контакте с боковыми стенками контейнера действуют касательные напряжения трения σ_{rz} , подчиняющиеся закону трения Зибеля. Зададим их в виде $\sigma_{rz} = -f\tau_s^*(r/R)$. Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\sigma_{zz} - \frac{2f}{R} \int_0^z \tau_s^* dz = \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} z - p(t). \quad (14)$$

Введем величину $B^* = B - \frac{2f}{R} \int_0^z \tau_s^* dz / \{(1 - \theta_0) \rho_\kappa\}$ и, считая B^* некоторой неизвестной

постоянной, формально повторим все предыдущие выкладки. Поскольку $\tau_s^* = \tau_s^*(\theta) = \tau_s^*(\rho)$, подставив в (13) B^* вместо B , получим в неявном виде уравнение для определения плотности на ударной волне. При этом если двигаться по координате z с малым шагом Δh , то распределение плотности можно на каждом шаге считать линейным и тогда выражение $\int_0^z \tau_s^* dz$

интегрируется в квадратурах. При отражении волны процедура расчета будет аналогична описанной ранее для случая без трения, только вместо уравнения (8) используем уравнение (14).

Рассмотрим случай, когда начальная плотность распределена неравномерно по высоте заготовки. В этом случае в правой части выражения (14) плотность ρ должна быть внесена под знак интеграла:

$$\sigma_{zz} - \frac{2f}{R} \int_0^z \tau_s^* dz = \frac{\partial v_z}{\partial t} \int_0^z \rho dz - p(t). \quad (15)$$

Уравнение (10) в этом случае примет вид:

$$A^* v' = -\{\varphi(t)v\}' + B^*, \quad (16)$$

где $A^* = A - (\Delta\rho / \rho_0)\varphi(t)$, $\Delta\rho = \langle\rho\rangle - \rho_0$.

Задав малый шаг Δh , повторим выкладки, подставляя вместо A величину A^* . Отсюда можно определить $\langle\rho\rangle$ и затем ρ по формуле (13).

Достоверность модели также как и ранее, проверена путем сравнения данных расчета с результатами натуральных испытаний [57].

Характер изменения средней остаточной пористости заготовки в зависимости от отношения текущей v и начальной v_0 массовой скорости инструмента для различных значений v_0 и конечной остаточной пористости $\theta = 0,01$ представлен на рис. 4. Можно видеть, что независимо от начальной скорости все кривые носят качественно схожий характер. До значения пористости $\theta \approx 0,1$ зависимость близка к линейной, затем отношение v/v_0 начинает резко уменьшаться. Очевидно, это связано с тем, что при малой пористости сопротивление порошкового материала необратимому сжатию резко возрастает.

Распределение пористости по высоте заготовки существенным образом зависит от начальной скорости и массы инструмента. Если инструментом, передающим давление, является массивный ударник и начальная скорость мала, плотность по высоте распределяется практически равномерно. Величину $A/(A + \varphi(t))$ можно представить в виде $M_u/(M_u + m(t))$, где $m(t)$ – масса части заготовки между ударником и фронтом волны. Поскольку $M_u \gg m(t)$, скорость меняется почти линейно, разница в плотности между верхним слоем порошка (область контакта с ударником) и нижней (контакт с дном контейнера) незначительна. Отраженная от донной части контейнера волна является волной сжатия, приводящей к дополнительному уплотнению заготовки, при ее движении в сторону ударника разница между плотностями верхней и нижней частями заготовки практически исчезает. Затем происходит отражение этой волны от массивного ударника и т. д. При импульсном прессовании массивным ударником, в отличие от статического, силы трения практически не меняют характер

изменения плотности по высоте, приводя только к увеличению остаточной пористости, величина которой существенно зависит от отношения h_0 / R .

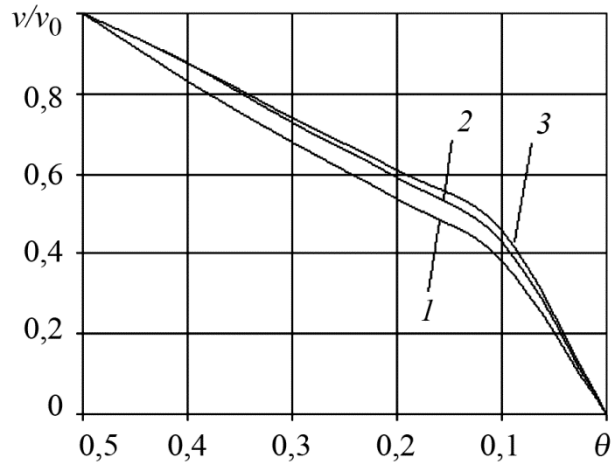


Рис. 4. Зависимость остаточной пористости заготовки от отношения текущей и начальной скорости инструмента: 1 – $v_0 = 10$ м/с; 2 – $v_0 = 100$ м/с; 3 – $v_0 = 200$ м/с

В рамках построенной модели можно также учесть скорость распространения ударных волн в порошковом материале [58].

После преобразований для скорости пластической волны имеем:

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) \frac{(A + \varphi(t))^2}{A^2} = \left(\frac{K_m h_0 + z}{K_m h_0} \right)^2. \quad (17)$$

Компонента σ_{zz} тензора напряжений имеет вид [59]:

$$\sigma_{zz} = -\sqrt{(\sigma_s^*)^2 + 4(\tau_s^*)^2} / 3. \quad (18)$$

Исключив из второй формулы (9) скорость $\dot{\varphi}(t)$ и подставляя в полученное выражение формулу (18) получим:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{3(\sigma_s^*(\rho_0))^2 + 4(\tau_s^*(\rho_0))^2} - \sqrt{3(\sigma_s^*(\rho))^2 + 4(\tau_s^*(\rho))^2} \right] = v^2 \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0 / \rho)}. \quad (19)$$

Последнее соотношение должно выполняться на ударной волне в любой момент времени, в том числе и сколь угодно близкий к начальному. Подставив в (19) значение $v = v_0$, определим плотность ρ в начальный момент времени, а из первой формулы в (9) начальную скорость пластической ударной волны $\dot{\varphi}(0)$:

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v}{(1 - \rho_0 / \rho)} = \frac{(1 - \theta_0) + \Delta\theta}{\Delta\theta}, \quad (20)$$

где $\Delta\theta$ – уменьшение пористости заготовки при прохождении фронта волны.

По описанной методике выполнены расчеты процесса динамического прессования при отношении масс инструмента и заготовки $K_m = 10^2 \div 10^4$ (или $\lg K_m = 2,0 \div 4,0$). Из фор-

мулы (4) следует, что в случае, когда масса инструмента значительно превышает массу заготовки ($K_m \gg 1$), скорость волны с течением времени меняется незначительно, поэтому при анализе результатов ограничимся величиной $\varphi'(0)$.

Начальную скорость инструмента v_0 выбирали из условия достижения величины остаточной пористости $\theta = 0,1$ и $\theta = 0,01$. Начальная пористость $\theta_0 = 0,5$. Материал некомпактный титан. В формулах (5) приняты следующие значения параметров: $K_1 = K_2 = 1,0$; $\eta = 1$, $\zeta = 2/3$, что соответствует порам изометрической формы [55].

На рис. 5 представлены результаты расчета начальных скоростей инструмента v_0 и ударной волны $\varphi'(0)$ при различной остаточной пористости θ в зависимости от $\lg K_m$. Можно отметить, что зависимости скоростей v_0 и $\varphi'(0)$ от K_m при различных θ носят схожий характер. С уменьшением величины K_m значения v_0 и $\varphi'(0)$ возрастают. При этом численно зависимость v_0 от K_m , очевидно, определяется величиной сообщаемой заготовке кинетической энергии $E = M_u (v_0)^2 / 2$ (рис. 5 а). Как показано в работе [53] значение E , необходимое для получения заготовки с одной и той же остаточной пористостью слабо меняется в диапазоне $v_0 = 7,5 \div 120$ м/с (при прочих равных условиях).

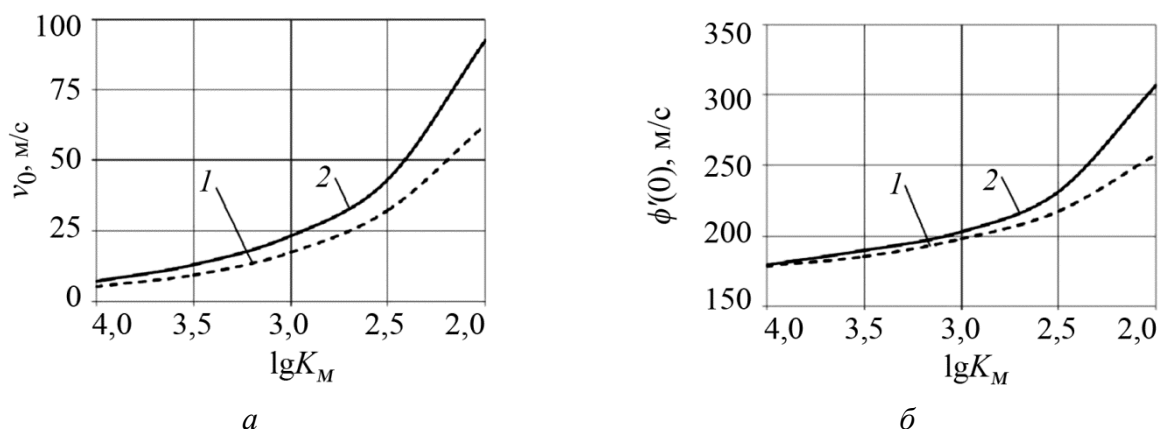


Рис. 5. Зависимость начальной скорости инструмента (а) и ударной волны (б) от K_m и θ :
1 – $\theta = 0,1$; 2 – $\theta = 0,01$

Заметим, что при одних и тех же K_m значение v_0 , необходимое для достижения пористости $\theta = 0,01$, превышает аналогичное значение v_0 для $\theta = 0,1$ в 1,35–1,4 раза практически независимо от величины K_m . Очевидно, это связано с увеличением энергии деформирования, необходимой для достижения пористости $\theta = 0,01$ вместо $\theta = 0,1$ [53].

Аналогичные значения скорости ударной волны отличаются только в 1,02–1,10 раза, возрастая с уменьшением K_m . Для того чтобы объяснить указанное обстоятельство, в соответствии с работой [57] рассмотрим, как меняется характер процесса уплотнения порошка в зависимости от K_m .

Если начальная скорость ударника мала (K_m порядка $5 \times 10^3 \div 10^4$), при прохождении по порошку волны сжатия плотность по высоте меняется мало и распределяется практически равномерно (рис. 5 а). Отраженная от донной части контейнера волна является волной сжатия, приводящей к дополнительному уплотнению заготовки. Затем происходит отражение

этой волны от массивного ударника и т.д. (процесс повторяется многократно). При этом уменьшение пористости в начальный момент прохождения ударной волны составляет, $\Delta\theta = 0,015 \div 0,05$, если остаточная пористость $\theta = 0,1$ и $\Delta\theta = 0,02 \div 0,065$ при $\theta = 0,01$ (в зависимости от K_m). Легко видеть, что увеличение скорости v_0 в 1,35–1,4 раза приводит практически к такому же увеличению выражения $[(1-\theta_0)+\Delta\theta]/\Delta\theta$, поэтому в соответствии с формулой (7) величина начальной скорости ударной волны $\phi'(0)$ практически не меняется для различных значений остаточной пористости.

С уменьшением массы инструмента и, соответственно, с увеличением v_0 изменение пористости в начальный момент прохождения ударной волны составляет $\Delta\theta = 0,09 \div 0,16$ и $\Delta\theta = 0,13 \div 0,22$ для случаев $\theta = 0,1$ и $\theta = 0,01$ соответственно, при этом различие между скоростями инструмента остается прежним, т. е. в 1,35–1,4 раза, а выражение $[(1-\theta_0)+\Delta\theta]/\Delta\theta$ возрастает в меньшей степени (формула (7)), что и объясняет полученный результат.

Зависимость отношения $\phi'(0)/v_0$ от величины K_m показана на рис. 6. Как указано в работе [5], в достаточно широком диапазоне амплитуд связь между скоростью фронта ударной волны и скоростью инструмента может быть записана в виде:

$$\phi'(t) = C + Dv, \quad (21)$$

где C, D – коэффициенты.

В работе [1] на основе результатов экспериментов по прессованию пористого титана и аппроксимации результатов получено: $C = 100$ м/с, $D = 1,44$.

Данные, представленные на рис. 5–6, также могут быть хорошо аппроксимированы зависимостью вида (8) при следующих значениях коэффициентов: $C = 170$ м/с и $D = 1,45$. При этом различие между результатами, представленными на рис. 5–6 и полученными расчетным путем, по формуле вида (8), составляет менее 0,5 %.

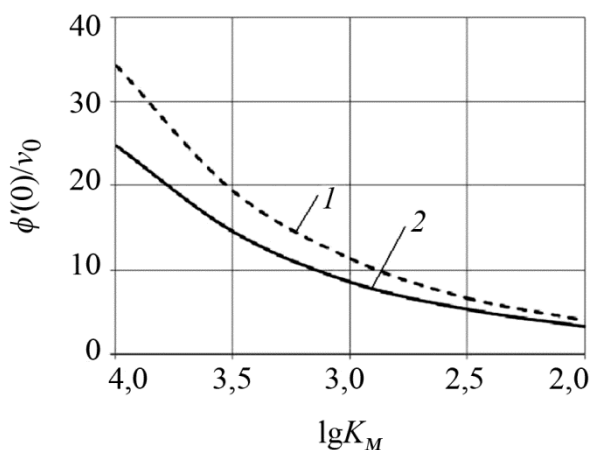


Рис. 6. Зависимость отношения скоростей $\phi'(0)/v_0$ от K_m и θ : 1 – $\theta = 0,1$; 2 – $\theta = 0,01$

Различие в значениях коэффициента C , полученных в работе [1] и данной статье может быть вызвано, прежде всего, тем, что в [1] приведены результаты экспериментальных исследований, полученные по схеме сжатия «бегущей» ударной волной (в отличие от схемы на рис. 1 фронт волны не перпендикулярен к границе раздела «инструмент–порошок»). При этом результаты получены при массовых скоростях $v_0 = 0,65 \div 1,3$ км/с, т. е. значительно превышающих значения, полученные в данной работе (рис. 5). Частично расхождение в значениях коэффициента C также может быть связано с тем обстоятельством, что авторами [1]

скорость волны определялась на основе экспериментальных данных, путем анализа рентгенограмм и выбора подходящих интерполяционных функций для вычисления скорости ударной волны и массовой скорости, т. е. с некоторой погрешностью.

С учетом вышеизложенного можно считать, что результаты расчета скорости ударной волны соответствуют реальной картине, возникающей при динамическом прессовании порошкового материала в рассматриваемом диапазоне изменения параметров K_m и v_0 .

На рис. 7 представлены результаты расчета давления p на фронте ударной волны в начальный момент времени. В качестве p в данном случае рассматривается разность между давлением за фронтом пластической ударной волны и давлением (напряжением), соответствующим переходу среды в пластическое состояние (аналогично избыточному давлению в газовой динамике). Его величина определяется с помощью второй из формул (1):

$$p = \rho_0 \phi'(t) v. \quad (22)$$

Приведены зависимости давления p от величины K_m для случаев $\theta = 0,1$ и $\theta = 0,01$ а также его зависимость от начальной скорости ударника v_0 . Видим, что максимальное значение величины p в исследуемом диапазоне изменения параметров составляет немного более 60 МПа. В работе [1] в результате обработки экспериментальных данных для определения скорости ударной волны (см. выше) с использованием закона сохранения импульса построена кривая «давление–массовая скорость» для пористого титана при $v_0 = 0,65 \div 1,3 \text{ км/с}$, причем в качестве давления на фронте ударной волны рассматривалась именно величина p (формула (9)). Экстраполяция указанной кривой на диапазон $v_0 = 0 \div 0,65 \text{ км/с}$ [1] приводит к результатам, количественно соответствующим рис. 7 б.

Полное давление на заготовку в момент начала прессования p_n определим по формуле:

$$p_n = p + |\sigma_{zz}(\rho_0)|. \quad (21)$$

В частности при начальной пористости $\theta_0 = 0,5$ принятой для расчетов с учетом формул (5) и значений, входящих в них коэффициентов, имеем $\sigma_{zz}(\rho_0) = 0,99 \tau \approx 140 \text{ МПа}$.

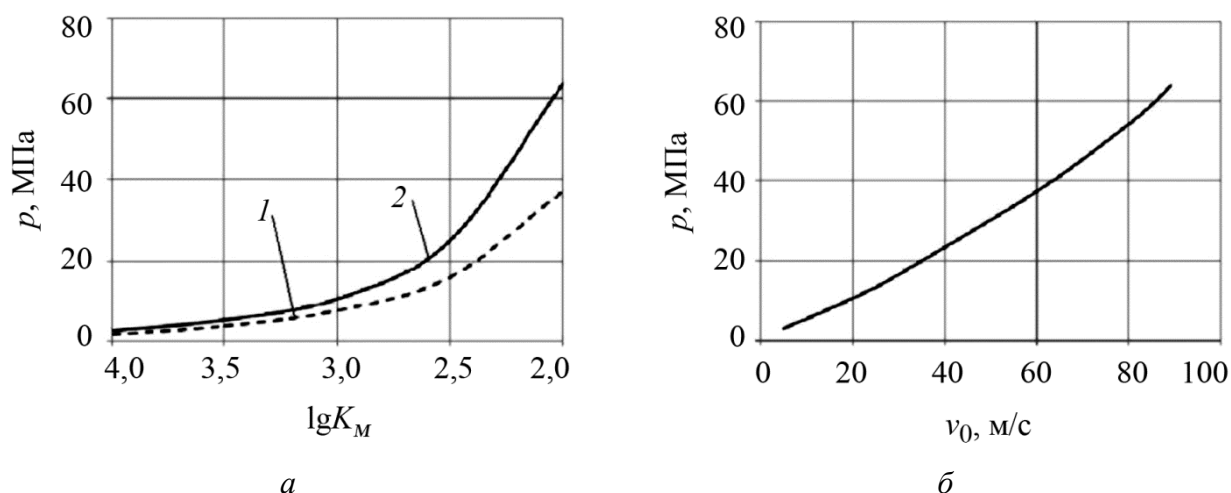


Рис. 7. Зависимость давления на фронте волны от K_m и θ (а) и v_0 (б):

1 – $\theta = 0,1$; 2 – $\theta = 0,01$

2.4. Компьютерное моделирование процессов динамического прессования некомпактных материалов

Для компьютерного моделирования процессов динамического прессования некомпактных материалов разработан программный комплекс DSPressing (Dynamic Shock-wave Pressing), реализованный в среде программирования Microsoft Visual C++. Приведем краткое описание пакета на примере модуля, реализующего процесс прессования в замкнутой цилиндрической пресс-форме. Головное окно программы показано на рис. 8. Оно обеспечивает доступ к информационному и расчетному блокам программы.

На рис. 9 представлено информационное окно программы, позволяющее обеспечить доступ к справочным материалам. С помощью кнопки «Справка» можно ознакомиться с математической постановкой задачи динамического прессования (файл в формате Microsoft Word). Работу других двух кнопок иллюстрируют рис. 10 и 11. На рис. 10 представлено окно программы, иллюстрирующее схему процесса динамического прессования, на рис. 11 – пример экранного меню с элементами панели управления.

Указанное меню используется в рабочем окне программы, представленном на рис. 12. Оно содержит 3 области. В основной части представлена графическая модель процесса, область слева предназначена для вывода на экран графиков. Верхний график показывает изменение средней остаточной пористости заготовки в зависимости от скорости инструмента. На нижнем графике показано распределение остаточной пористости по высоте заготовки. В нижней части окна приведены значения исходных данных. Пользователь может изменять размеры областей или их отключать. Предусмотрено управление цветом фона каждой области и графиков, а также инструмента и заготовки (рис. 12). Для ввода исходных данных в программе имеются отдельные окна, вызов которых осуществляется посредством меню.

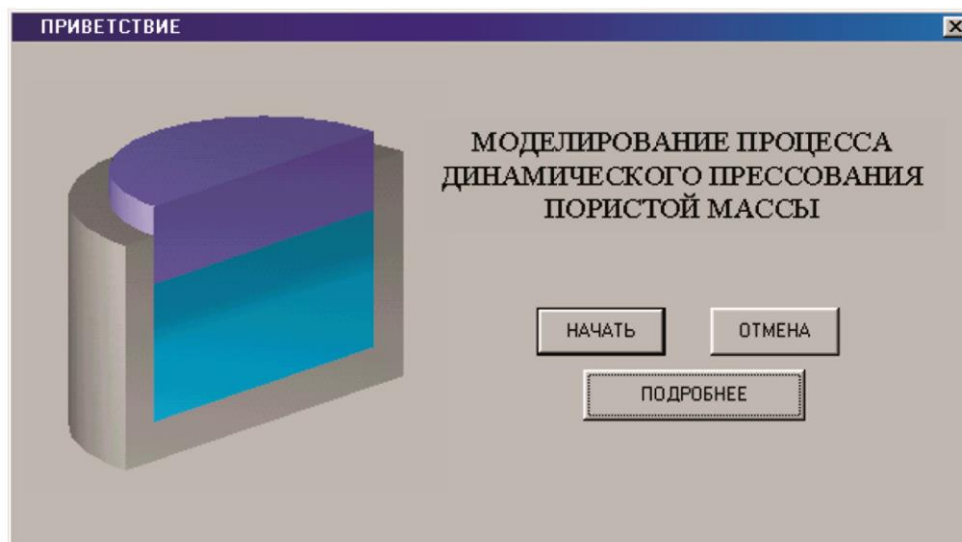


Рис. 8. Головное окно программы DSPressing

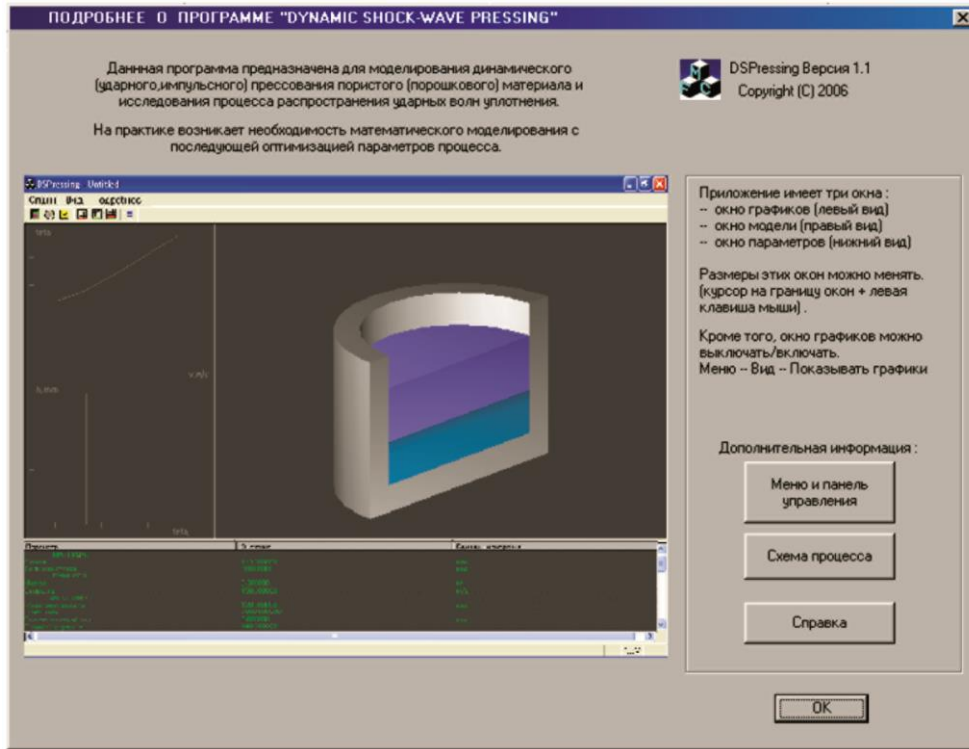


Рис. 9. Информационное окно программы DSPressing

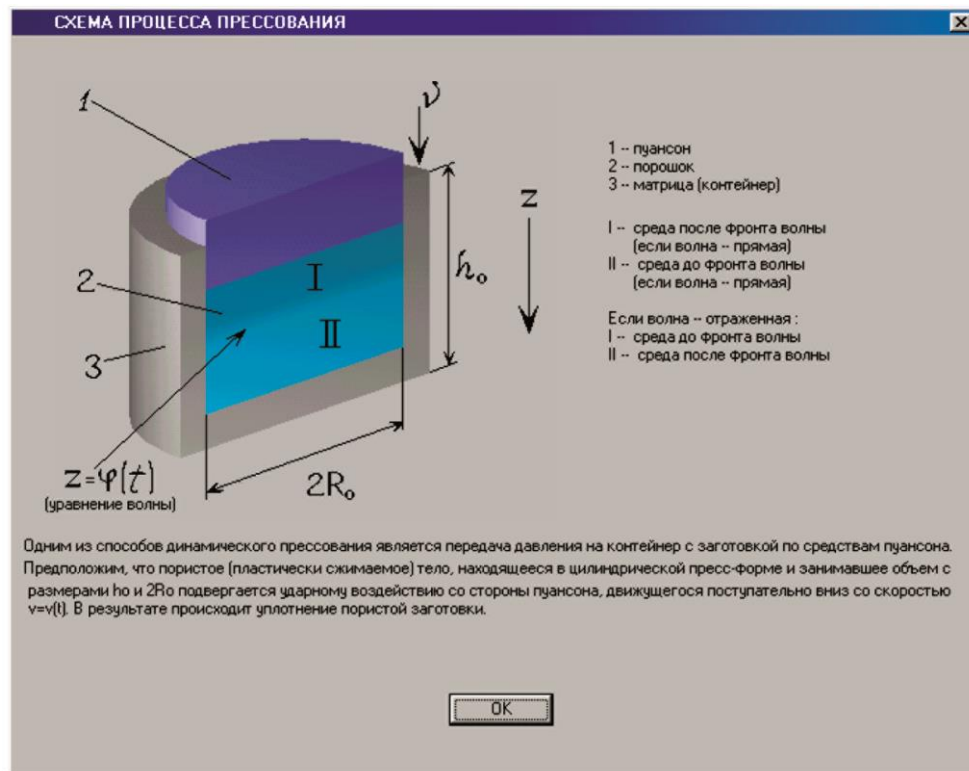


Рис. 10. Описание схемы процесса

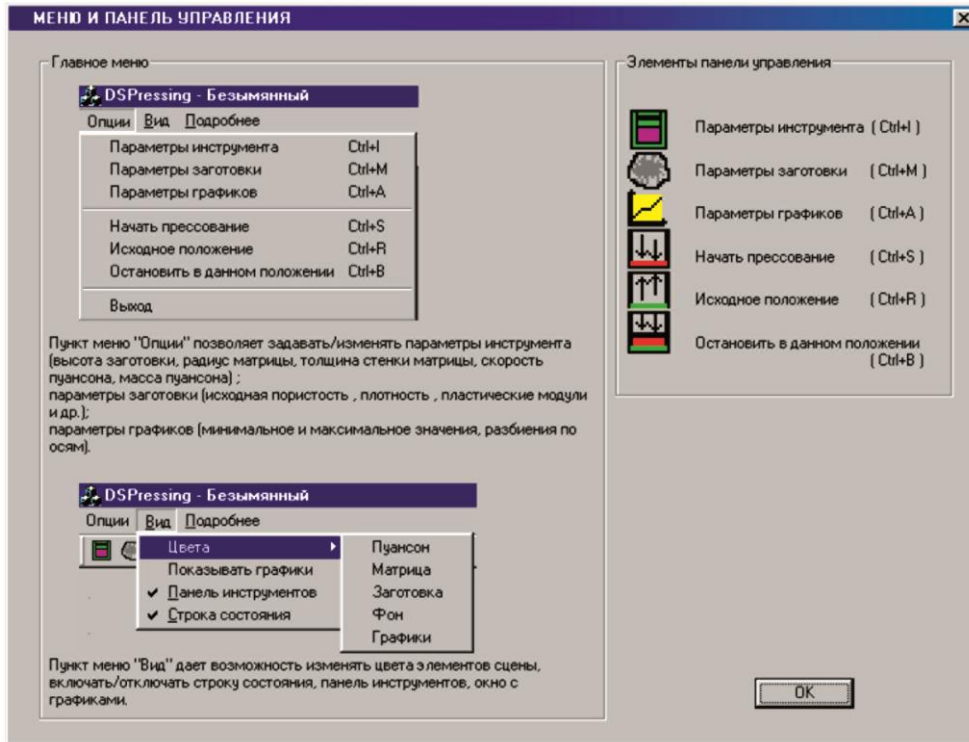


Рис. 11. Описание меню и панели управления программы DSPressing

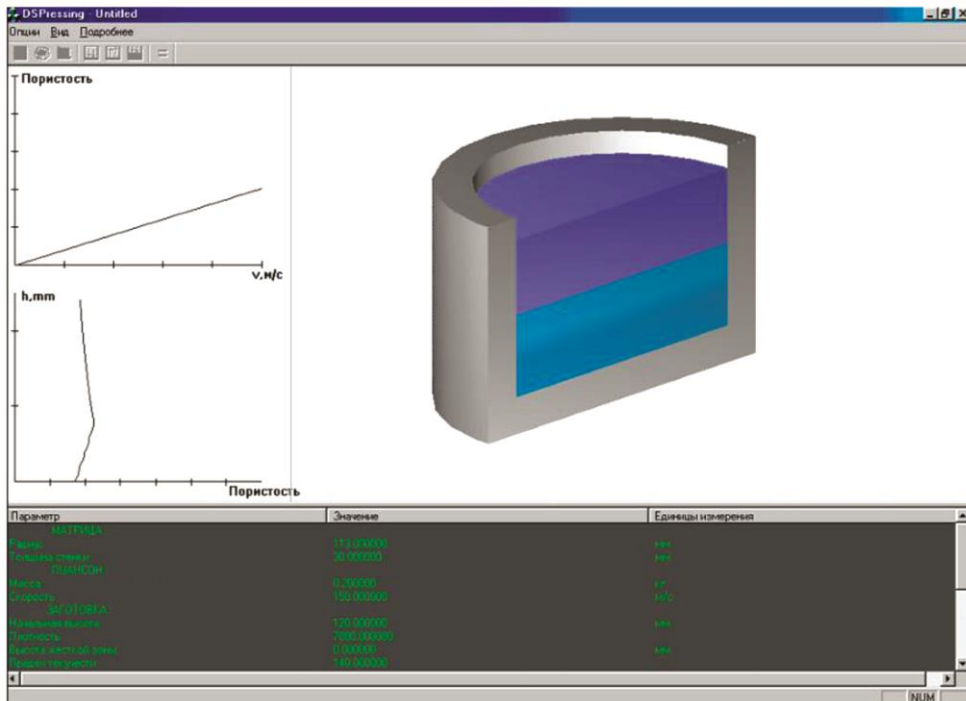


Рис. 12. Рабочее окно программы DSPressing

Программа позволяет выполнить расчет с одновременным замедленным просмотром процесса распространения ударной волны, графически отображает изменение во времени параметров процесса (скорость волны, изменение плотности на ее фронте; рис. 12).

3. Ударное выдавливание заготовки через коническую матрицу

3.1. Ударное выдавливание несжимаемого материала

Раздел посвящен исследованию энергосиловых параметров процесса ударного выдавливания через коническую матрицу. Ставится задача определения минимально необходимой начальной скорости инструмента, для которой при заданном соотношении масс заготовки и инструмента может быть осуществлен процесс. При этом на величину энергии деформирования влияет трение заготовки о стенки контейнера и вытяжка. Для решения задачи используем подход работы [61]. Запишем уравнение баланса энергии:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij} \xi_{ij} + \rho w v] d\Omega - \int_{S_s} (\sigma_{rz} v_z)|_{r=R} dS - \int_{S_v} (\sigma_{zz} v_z)|_{z=-L} dS = 0. \quad (24)$$

Очевидно, формула (24) справедлива в любой фиксированный момент времени t .

Для определения величин, входящих в два первых интеграла, используем решение, полученное в работе [61]. Схема процесса ударного выдавливания представлена на рис. 13.

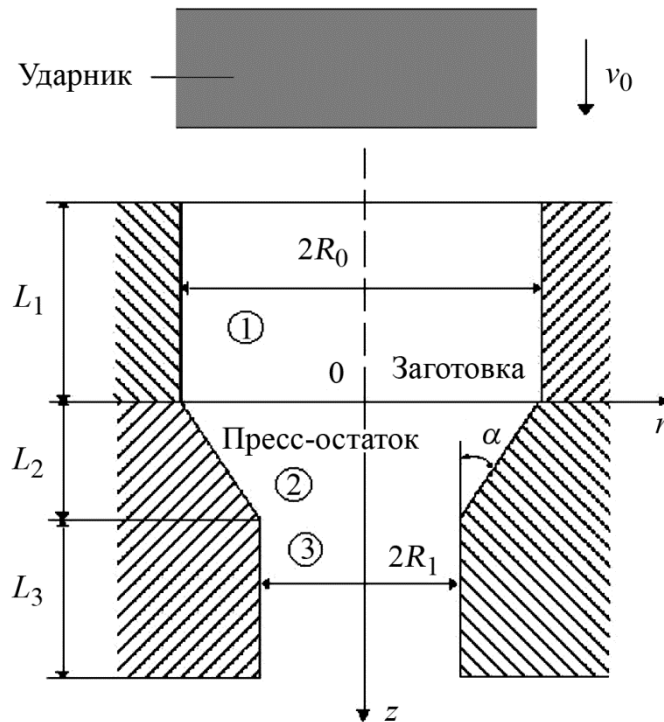


Рис. 13. Схема процесса ударного выдавливания

В области «2» деформируемые частицы при выдавливании пресс-остатка испытывают сжатие в направлении координат φ, r и растяжение вдоль оси z . В областях «1» и «3» материал движется вдоль оси z как абсолютно твердое тело. На поверхностях стыка областей «1» – «2» и «2» – «3» возможен разрыв касательной компоненты вектора скорости. Принятые допущения позволяют записать поле скоростей и компоненты тензора скоростей деформации ξ_{ij} в следующем виде:

для области 1:

$$v_1^{(\varphi)} = 0; \quad v_1^{(r)} = 0; \quad v_1^{(z)} = v_0; \quad \xi_{ij}^{(1)} = 0 \quad (i, j = r, \varphi, z); \quad H^{(1)} = 0;$$

для области 2:

$$v_2^{(r)} = -v_1 \frac{R_1^2}{R_z^3} r \operatorname{tg} \alpha; \quad v_2^{(z)} = v_1 \frac{R_1^2}{R_z^2}; \quad R_z = R_0 - z \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\xi_{r\varphi}^{(2)} = \xi_{\varphi z}^{(2)} = 0; \quad \xi_{rz}^{(2)} = -\frac{3}{2} v_1 \frac{R_1^2}{R_z^4} r \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \xi_{rr}^{(2)} = \xi_{\varphi\varphi}^{(2)} = -v_1 \frac{R_1^2}{R_z^3} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\xi_{zz}^{(2)} = 2v_1 \frac{R_1^2}{R_z^3} \operatorname{tg} \alpha; \quad H^{(2)} = 2\sqrt{3} v_1 \operatorname{tg} \alpha \frac{R_1^2}{R_z^3} \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{R_z^2} \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

для области 3:

$$v_3^{(\varphi)} = 0; \quad v_3^{(r)} = 0; \quad v_3^{(z)} = v_3 = \mu v_0; \quad \xi_{ij}^{(3)} = 0 \quad (i, j = r, \varphi, z); \quad H^{(3)} = 0.$$

После преобразований получаем [60]:

$$\dot{z}^2 = v_0^2 + \frac{2C}{B}(z + L_1) + 2\left(\frac{AC}{B^2} - \frac{D}{B}\right) \ln \frac{(A - Bz)}{(A + BL_1)}, \quad (25)$$

$$\text{где } A = \frac{\rho}{\sqrt{3}\tau_s} \left\{ R_0(\sqrt{\mu} - 1) \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} + \operatorname{ctg} \alpha \right) + (L_3 - K_m L_1) \right\}; \quad B = \frac{\rho}{\sqrt{3}\tau_s}; \quad C = \frac{2f}{\sqrt{3}R_0};$$

$$D = \frac{8}{9 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\left(1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)^{3/2} - 1 \right] \ln \mu + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha' + \frac{f}{\sqrt{3}} (\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha') \ln \mu.$$

Уравнение (25) не интегрируется в квадратурах. Поэтому определить зависимость $z = z(t)$ возможно только численно. Однако, формула (25) позволяет однозначно определить энергосиловые параметры процесса. Действительно, выдавливание (движение заготовки) будет происходить, пока выполняется условие $v > 0$. Поскольку $v = \dot{z}$, из (25) можно найти значение координаты z , при котором скорость v обращается в ноль, т. е. величину скорости ударника к моменту достижения им границы зон «1» и «2». Нас интересует скорость инструмента, позволяющая осуществить процесс ударного выдавливания. Принимая $z = 0$, запишем уравнение (25) в следующем виде:

$$v_0 = \left\{ - \left[\frac{2C}{B} L_1 + 2 \left(\frac{AC}{B^2} - \frac{D}{B} \right) \ln \left(\frac{A}{A + BL_1} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Формула (26) позволяет однозначно определить величину скорости $v_0 = v_0(A, B, C, D, L_1)$ такую, что в момент достижения ударником границы зон «1» и «2» $\dot{z} = v = 0$. Процесс выдавливания может быть осуществлен (ударник полностью пройдет зону «1») при начальной скорости $v \geq v_0(A, B, C, D, L_1)$. Таким образом, формула (26) дает возможность определить энергосиловые параметры процесса.

На рис. 14–19 представлены результаты расчета минимально необходимой скорости ударника v_0 при $L_1 = 3R_0$, $L_3 = 0,5R_0$. Механические свойства соответствуют порошку ПЖ4М2: $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$; $\tau_s = 142 \text{ МПа}$ [62] и брикету из титановой губки. Расчеты выполнены при $\alpha = 15^\circ \div 75^\circ$, $\mu \in [6; 10]$, $K_m = [100; 10000]$, $\theta = 0,01$ и различных значений безраз-

мерного параметра, характеризующего трение $\tilde{f} = (f L_1) / (\sqrt{3} R_0) \in [0; 0,6]$. Видим, что минимальное значение необходимой начальной скорости ударника существенно зависит от трения. Независимо от материала и величины K_m с увеличением трения оптимальное значение угла меняется от $\alpha \approx 25 \div 30^\circ$ для $\tilde{f} = 0,2$ до $\alpha \approx 35 \div 40^\circ$ для $\tilde{f} = 0,6$ [60].

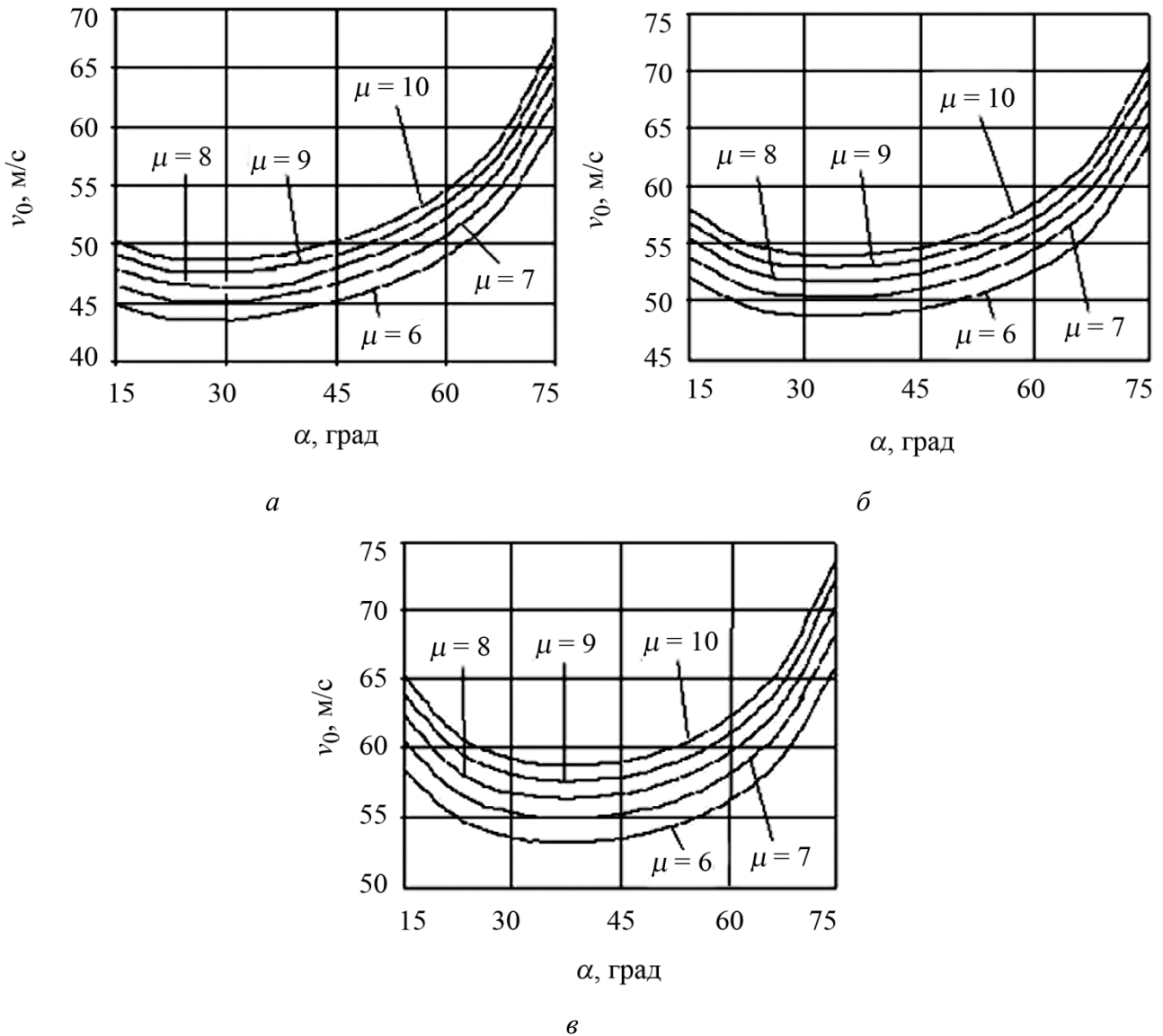


Рис. 14. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из порошка ПЖ4М2 от вытяжки, трения и α при $K_m = 100$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

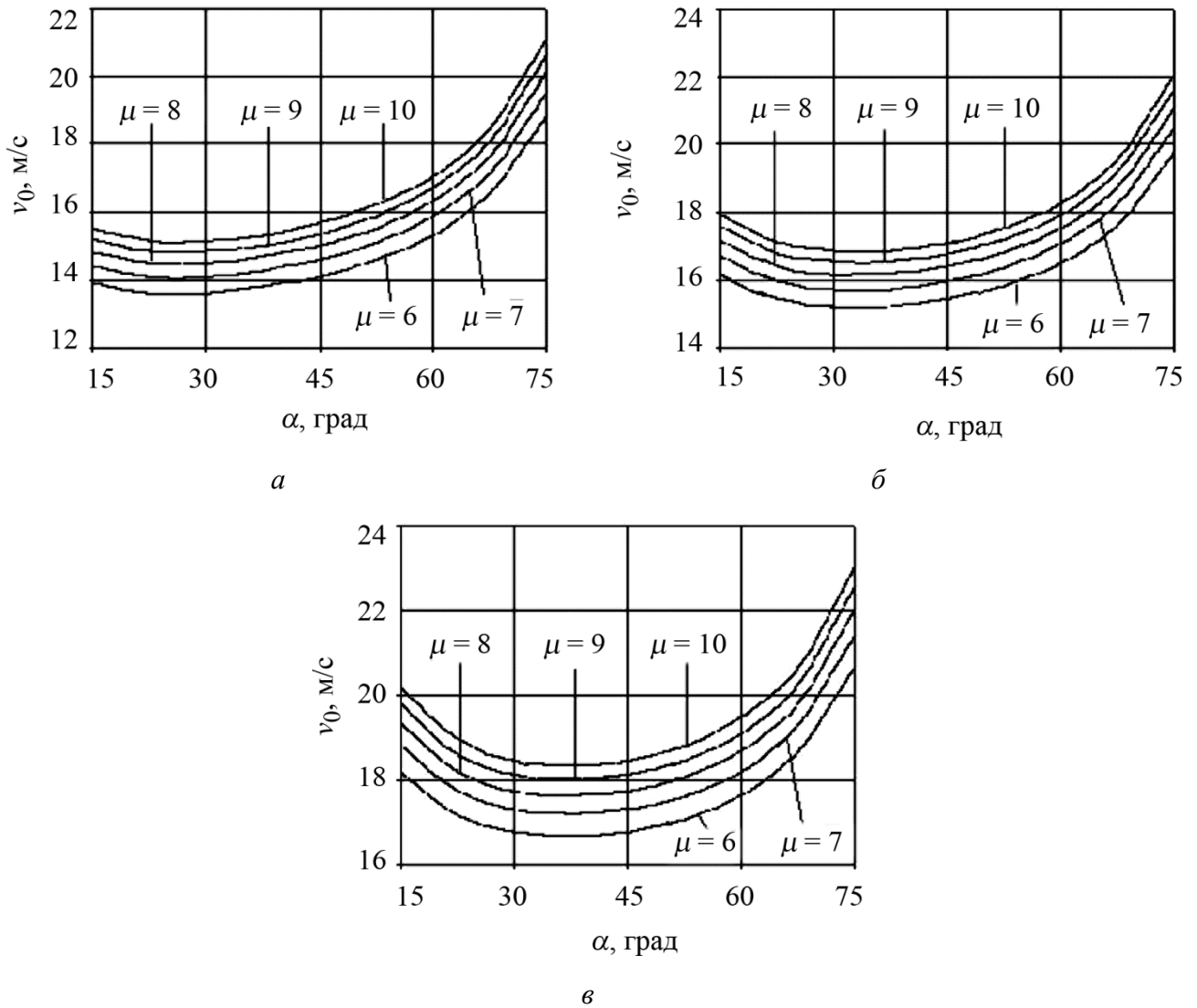


Рис. 15. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из порошка ПЖ4М2 от вытяжки, трения и α при $K_m = 1000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

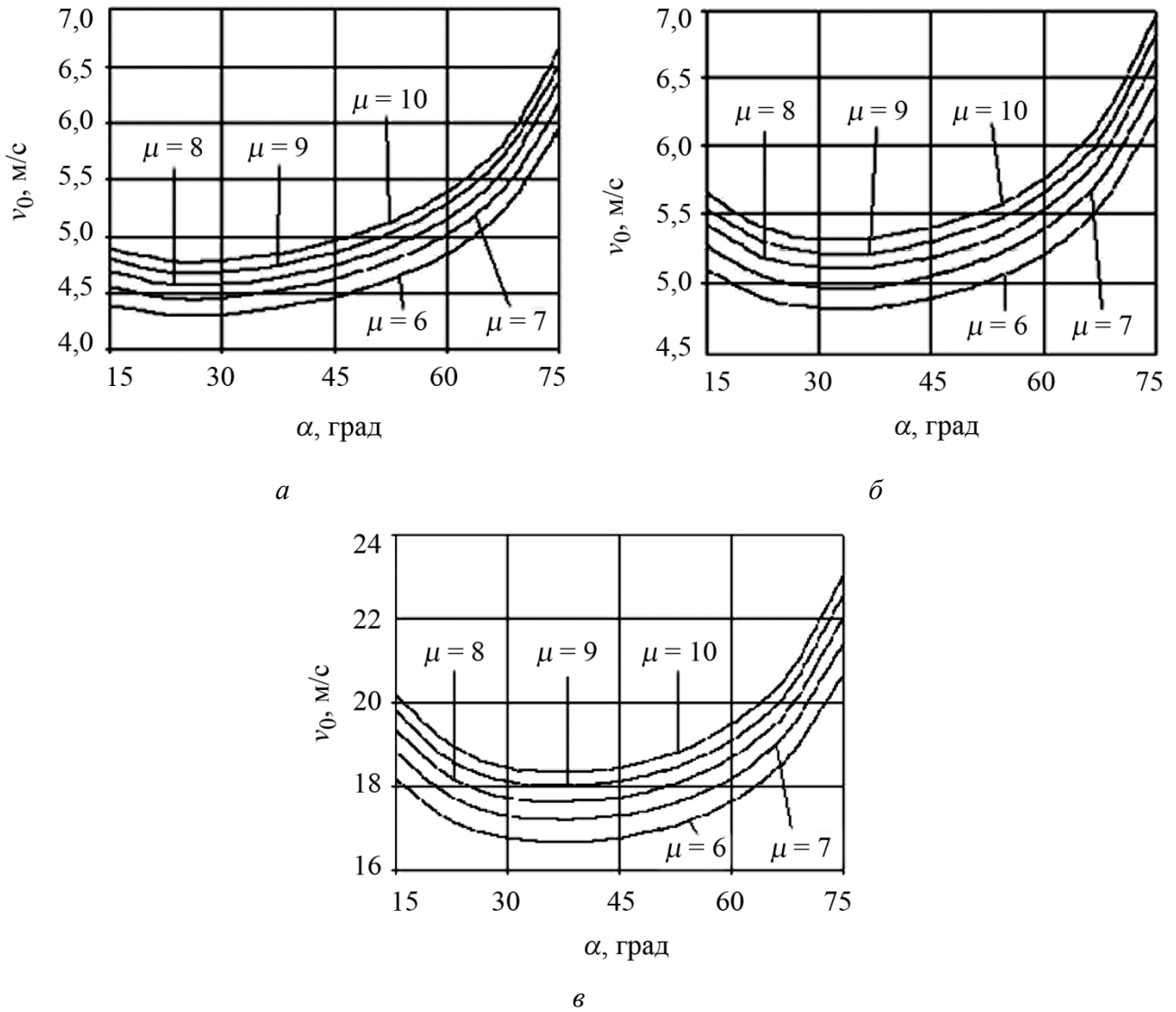


Рис. 16. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из порошка ПЖ4М2 от вытяжки, трения и α при $K_m = 10000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

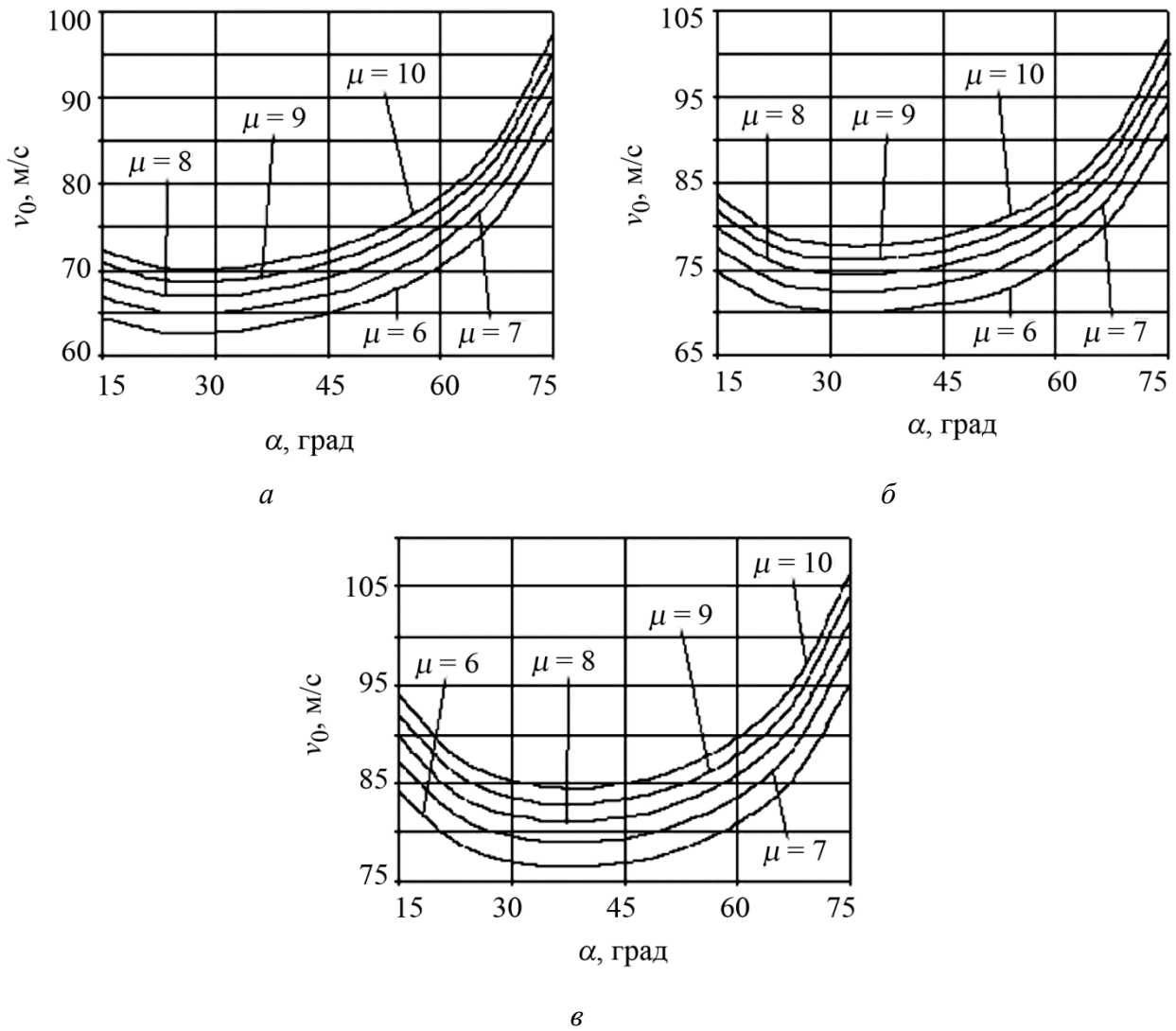


Рис. 17. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из некомпактного титана от вытяжки, трения и α при $K_m = 100$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

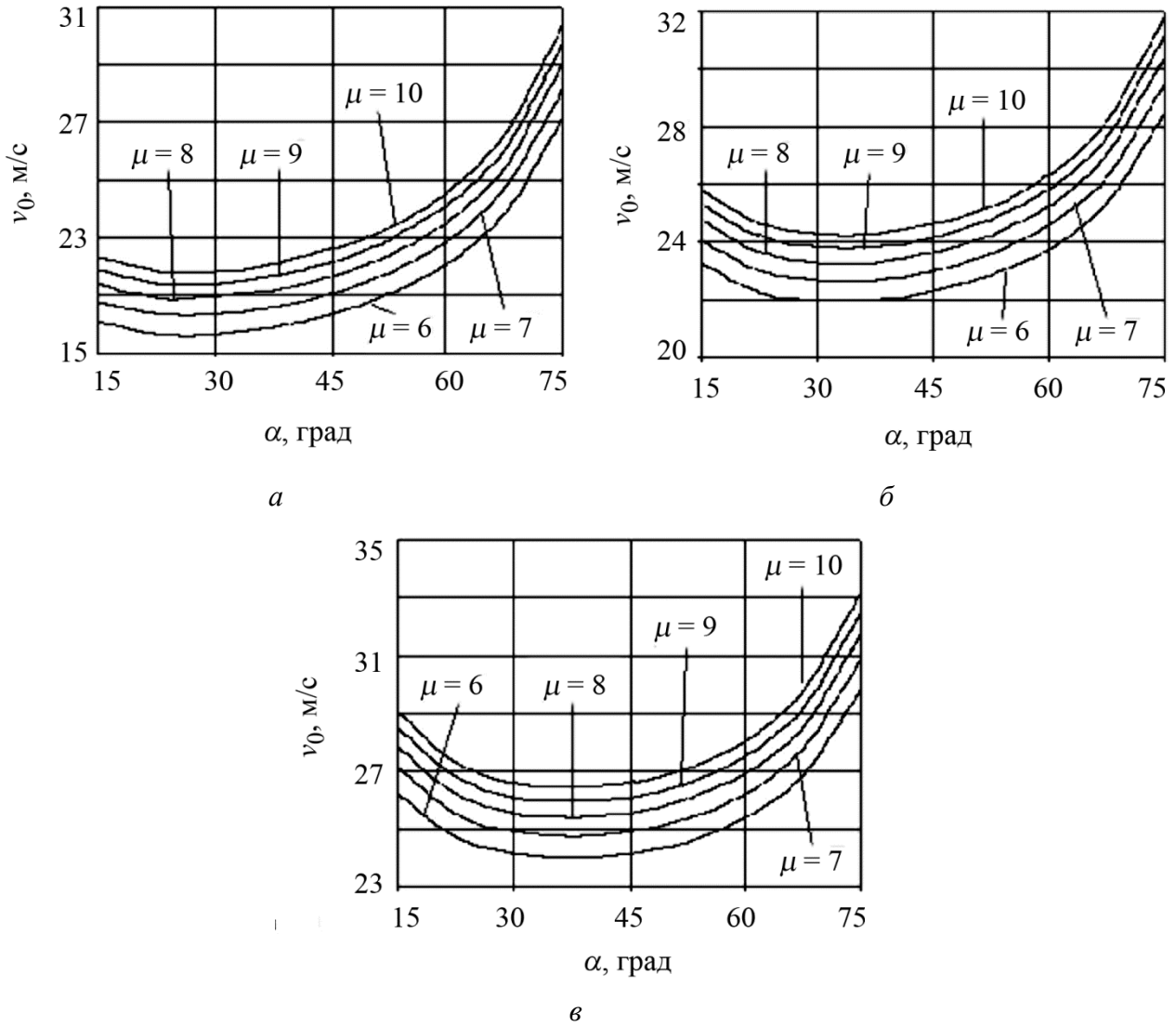


Рис. 18. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из некомпактного титана от вытяжки, трения и α при $K_m = 1000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

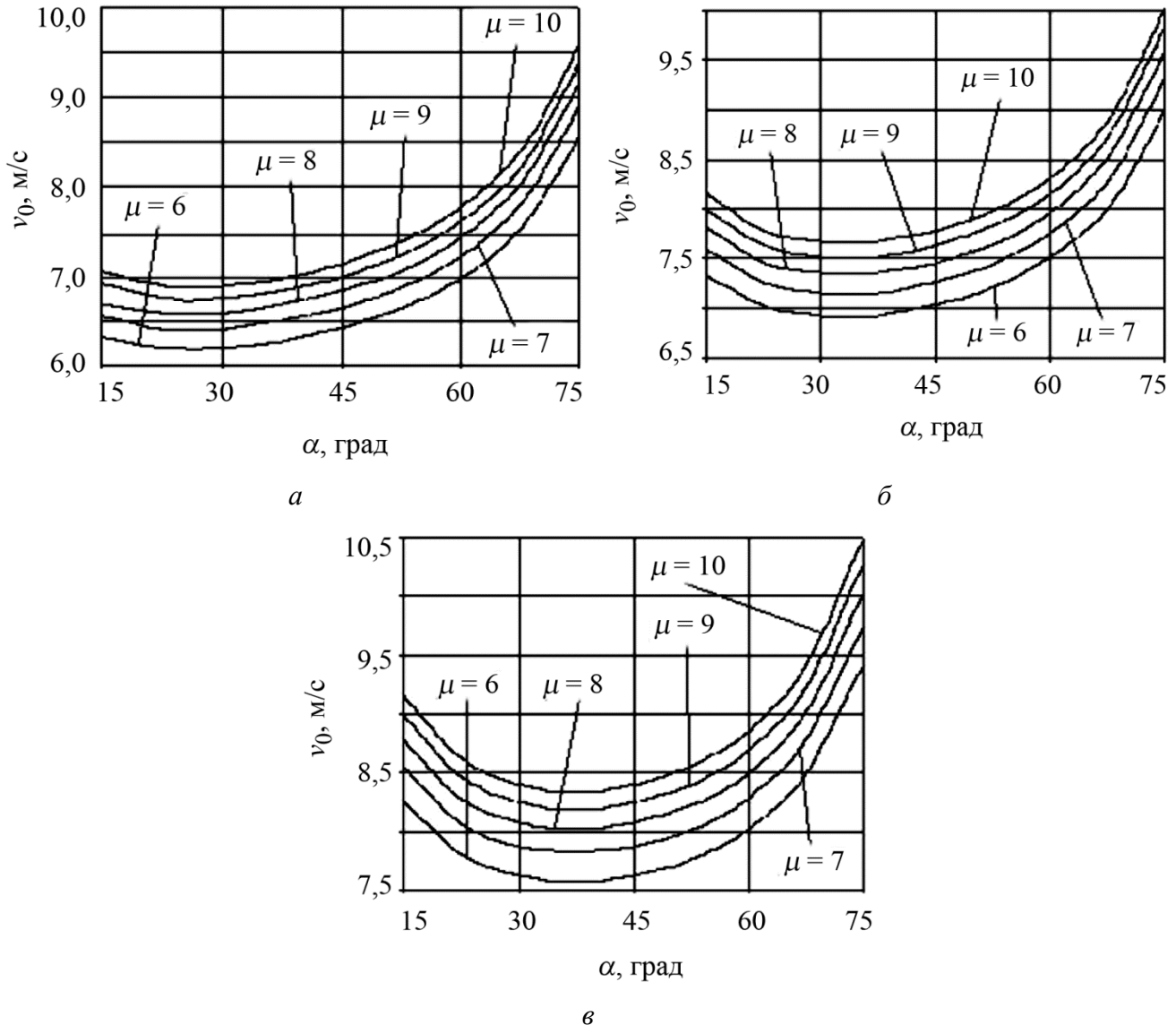


Рис. 19. Зависимости скорости v_0 , необходимой для выдавливания прутка из некомпактного титана от вытяжки, трения и α при $K_m = 10000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

Поскольку суммарное усилие выдавливания складывается из затрат на деформацию материала в очаге деформации и потерь на трение, полученный результат обусловлен перераспределением потерь на деформацию и трение (при одной и той же вытяжке длина участка, где учитывается трение, уменьшается с ростом угла α) так, чтобы сумма их была минимальна.

От вытяжки положение оптимума по скорости практически не зависит, в отличие от квазистатического случая. Действительно, в соответствии с формулами (5) и (24) давление на заготовку в данном случае линейно зависит от ускорения. Поэтому оптимальный угол определяется минимумом площади под кривой «ускорение – координата».

Данные, представленные на рис. 14–19, получены для пористости $\theta = 0,01$. Однако они могут быть использованы и при других значениях пористости. Как показали расчеты, в диапазоне изменения пористости от 0,01 до 0,10 – 0,15 связь $v_0 = v_0(\rho)$ можно считать линейной. Тогда определить величину скорости v_0 , например для заготовки пористостью $\theta = 0,1$, можно по формуле: $v_0|_{\theta=0,1} = v_0|_{\theta=0,01} * [(1-0,1)/(1-0,01)]$, где значение «1» в правой части формулы соответствует компактному материалу.

В заключение данного раздела заметим, что полученные результаты, касающиеся методики расчета энергосиловых параметров и характерных особенностей процесса ударного выдавливания могут быть применены как к макрооднородным металлическим материалам, так и к композитам. В последнем случае при расчетах необходимо использовать эффективные значения плотности и предела текучести материала.

3.2. Ударное выдавливание заготовки с учетом сжимаемости материала

Для оценки энергосиловых параметров процесса можно принять следующую приближенную схему решения [63; 64]. На первом этапе заготовка в области «1» уплотняется до плотности пресс-остатка или близкой к ней, так что в последующем разницей в плотностях можно пренебречь. При этом выдавливания не происходит. Решение этой задачи описано в разделе 2.3. Затем начинается процесс выдавливания уже при постоянной плотности в соответствии со схемой, описанной в разделе 3.1.

Рассмотрим результаты расчетов по описанной выше модели. Выбраны те же геометрические параметры и материалы что и в предыдущем разделе. Трение задано в виде безразмерного параметра $\tilde{f} \in [0,2; 0,6]$. На рис. 20–25 приведены графики изменения скорости инструмента в зависимости от пористости пресс-остатка при значении $\tilde{f} = [0,2; 0,6]$ для стадии прессования в замкнутом объеме. Указанные графики совместно с данными, приведенными на рис. 14–19, позволяют определить начальную скорость инструмента, необходимую для осуществления процесса ударного выдавливания заготовки с учетом уплотнения материала в достаточно широком диапазоне изменения параметров.

Проиллюстрируем применение введенных зависимостей на конкретном примере. Пусть исходная пористость заготовки из порошка ПЖ4М2 $\theta_0 = 0,25$; пористость пресс-остатка $\theta = 0,02$; вытяжка $\mu = 9$, угол конусности $\alpha = 30^\circ$; $K_m = 100$; $\tilde{f} = 0,6$. Определим скорость v_1 , позволяющую осуществить выдавливание. Используем кривую, соответствующую значению $\mu = 9$ на рис. 14 в. Углу $\alpha = 30^\circ$ соответствует скорость $v_0 = 58$ м/с. Далее используем графики (рис. 20 в). Пористости $\theta = 0,02$ и скорости $v_0 = 58$ м/с соответствует точка на второй сверху кривой. Находим на этой же кривой значение пористости $\theta = 0,25$. Ему соответствует скорость $v \approx 63$ м/с. Это минимальная скорость, при которой осуществимо уплотнение заготовки до пористости $\theta = 0,02$ с последующим выдавливанием.

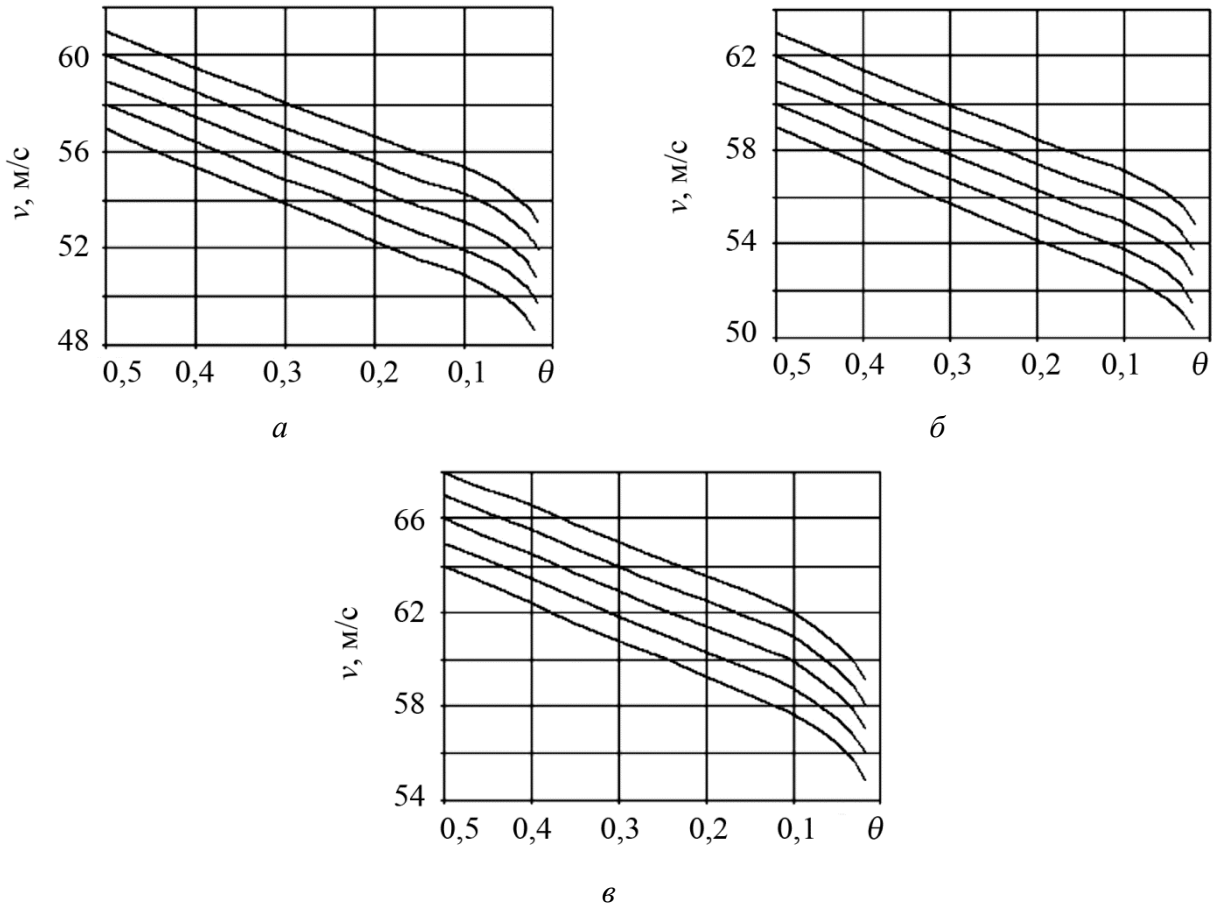


Рис. 20. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме порошка ПЖ4М2 для $K_m = 100$: $a - \tilde{f} = 0,2$; $b - \tilde{f} = 0,4$; $v - \tilde{f} = 0,6$

Следует также сделать замечание относительно графиков, представленных на рис. 20–25. Данные на каждом рисунке приведены для различных значений параметра \tilde{f} , характеризующего трение. Можно заметить, что кривые для соответствующего материала и величины K_m при одном и том же значении начальной скорости, соответствующей пористости $\theta = 0,5$, но разных значениях \tilde{f} мало отличаются друг от друга.

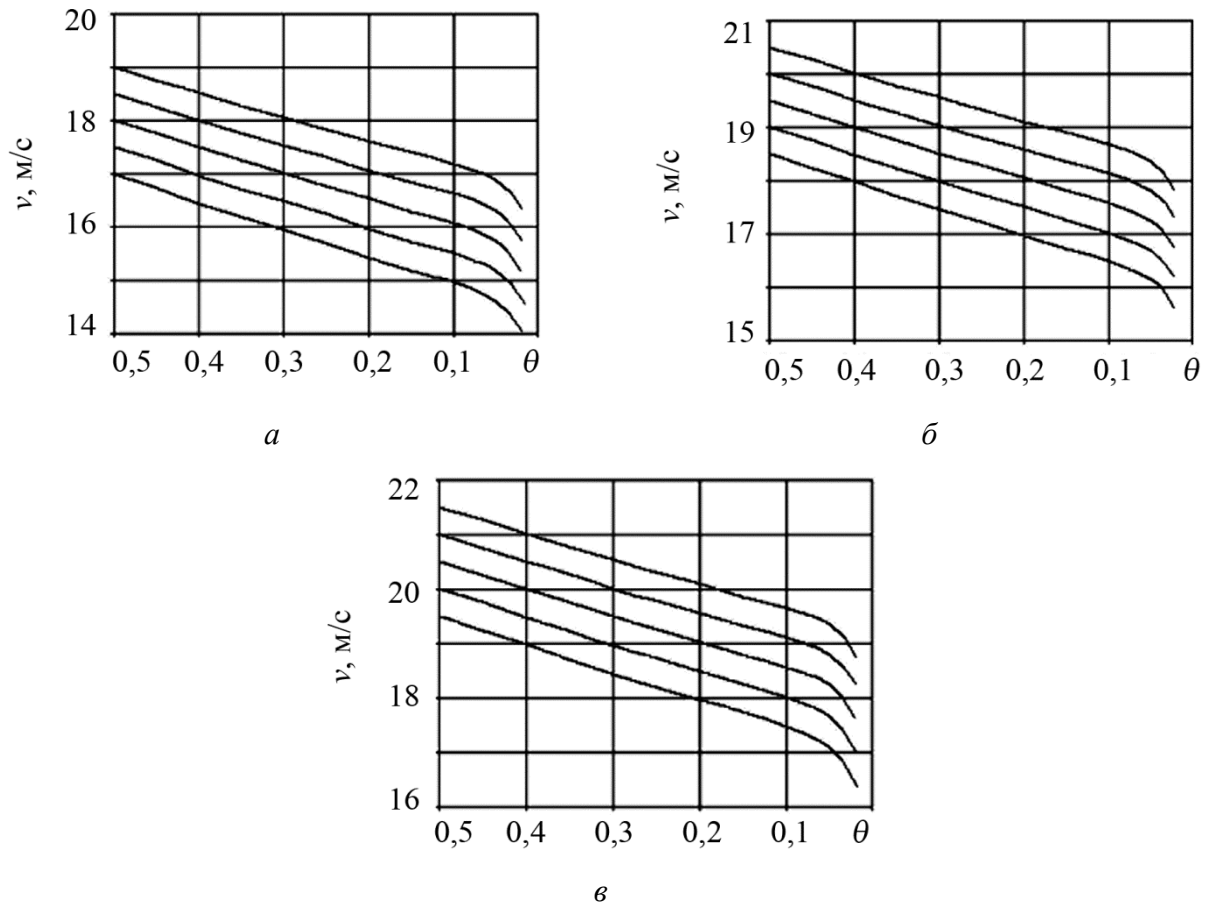


Рис. 21. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме порошка ПЖ4М2 для $K_m = 1000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

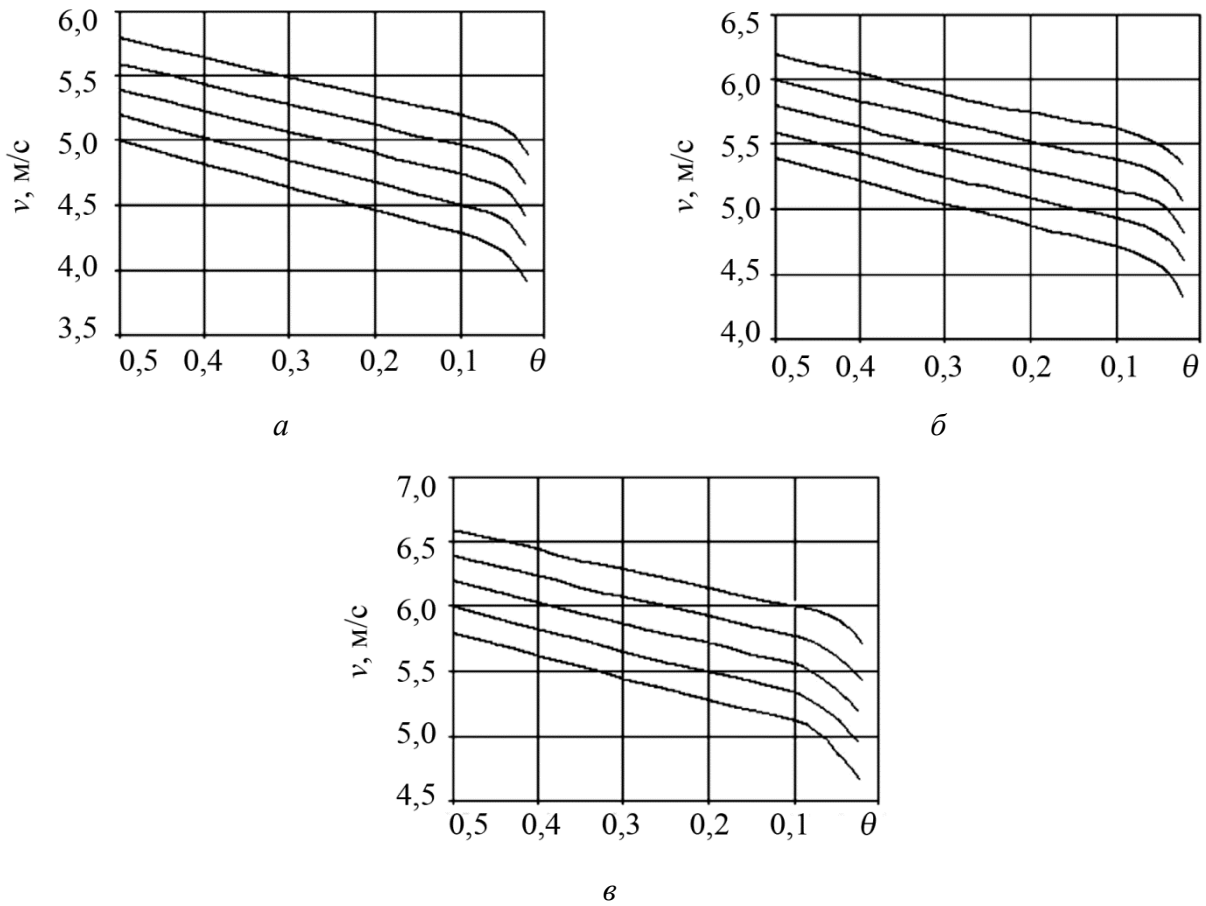


Рис. 22. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме порошка ПЖ4М2 для $K_m = 10000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

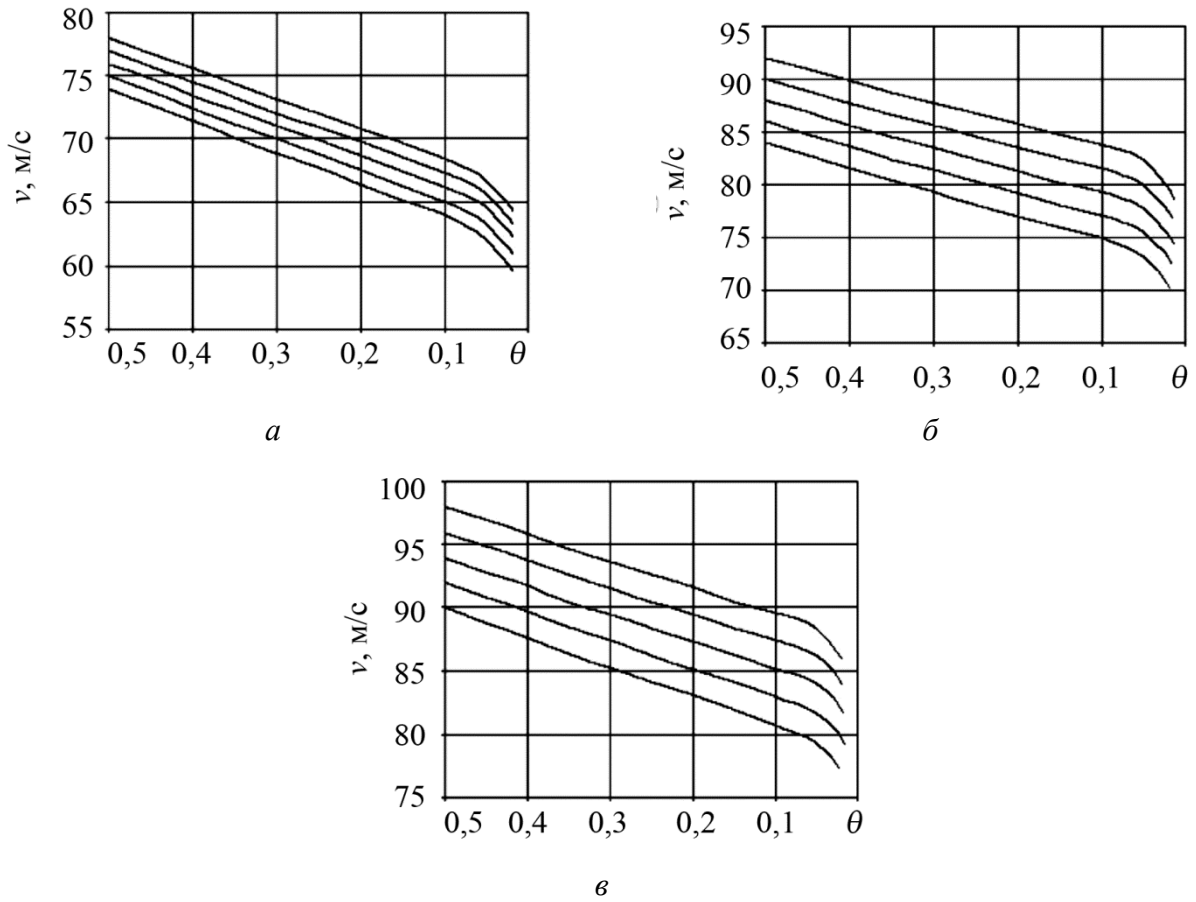


Рис. 23. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме некомпактного титана для $K_m = 100$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

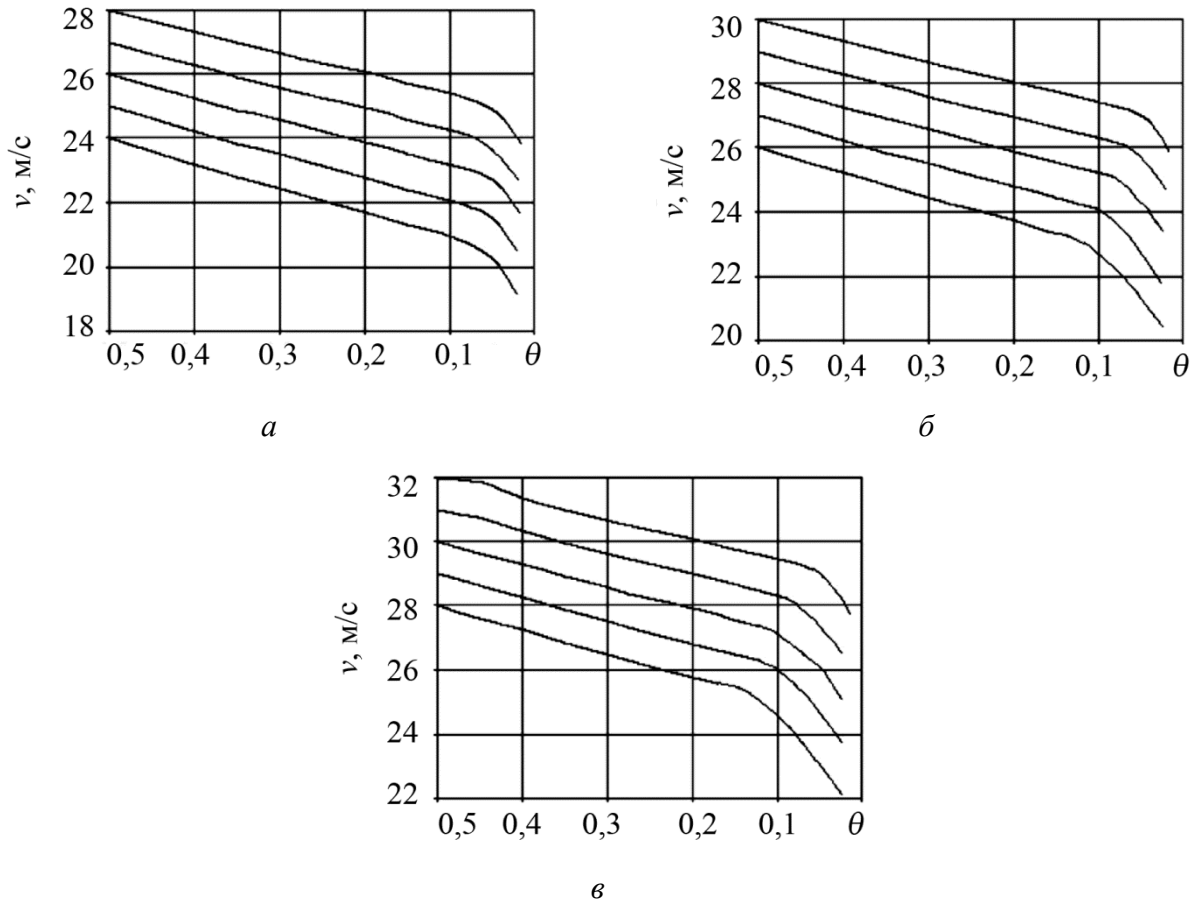


Рис. 24. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме некомпактного титана для $K_m = 1000$: а – $\tilde{f} = 0,2$; б – $\tilde{f} = 0,4$; в – $\tilde{f} = 0,6$

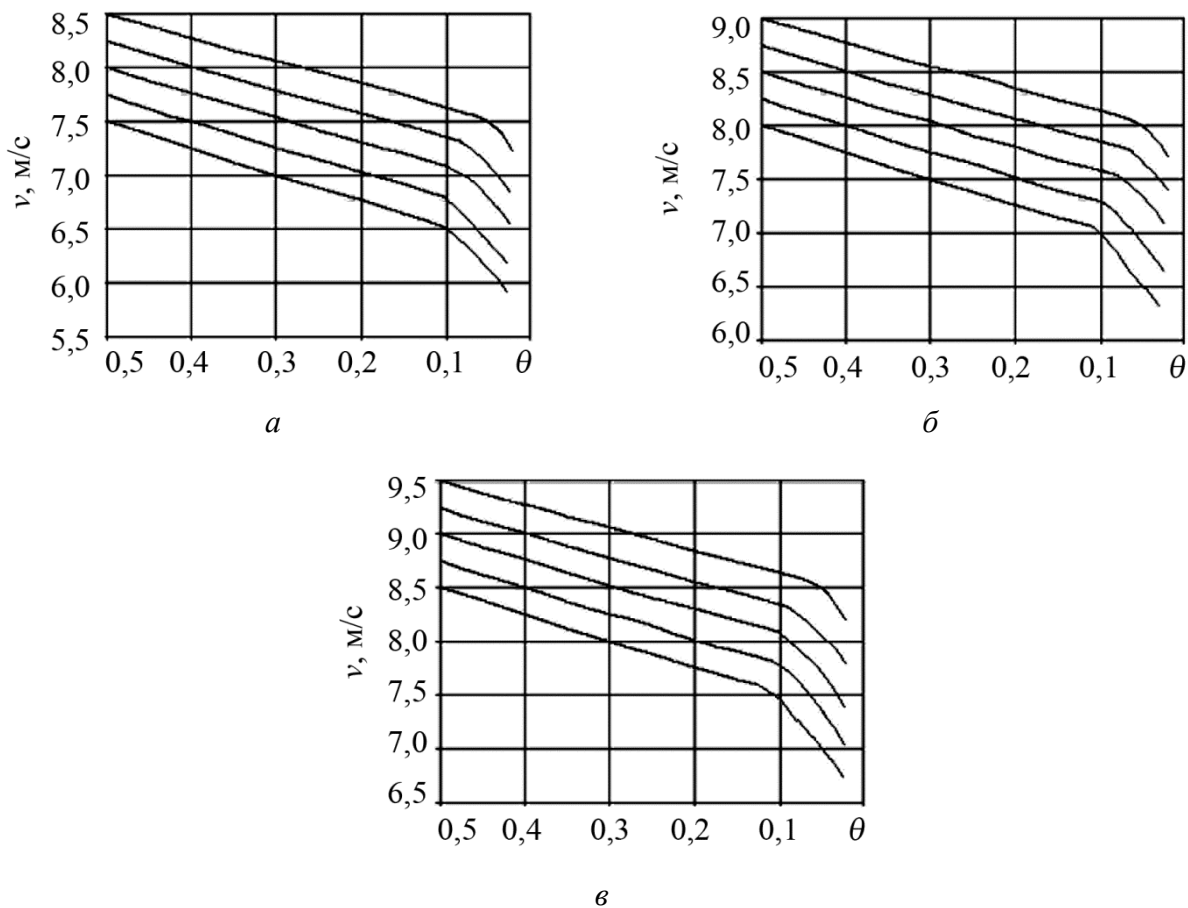


Рис. 25. Зависимость скорости инструмента от пористости при прессовании в замкнутом объеме некомпактного титана для $K_m = 10000$: *a* – $\tilde{f} = 0,2$; *б* – $\tilde{f} = 0,4$; *в* – $\tilde{f} = 0,6$

С практической точки зрения это означает, что для определения начальной скорости инструмента при ударном выдавливании некомпактного материала на стадии уплотнения порошка для конкретного материала и значения K_m допустимо использовать любую из зависимостей, приведенных на рис. 20–25, независимо от значения параметра \tilde{f} .

4. Выводы

Построена математическая модель динамического прессования порошка в цилиндрическом контейнере, позволяющая в зависимости от начальной пористости, размеров заготовки, массы и скорости инструмента, сил трения определять величину и характер распределения остаточной пористости. Показано, что при прессовании массивным ударником и плотности, близкой к теоретической, остаточная пористость распределена по высоте практически равномерно независимо от условий деформирования. При высоких скоростях инструмента остаточная пористость по высоте заготовки распределена неравномерно даже при отсутствии трения в силу волнового характера процесса.

Рассмотрено влияние начальной скорости инструмента и отношения его массы к массе заготовки, варьировавшегося в диапазоне $10^2 \div 10^4$, на скорость распространения ударных волн в порошке. Показано, что в исследуемом диапазоне параметров динамического нагружения существует линейная зависимость между скоростью фронта ударной волны и скоростью инструмента. Определена величина давления на фронте ударной волны.

Построена математическая модель процесса ударного выдавливания некомпактной заготовки через коническую матрицу при условии, что плотности исходной заготовки и пресс-остатка различны. Она основывается на суперпозиции решений задачи о прессовании порошка в цилиндрической пресс-форме и задачи об ударном выдавливании несжимаемого материала. Показано, что независимо от соотношения масс заготовки и инструмента оптимальное значение угла конусности матрицы, при котором скорость инструмента, необходимая для осуществления процесса, минимальна, меняется от $25\div 30^\circ$ до $35\div 40^\circ$ в зависимости от трения.

Для компьютерного моделирования процессов динамического прессования некомпактных материалов разработан программный комплекс DSPressing. Он позволяет выполнить расчет с одновременным замедленным просмотром процесса распространения ударной волны, графически отображает изменение во времени основных параметров процесса.

Литература

1. Обработка металлов взрывом / А. В. Крупин, В. Я. Соловьев, Г. С. Попов, М. Р. Кръстев. – М. : Металлургия, 1991. – 496 с.
2. Дмитриев А. М., Воронцов А. Л. Технологияковки и объемной штамповки. Часть 1. Объемная штамповка выдавливанием : учебник для вузов с грифом Минобразования РФ. – М. : Высшая школа, 2002. – 400 с.
3. Роман О. В., Горобцов В. Г. Импульсное нагружение порошковых материалов // Актуальные проблемы порошковой металлургии / под ред. О. В. Романа, В. С. Аруначалама – М. : Металлургия, 1990. – С. 78–99.
4. Belyakov G. V., Rodionov V. N., Samosadnyi V. P. Heating of porous material under impact compression // Combustion explosion and shock waves. – 1977. – Vol. 13, iss. 4. – P. 524–528. – DOI: 10.1007/BF00744803.
5. Герасимов А. В., Кректулева Р. А. Численное моделирование деформирования и разрушения функционально градиентных пористых материалов при взрывном и ударном нагружении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 94–106.
6. Alekseev Yu. L., Ratnikov V. P., Rybakov A. P. Shock adiabats of porous metals // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1971. – Vol. 12, no. 2. – P. 257–262. – DOI: 10.1007/BF00850698.
7. Anisichkin V. F. Shock compression of porous bodies // Combustion explosion and shock waves. – 1979. – Vol. 15, iss. 6. – P. 796–799. – DOI: 10.1007/BF00739873.
8. Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников, И. И. Шабалин, В. А. Бабаков, В. Ф. Куропатенко, А. Б. Киселев, Ю. А. Тришин, А. И. Садырин, С. П. Киселев, И. Ф. Головлев. – Новосибирск : СО РАН, 1999. – 600 с.
9. Дерибас А. А., Ставер А. М. Ударное сжатие цилиндрических пористых тел // ФГВ, 1974. – Т. 10, № 4. – С. 568–578.
10. Кузьмин Г. Е., Ставер А. М. К определению параметров течения при ударном нагружении порошкообразных материалов // ФГВ, 1973. – Т. 9, № 6. – С. 898–905.
11. Магнитно-импульсная штамповка полых цилиндрических заготовок / А. К. Талалаев, С. П. Яковлев, В. Д. Кухарь, Н. Е. Проскуряков, Е. М. Селедкин, Ю. Г. Нечепуренко. – Тула : Репроникс Лтд., 1998. – 238 с.
12. Нестеренко В. Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов. – Новосибирск : Наука, 1992. – 200 с.
13. Roman O. V., Mirilenko A. P., Pikus I. M. Theory and technology of the component formation process - effect of high-speed loading conditions on the pressing mechanism // Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics. – 1989. – Vol. 28, iss. 11. – P. 840–844. – DOI: 10.1007/BF01198890.

14. Сердюк Г. Г., Свистун Л. И. Ударное прессование металлических порошков (теоретическое исследование). // Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов. – Киев : Наук. думка, 1985. – С. 115–126.
15. Hermann W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. // *Journal of Applied Physics*. – 1969. – Vol. 40, no. 6. – P. 2490–2499. – DOI: 10.1063/1.1658021.
16. Shtertser A. A. Transmission of pressure in porous-media under explosive loading // *Combustion explosion and shock waves*. – 1988. – Vol. 24, iss. 5. – P. 610–615.
17. Butcher B. M., Carroll M. M., Holt A. C. Shock wave compaction of porous aluminum // *J. Appl. Phys.* – 1974. – Vol. 45, no. 9. – P. 3864–3875. – DOI: 10.1063/1.1663877.
18. Carroll M. M., Holt A. C. Steady waves in ductile porous solids // *J. Appl. Phys.* – 1973. – Vol. 44, no. 10. – P. 4388–4392. – DOI: 10.1063/1.1661970.
19. Davison L. Shock-wave structure in porous solids // *J. Appl. Phys.* – 1971. – Vol. 42, no. 13. – P. 5503–5512. – DOI: 10.1063/1.1659971.
20. Hörluck S., Dimon P. Statistics of shock waves in a two-dimensional granular flow // *Physical Review E*. – 1999. – Vol. 60, no. 1. – P. 671–686. – DOI: 10.1103/PhysRevE.60.671.
21. Nunziato J. W., Walsh E. K. One-dimensional shock waves in uniformly distributed granular materials // *Int. J. Solids and Struct.* – 1978. – Vol. 14, no. 8. – P. 681–689. – DOI: 10.1016/0020-7683(78)90006-9.
22. Numerical Simulation of Shock-Wave Processes in Elastic Media and Structures. Part I: Solving Method and Algorithms / M. V. Ayzenberg-Stepanenko, G. G. Osharovich, E. N. Sher, Z. Sh. Yanovitskaya // *Journal of Mining Science*. – 2012. – Vol. 48, no. 1. – P. 76–95. – DOI: 10.1134/S1062739148010091.
23. Simulation of the action of a shock wave on titanium alloy / S. A. Afanas'eva, N. N. Belov, V. V. Burkin, E. F. Dudarev, A. N. Ishchenko, K. S. Rogayev, A. N. Tabachenko, M. V. Khabibullin, N. T. Yugov // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2017. – Vol. 90, no. 1. – P. 24–34. – DOI: 10.1007/s10891-017-1535-8.
24. Roman O. V., Shmuradko V. T., Tarasov G. D. Curve of the dynamic compressibility of powder media // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2006. – Vol. 79, no. 4. – P. 817–823.
25. Measuring the Nanohardness of Commercial Submicrocrystalline Aluminum Alloys Produced by Dynamic Pressing / O. A. Chikova, E. V. Shishkina, A. N. Petrova, I. G. Brodova // *The Physics of Metals and Metallography*. – 2014. – Vol. 115, no. 5. – P. 523–528. – DOI: 10.1134/S0031918X14050044.
26. Dynamic Pressing of Titanium for Producing an Ultrafine-Grained Structure / E. V. Shorokhov, I. N. Zhgilev, D. V. Gunderov, A. A. Gurov // *Russian Journal of Physical Chemistry B*. – 2008. – Vol. 2, no. 2. – P. 251–254. – DOI: 10.1134/S1990793108020139.
27. Рогозин В. Д. Взрывная обработка порошковых материалов. – Волгоград : Политехник, 2002. – 136 с.
28. Kinelovskii S. A., Maevskii K. K. Model of the behavior of the mixture with different properties of the species under high dynamic loads // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2013. – Vol. 54, no. 4. – P. 524–530. – DOI: 10.1134/S0021894413040020.
29. Vogler T. Shock Wave Perturbation Decay in Granular Materials // *J. dynamic behavior mater.* – 2015. – Vol. 1. – P. 370–387. – DOI 10.1007/s40870-015-0033-3.
30. Shtern M. B., Kartuzov E. V. Formation and propagation of shock waves in highly porous materials // *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*. – 2016. – Vol. 55, no. 3–4. – P. 134–140. – DOI: 10.1007/s11106-016-9788-x.
31. Лейцин В. Н. Модель реагирующей порошковой среды // *Вестник Томск. гос. ун-та : общенаучный периодический журнал : бюллетень оперативной технической информации*. – Томск : ТГУ, 2001. – № 5. – 40 с.

32. Boltachev G. Sh., Kaygorodov A. S., Volkov N. B. Densification of the granular medium by the low amplitude shock waves // *Acta Mechanica*. – 2009. – Vol. 207. – P. 223–234. – DOI: 10.1007/s00707-008-0127-2.
33. Shock-wave compaction of the granular medium initiated by magnetically pulsed accelerated striker / G. Sh. Boltachev, N. B. Volkov, V. V. Ivanov, A. S. Kaygorodov // *Acta Mechanica*. – 2009. – Vol. 204. – P. 37–50. – DOI: 10.1007/s00707-008-0046-2.
34. Modeling and optimization of uniaxial magnetic pulse compaction of nanopowders / E. A. Olevsky, A. A. Bokov, G. Sh. Boltachev, N. B. Volkov, S. V. Zayats, A. M. Ilyina, A. A. Nozdrin, S. N. Paragin // *Acta Mech.* – 2013. – Vol. 224. – P. 3177–3195. – DOI: 10.1007/s00707-013-0939-6.
35. Boltachev G. Sh., Volkov N. B., Chingina E. A. Nanopowders in Dynamic Magnetic Pulse Compaction Processes // *Nanotechnologies in Russia*. – 2014. – Vol. 9, no. 11–12. – P. 650–659. – DOI: 10.1134/S1995078014060056.
36. Uniaxial Compaction of Nanopowders on a Magnetic Pulse Press / A. A. Bokov, G. Sh. Boltachev, N. B. Volkov, S. V. Zayats, A. M. Il'ina, A. A. Nozdrin, S. N. Paragin, E. A. Olevskii // *Technical Physics*. – 2013. – Vol. 58, no. 10. – P. 1459–1468. – DOI: 10.1134/S106378421310006X.
37. Федотов А. Ф., Амосов А. П., Радченко В. П. Моделирование процесса прессования порошковых материалов в условиях самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. – М. : Машиностроение-1, 2005. – 282 с.
38. Киселев А. Б., Юмашев М. В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // *ПМТФ*. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 116–123.
39. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. – Новосибирск : Научная книга, 1998. – 267 с.
40. Bardet J. P., Proubet J. Application of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media // *Int. Conf. on micromechanics of granular media "Powders and Grains"*, Clermont-Ferrand, 4-8 September 1989 : proceedings / ed. by J. Biarez, R. Gouvrès. – 1989. – P. 265–273.
41. Resnyansky D., Bourne N. K. Shock-wave compression of a porous material // *J. Appl. Phys.* – 2004. – Vol. 95, no. 4. – P. 760–1769. – DOI: 10.1063/1.1640460.
42. Boshoff-Mostert L., Viljoen H.J. Comparative study of analytical methods for Hugoniot curves of porous materials // *J. Appl. Phys.* – 1999. – Vol. 86, no. 3. – P. 1245–1254. – DOI: 10.1063/1.370878.
43. Fenton G., Grady D., Vogler T. Shock Compression Modeling of Distended Mixtures // *J. dynamic behavior mater.* – 2015. – Vol. 1. – P. 103–113. – DOI: 10.1007/s40870-015-0021-7.
44. Shen H., Ahrens T. J., O'Keefe J. D. Shock wave induced vaporization of porous solids // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 93. – P. 5167–5174. – DOI: 10.1063/1.1563035.
45. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
46. Dunin S. Z., Surkov V. V. Dynamics of the closing of pores at the shock-wave front // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1979. – Vol. 43, iss. 3. – P. 550–558.
47. Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский И. А. О течении газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // *ПМТФ*. – 1982. – № 1. – С. 111–118.
48. Жданович Г. М. Теория прессования металлических порошков. – М. : Metallurgia, 1969. – 264 с.
49. Ivanov V. V., Nozdrin A. A. Method of determining dynamic adiabatic compression curves of powders // *Technical Physics Letters*. – 1997. – Vol. 23. – P. 527–528. – DOI: 10.1134/1.1261734.
50. Nowacki W. K. *Stress Waves in Non-Elastic Solids*. – Oxford : Pergamon Press, 1978. – 182 p.

51. Проскуряков Н. Е., Орлов С. Ю., Череватый Р. С. Влияние скорости деформирования на динамический предел текучести // *Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением* : сб. науч. тр. – Тула : ТулГУ, 2001. – Ч. 1. – С. 134–138.
52. Carroll M. M., Kim K. T., Nesterenko V. F. The effect of temperature on viscoplastic pore collapse // *J. Appl. Phys.* – 1986. – Vol. 59, no. 6. – P. 1962–1967. – DOI: 10.1063/1.336426.
53. Поляков А. П., Залазинская Е. А. Ударное прессование заготовки из некомпактного металлического сырья // *Изв. ВУЗов. Цветная металлургия.* – 2003. – № 1. – С. 30–35.
54. Green R. J. A plasticity theory for porous solids // *Int. J. Mech. Sci.* – 1972. – Vol. 14. – P. 215–224. – DOI: 10.1016/0020-7403(72)90063-X.
55. Zalazinskii A. G., Polyakov A. A., Polyakov A. P. On plastic compression of a porous body // *Mechanics of Solids.* – 2003. – Vol. 38, no. 1. – P. 101–110.
56. Колачев Б. А., Ливанов В. А., Буханова А. А. Механические свойства титана и его сплавов. – М. : Металлургия, 1974. – 544 с.
57. Поляков А. П., Мокроусова М. С. Математическое моделирование процесса динамического прессования порошкового материала // *КШП. ОмД.* – 2004. – № 2. – С. 20–22. – С. 27–30.
58. Polyakov P. The Effect of parameters of dynamic loading on the propagation character of shock waves in a powder // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals.* – 2009. – Vol. 50, no. 1. – P. 33–38. – DOI: 10.3103/S106782120901009X.
59. Дряунов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. – М. : Машиностроение, 1989. – 168 с.
60. Залазинский А. Г. Пластическое деформирование структурно-неоднородных материалов. – Екатеринбург : УрО РАН, 2000. – 492 с.
61. Поляков А. П. Ударное выдавливание прутковой заготовки через коническую матрицу // *Изв. ВУЗов. Цветная металлургия.* – 2004. – № 4. – С. 50–54.
62. Григорьев А. К., Рудской А. И. Деформация и уплотнение порошковых материалов. – М. : Металлургия, 1992. – 192 с.
63. Поляков А. П. Ударное выдавливание заготовки с учетом малой сжимаемости материала // *Изв. ВУЗов. Черная металлургия.* – 2006. – № 3. – С. 32–37.
64. Polyakov A. P. Power Parameters of the Impact Pressing Process of an Incompact Wire Stock // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals.* – 2007. – Vol. 48, no. 2. – P. 136–142. – DOI: 10.3103/S1067821207020125.

Received: 04.12.2017

Revised: 20.03.2018

Accepted: 06.04.2018

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.083-091

A VARIATIONAL PRINCIPLE FOR THE DISTURBANCES OF PARTICLE VELOCITIES IN THE FLOW OF A PERFECTLY PLASTIC STRIP UNDER ROLLING

V. D. Solovei

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, Russian Federation*

 <http://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  soloveivd@yandex.ru

Corresponding author. E-mail: soloveivd@yandex.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 375 35 92; fax: +7 (343) 374 53 30

The slow plane flow of a perfectly plastic strip under rolling is considered. The Prandtl friction law is assumed to be valid on the contact surface between the strip and the roller. A variational principle enabling one to build a set of velocity disturbances in order to study the stability of the stationary flow of a perfectly plastic strip at an arbitrary time is proved.

Keywords: perfectly plastic strip rolling, stationary flow, disturbances of particle velocities in a stationary flow, variational principle.

References

1. Gorelik S.S. *Rekristallizatsiya metallov i splavov* [Recrystallization of metals and alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1978, 568 p. (In Russian).
2. Shtremel M.A. In: *Prochnost splavov*. Ch. II. Deformatsiya [Strength of alloys. Part II. Deformation]. Moscow, MISIS Publ., 1997, 526 p. (In Russian).
3. Gubernatorov V.V., Sokolov B.K., Gervasieva I.V., Vladimirov L.R. On the Formation of Band Structures in Structurally Homogeneous Materials upon Deformation. *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 1999, vol. 2, nos. 1–2, pp. 157–162. (In Russian).
4. Gubernatorov V.V., Sycheva T.S., Vladimirov L.R., Matveeva V.S., Pyatygin A.I., Melnikov M.B. The corrugation phenomenon and formation of strained and recrystallized structure and texture in metallic materials. Part II. Cubic syngony. *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 2002, vol. 5, no. 6, pp. 95–99. (In Russian).
5. Glansdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability, and Fluctuations*. London, Wiley, 1971.
6. Solovei V.D., Trukhin V.B. The stability of upsetting of a viscoplastic parallelepiped without friction. *Deformatsiya i Razrushenie Materialov*, 2014, no. 2, pp. 9–13. (In Russian).
7. Lamb, Sir Horace. *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1932. (Reprinted by Dover Pubs., New York, 1945).
8. Il'yushin A.A. Deformation of viscous-plastic body. *Uch. zapiski MGU, Mekhanika*, 1940, no. 39, pp. 3–81. (In Russian).
9. Freudenthal A.M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. In: Flügge S., ed. *Elasticity and Plasticity* (Elastizität und Plastizität): Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics), vol 3 (6), Springer, Berlin, Heidelberg 1958.
10. Kolmogorov V.L. *Mekhanika obrabotki metallov davleniem* [Mechanics of metal forming]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1986, 688 p. (In Russian).

11. Alekseev A.E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems for linear theory of elasticity. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 2002, vol. 43, no. 4. pp. 16–169. (In Russian).
12. Solovei V.D. Possible velocity disturbances in the lag zone in the rolling of a perfectly plastic strip. *Deformatsiya i Razrushenie Materialov*, 2014, no. 12, pp. 23–26. (In Russian).

Подана в журнал: 04.12.2017

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.083-091

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ПРОКАТКЕ

В. Д. Соловей

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

 <http://orcid.org/0000-0003-4696-8706>  soloveivd@yandex.ru

Ответственный автор. Электронная почта: soloveivd@yandex.ru

Адрес для переписки: 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–92; факс: +7 (343) 374–53–30

Рассматривается медленное плоское течение идеально пластической полосы при прокатке. Трение на контакте полосы с валками определяется законом Прандтля. Доказывается вариационный принцип, который позволяет строить множество возмущений скоростей перемещений для исследования на устойчивость стационарного течения идеально пластической полосы в произвольный момент времени.

Ключевые слова: прокатка идеально пластической полосы, стационарное течение, возмущения стационарного течения, вариационный принцип.

1. Введение

Формирование периодических мезоструктур в металлах при прокатке [1] связано с потерей устойчивости деформируемых полос [2–4]. Исследование деформации твердого тела на устойчивость производится по отношению к некоторому множеству возмущений скоростей перемещений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, вытекающим из законов сохранения, уравнениям состояния и граничным условиям [5]. Прокатываемая полоса имеет сложную форму области течения, что усложняет решение упомянутой нестационарной краевой задачи для возмущений скоростей перемещений.

В настоящей работе доказывается Вариационный принцип для возмущений скоростей перемещений медленного стационарного течения идеально пластической полосы при прокатке в произвольный момент времени, для которого возмущения ускорений заданы. Использование этого принципа позволяет при определении возмущений скоростей перемещений в произвольный момент времени заменить операции, связанные с интегрированием дифференциальных уравнений, относительно более простой операцией минимизации найденного функционала. Устойчивость течения полосы по отношению к найденным таким образом возмущениям скоростей перемещений в произвольный момент времени может быть исследована с помощью критерия локальной устойчивости в интегральном смысле, предложенного в работе [6].

2. Стационарное течение идеально пластической полосы при прокатке

Будем рассматривать плоское медленное течение идеально пластической полосы, для которого уравнения движения имеют следующий вид [7, 5]:

$$\rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j}. \quad (1)$$

Здесь v_i – компоненты вектора скорости перемещения частицы; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность тела ($\rho = const$); тензорные индексы принимают значения прямоугольных декартовых координат x, y ; по дважды повторяющимся тензорным индексам i, j, k, l происходит суммирование по всем возможным их значениям; запятая перед индексом обозначает частную производную по соответствующей координате или по времени.

Система уравнений для стационарного течения идеально пластического тела имеет вид [8–10]:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (2)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (3)$$

$$s_{ij} = 2 \tau_s \varepsilon_{ij} / H; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}) / 2; \quad (5)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad (6)$$

где ε_{ij} и s_{ij} – компоненты тензоров скоростей деформаций и девиатора напряжений соответственно; $\sigma = \sigma_{ii} / 3$ – гидростатическое давление; $H = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформации сдвига; τ_s – предел текучести на сдвиг; δ_{ij} – символ Кронекера. Напряжения на границе области течения полосы p_i определяются формулой Коши:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (7)$$

где n_j – компоненты единичной внешней нормали к границе области течения.

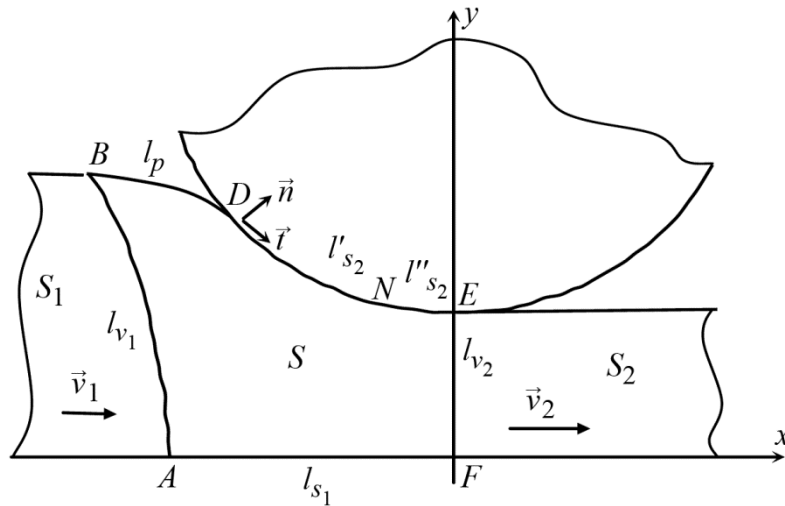


Схема прокатки полосы

На рисунке приведена схема процесса плоской прокатки полосы. Область $ABDEF$ (S) – область течения полосы. На границе контакта полосы с валком DE (l_{s2}) имеет место проскальзывание частиц полосы по поверхности валка. В нейтральной точке N касательные скорости перемещений частиц полосы и валка равны. Касательные составляющие скоростей перемещений частиц полосы v_t в зоне отставания DN (l'_{s2}) меньше, а в зоне опережения NE (l''_{s2}) – больше окружной скорости валка. Справа и слева от области течения изображены передний (S_2) и задний (S_1) жесткие концы полосы, движущиеся со скоростями V_2 и V_1 соответственно. Границы контакта области течения с жесткими концами полосы S_2 и S_1 обозначены, как EF (l_{v2}) и AB (l_{v1}) соответственно. Граница BD (l_p) свободна от нагрузки, а граница AF (l_{s1}) представляет плоскость симметрии процесса прокатки. Индексы компонент векторов t и n относятся к локальной системе координат \vec{t}, \vec{n} .

Граничные условия для стационарного течения полосы имеют следующий вид:

$$p_t = \tau_s \text{ на } l'_{s2}, \quad p_t = -\tau_s \text{ на } l''_{s2}, \quad v_n = 0 \text{ на } l_{s2}; \quad (8)$$

$$|p_t| = \tau_s, \quad v_n = v_n(V_1^*) \text{ на } l_{v1}; \quad (9)$$

$$|p_t| = \tau_s, \quad v_n = V_2^* \text{ на } l_{v2}; \quad (10)$$

$$p_t = 0, \quad p_n = 0 \text{ на } l_p; \quad (11)$$

$$p_t = 0, \quad v_n = 0 \text{ на } l_{s1}. \quad (12)$$

Касательные напряжения трения p_t на l_{s2} в (8) задаются приближенно с помощью закона трения Прандтля, который достаточно точно описывает закономерности внешнего трения в зонах больших нормальных напряжений [11]. Звездочкой обозначаются заданные величины. Полагаем, что решение системы уравнений (2)–(6) и граничных условий (8)–(12) известно.

3. Возмущения стационарного течения идеально пластической полосы при прокатке

Обозначим возмущение величины f как \tilde{f} и определим его следующим образом: $\tilde{f} = \delta f$, где δ – оператор изохронного, изокоординатного варьирования.

Возмущения величин относятся к произвольному моменту времени и являются функциями координат.

Система уравнений для возмущений стационарного течения идеально пластического тела имеет следующий вид:

$$\rho \tilde{v}_{i,t}^* = \tilde{\sigma}_{ij,j}, \quad (13)$$

$$\tilde{v}_{i,i} = 0, \quad (14)$$

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tau_s H^{-3} (-2\varepsilon_{kl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \varepsilon_{ij} + H^2 \tilde{\varepsilon}_{ij}), \quad (15)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = (\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{j,i})/2. \quad (16)$$

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma} \delta_{ij}. \quad (17)$$

Уравнения (13)–(17) получаются варьированием уравнений (1), (3)–(6) с последующим удержанием только первых вариаций. Отметим, что возмущение ускорения $\tilde{v}_{i,t}^*$ в (13) задано.

Используя (15), можно убедиться, что мощность возмущения скорости деформации

$$\tilde{W} = \tilde{s}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} / 2 \quad (18)$$

является потенциалом для возмущения девиатора напряжения, то есть

$$\tilde{s}_{ij} = \partial \tilde{W} / \partial \tilde{\varepsilon}_{ij}. \quad (19)$$

Возмущения напряжений на границе тела определяются формулой

$$\tilde{p}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j. \quad (20)$$

Сформулируем граничные условия для возмущений переменных в произвольный момент времени.

На границах l_{s2} , l_{v1} , l_{v2} и l_{s1} задаются возмущения скоростей перемещений

$$\tilde{v}_n = 0, \quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_t^* \quad (21)$$

На свободной границе l_p задаются

$$\tilde{v}_n = \tilde{v}_n^*, \quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_t^* \quad (22)$$

При этом в зоне отстаивания l'_{s2} волна возмущения \tilde{v}_i^* задается двухпараметрической функцией [12]

$$\tilde{v}_t^* = \sum_{k=1}^P \delta_k \sin [2\pi k (l - l_d) / (l_n - l_d)], \quad (23)$$

где l – криволинейная координата на поверхности валка: $l = R \arcsin(x/R)$; l_d и $l_n - l$ – координаты точек D и N соответственно; δ_k – малая амплитуда k -ой волны возмущения; параметры δ_k и P произвольны. Остальные задаваемые на границе возмущения скоростей перемещений произвольны.

4. Вариационный принцип для возмущений скоростей перемещений стационарного течения идеально пластической полосы

Возмущения скоростей перемещений \tilde{v}'_i , которые в произвольный момент времени удовлетворяют уравнению несжимаемости (14) и граничным условиям (21)–(23), будем называть кинематически возможными возмущениями скоростей перемещений. Величины со штрихом определяются как соответствующие им функции от кинематически возможных возмущений скоростей перемещений.

Покажем, что функционал

$$\tilde{G}' = \int_S \tilde{W}' dS + \int_S \rho \tilde{v}_{i,t}^* \tilde{v}'_i dS, \quad (24)$$

определенный на множестве кинематически возможных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}'_i , для действительных возмущений скорости перемещения \tilde{v}_i принимает минимальное значение. Здесь S – площадь области течения полосы.

Заметим, что возмущения ускорений $\tilde{v}_{i,t}^*$ в функционале (24) для рассматриваемого момента времени заданы.

Рассмотрим первую вариацию функционала δG , связанную с вариациями возмущений скоростей перемещений $\delta \tilde{v}_i$ относительно действительных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i . Выражение (24), учитывая соотношения (19), (17), (14), (16) симметричность возмущения тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$, используя теорему Гаусса–Остроградского, принимая во внимание (20), можно преобразовать к виду:

$$\delta \tilde{G} = \int_S (-\tilde{\sigma}_{ij,j} + \rho \tilde{v}_{i,t}^*) \delta \tilde{v}_i dS + \int_l \tilde{p}_i \delta \tilde{v}_i dl, \quad (25)$$

где второй интеграл берется по всей границе области течения.

Из (25), (13) и граничных условий (21), (22) следует равенство

$$\delta \tilde{G} = 0. \quad (26)$$

Необходимое условие минимума функционала \tilde{G} для действительных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i доказано.

Рассмотрим вторую вариацию функционала $\delta^2 \tilde{G}$, связанную с вариациями возмущений скоростей перемещений $\delta \tilde{v}_i$ относительно действительных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i .

Из (24) следует

$$\delta^2 \tilde{G} = \int_S \delta^2 \tilde{W} dS. \quad (27)$$

Учитывая (19) и (15), можно написать выражение

$$\delta^2 \tilde{W} = 4 \tau_s H^{-3} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{kl}). \quad (28)$$

Выражение в скобках, согласно неравенству Коши–Буняковского, неотрицательно и равно нулю, если $\delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = c \varepsilon_{ij}$.

Из (27) и (28) следует неравенство (если исключить случаи, когда $\delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = c \varepsilon_{ij}$)

$$\delta^2 \tilde{G} > 0. \quad (29)$$

Достаточное условие минимума функционала \tilde{G} для действительных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i доказано.

Таким образом, функционал (24) для действительных возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i принимает минимальное значение.

В заключение отметим, что в произвольный момент времени для каждого заданного поля возмущений ускорений $\tilde{v}_{i,t}^*$, минимизируя функционал (24), можно решить соответствующую краевую задачу для возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i . Для произвольного момента времени, варьируя возмущения ускорений $\tilde{v}_{i,t}^*$, можно получить искомое множество возмущений скоростей перемещений \tilde{v}_i для исследования стационарного течения идеально пластической полосы при прокатке на устойчивость.

5. Заключение

Найден функционал, имеющий минимум для действительных возмущений скоростей перемещений стационарного течения идеально пластической полосы при прокатке в произвольный момент времени. Вариационный принцип позволяет эффективно определять возмущения скоростей перемещений в произвольный момент времени, необходимые при исследовании устойчивости течения идеально пластической полосы при прокатке.

Литература





1. Горелик С. С. Рекристаллизация металлов и сплавов. – М. : Metallurgia, 1978. – 568 с.
2. Штремель М. А. Прочность сплавов. – М. : Изд-во МИСИС, 1997. – 526 с. – Ч. II : Деформация.
3. О формировании полосовых структур в структурно-однородных материалах при деформации / В. В. Губернаторов, Б. К. Соколов, И. В. Гервасьева, Л. Р. Владимиров // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, № 1–2. – С. 157–162.
4. Явление гофрирования и формирования структуры и текстуры в металлических материалах при деформации и рекристаллизации: 2. Сплавы кубической сингонии / В. В. Губернаторов, Т. С. Сычева, Л. Р. Владимиров, В. С. Матвеева, А. И. Пятыгин, М. Б. Мельников // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5, № 6. – С. 95–99.
5. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М. : Мир, 1973.
6. Соловей В. Д., Трухин В. Б. Устойчивость процесса осадки вязкопластического параллелепипеда без трения // Деформация и разрушение материалов. – 2014. – № 2. – С. 9–13.
7. Лэмб Г. Гидродинамика / пер. с 6-го англ. издания А. В. Гермогенова, В. А. Кудрявцева / под ред. Н. А. Слѣзкина. – М. ; Л. : ОГИЗ «Гостехтеоретиздат», 1947. – 928 с.
8. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластичного тела // Уч. зап. МГУ. Механика. – М. : Изд-во МГУ, 1940. – Вып. 39. – С. 3–81.
9. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М. : ГИФМЛ, 1962.
10. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. – М. : Metallurgia, 1986.
11. Алексеев А. Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 161–169.
12. Соловей В. Д. Возможные возмущения скоростей перемещений в зоне отстаивания при прокатке идеально пластической полосы // Деформация и разрушение материалов. – 2014. – № 12. – С. 23–26.

Received: 28.02.2018
Revised: 12.04.2018
Accepted: 20.04.2018
DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109

**EXACT SOLUTIONS FOR A COUETTE–HIEMENZ CREEPING
 CONVECTIVE FLOW WITH LINEAR TEMPERATURE
 DISTRIBUTION ON THE UPPER BOUNDARY**

V. V. Privalova^{a)*}, E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

a)  <http://orcid.org/0000-0002-8648-0900>  valentprival@gmail.com;
 b)  <http://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: valentprival@gmail.com

Address for correspondence: 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 Tel.: +7 (343) 375 35 76; Fax: 374 53 30

A new exact solution is found for the plane convection of a viscous incompressible fluid describable by the Oberbeck–Boussinesq equation system in an infinite thin layer. The solution of the boundary-value problem is obtained for the fluid flow arising in the case of inhomogeneous velocity distribution and a linear heat source at the upper boundary of an infinite layer of a viscous incompressible fluid. A creeping convective flow is studied by the generalization of the isothermal class of the Hiemenz exact solutions. The temperature and pressure fields are linear with respect to the horizontal coordinate in this class of solutions. The analysis of polynomial solutions describing natural fluid convection in the Stokes approximation is presented. The paper shows the existence of points where the velocity field vanishes inside the fluid layer. These points are termed stagnation points and indicate the presence of counterflows in the fluid. Similar investigations are carried out for the temperature and pressure fields. The isotherms and isobars are shown to be always locally parabolic or hyperbolic, i.e. to have an infinitely distant point, due to the structure of the discussed exact solution.

Keywords: counterflow, exact solution, Couette flow, Hiemenz flow, Oberbeck–Boussinesq equation, Stokes approximation, stagnation point, stratification.

References

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
2. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid mechanics.* Pergamon Press, Oxford, 1987, 539 p.
3. Drazin P.G. *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p.
4. Boronin S.A. Stability of the plane Couette flow of a disperse medium with a finite volume fraction of the particles. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46, pp. 64–71.
 DOI: 10.1134/S0015462811010078.
5. Georgiyevskii D.V. Generalized Joseph Estimates of Stability of Plane Shear Flows with Scalar Nonlinearity. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 149–152. DOI: 10.3103/S1062873810121044.
6. Zhuk V.I., Protsenko I.G. Asymptotic model for the evolution of perturbations in the plane Couette-Poiseuille flow. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, no. 3, pp. 896–900.
 DOI: 10.1134/S1064562406060287.

7. Rudyak V.Ya., Isakov E.B., Bord E.G. Instability of plane Couette flow of two-phase liquids. *Technical Physics Letters*, 1998, vol. 24, pp. 199–200. DOI: 10.1134/1.1262051.
8. Troshkin O.V. Nonlinear stability of Couette, Poiseuille and Kolmogorov plane channel flows. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 181–185. DOI: 10.1134/S1064562412020068.
9. Shalybkov D.A. Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow. *Physics-Uspokhi*, 2009, vol. 52, no. 9, pp. 915–935. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971.
10. Abramyan A.K., Mirantsev L.V., Kuchmin A.Yu. Modeling of processes at Couette simple fluid flow in flat nano-scope canal. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 4, pp. 3–21 (In Russian).
11. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, pp. 581–587. DOI: 10.1134/S001546281605001X.
12. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
13. Babkin V. A. Plane Turbulent Couette Flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 76, iss. 6, pp. 1251–1254. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.c6.
14. Belyaeva N.A., Kuznetsov K.P. Analysis of a nonlinear dynamic model of the Couette flow for structured liquid in a flat gap. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 2 (27), pp. 85–92. DOI: 10.14498/vsgtu1018. (In Russian).
15. Gavrilenko S.L., Shil'ko S.V., Vasin R.A. Characteristics of a viscoplastic material in the couette flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, iss. 3, pp. 439–444. DOI: 10.1023/A:1015378622918.
16. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Reception of exact analytical decisions of the hyperbolic equations of movement at a dispersed current of Kuetta. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Energetika*, 2012, no. 1, pp. 119–133 (In Russian).
17. Malyshev V.A., Manita A.D. Stochastic Micromodel of the Couette Flow. *Theory of Probability & its Applications*, 2009, vol. 53, iss. 4, pp. 716–727. DOI: 10.1137/S0040585X97983924.
18. Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P. Couette Problem for Kelvin-Voigt Medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 186, iss. 3, pp. 495–510. DOI: 10.1007/s10958-012-1003-0.
19. Skulsky O.I., Aristov S.N. *Mekhanika anomalno vyazkikh zhidkostey* [Mechanics of Quasi-Viscous Fluids]. Moscow–Izhevsk, NITs Regularnaya i Khaoticheskaya Dinamika Publ., 2003, 156 p. (In Russian).
20. Aristov S.N., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167–178. DOI: 10.20537/nd1602001. (In Russian).
21. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Marangoni viscous incompressible fluid. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3 (32), pp. 110–118. DOI: 10.14498/vsgtu1205. (In Russian).
22. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions of Thermocapillary Convection in a Localized Heating of a Plane Layer of a Viscous Incompressible Fluid. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva*, 2014, no. 3, pp. 7–12. (In Russian).
23. Aristov S.N., Vlasova S.S., Prosviryakov E.Yu. Linear Benard-Marangoni convection with quadratic heating on top of a plane layer of a viscous incompressible fluid. *Polzunovskiy Vestnik*, 2014, no. 4–2, pp. 95–102. (In Russian).
24. Aristov S.N., Shvarts K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, pp. 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
25. Vlasova S.S., Prosviryakov E.Y. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronautics*, 2016, vol. 59, no. 4, pp. 529–535. DOI: 10.3103/S1068799816040140.

26. Vlasova S.S., Prosviryakov E.Yu. Two-dimensional convection of an incompressible viscous fluid with the heat exchange on the free border. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 3, pp. 567–577. DOI: 10.14498/vsgtu1483.
27. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeit-sstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dingler's Politech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324.
28. Andreev V.K., Cheremnykh E.N. 2D thermocapillary motion of three fluids in a flat channel. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and physics*, 2016, vol. 9, issue. 4, pp. 404–415. DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-4-404-415.
29. Andreev V.K., Cheremnykh E.N. The joint creeping motion of three viscid liquids in a plane layer: A priori estimates and convergence to steady flow. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 7–20. DOI: 10.1134/S1990478916010026.
30. Andreev V.K., Sobachkina N.L. *Dvizhenie binarnoy smesi v ploskikh i tsilindricheskikh oblastyakh* [The Motion of a Binary Mixture in Planar and Cylindrical Regions]. Krasnoyarsk, SFU Publ., 2012, 187 p. (In Russian).
31. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyaniin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
32. Pukhnachev V.V. Group Properties of the Navier-Stokes Equations in a Plane Case. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1960, no. 1, pp. 83–90.
33. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52.
34. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
35. Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Boston: De Gruyter Publ., 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
36. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
37. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.

Подана в журнал: 28.02.2018



УДК 539



DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ КОНВЕКТИВНОЕ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА–ХИМЕНЦА ПРИ ЛИНЕЙНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ

В. В. Привалова^{а)*}, Е. Ю. Просвиряков^{б)}

*Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

а)  <http://orcid.org/0000-0002-8648-0900>  valentprival@gmail.com;

б)  <http://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: valentprival@gmail.com

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

Найдено новое точное решение плоской конвекции вязкой несжимаемой жидкости, описываемой системой уравнений Обербека–Буссинеска в бесконечном тонком слое. Решение краевой задачи получено для течения жидкости, возникающее при неоднородном распределении скоростей и линейного источника тепла на верхней границе бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости. Исследование ползущего конвективного течения осуществляется посредством обобщения изотермического класса точных решений Хименца, в котором поля температуры и давления линейны относительно горизонтальной координаты. Приведен анализ полиномиальных решений, описывающих естественную конвекцию жидкости в приближении Стокса. Показано существование точек, в которых поле скоростей обращается в нуль внутри слоя жидкости, что определяет существование застойных точек и противотечений в жидкости. Аналогичные исследования проведены для полей температуры и давления. Показано, что изотермы и изобары из-за структуры рассматриваемого точного решения всегда будут локально параболическими или гиперболическими (иметь бесконечно удаленную точку).

Ключевые слова: противотечение, точное решение, течение Куэтта, течение Хименца, уравнение Обербека–Буссинеска, приближение Стокса, застойная точка, стратификация.

1. Введение

В самых разных теоретических и прикладных научных дисциплинах при решении технических задач часто используется модельное представление конвективного течения жидкости, движущейся между двумя бесконечными недеформируемыми пластинами с заданными скоростями. Если на границах слоя вязкой несжимаемой жидкости задаются скорости, то при изотермическом течении поле скоростей описывается точным решением Куэтта [1]. При изложении данного точного решения используют два подхода. В пользу первого способа представления течения Куэтта говорят, что это решение получено с использованием приближения Стокса для уравнений Навье–Стокса о преобладании вязких сил над инерционными эффектами, возникающими в движущейся жидкости [2]. В пользу второго подхода отметим, что решение Куэтта удовлетворяет нелинейным уравнениям Навье–Стокса, обращая при этом тождественно нулю конвективные (инерционные) слагаемые [1, 3].

С одной стороны, замеченная двойственность при интерпретации течения Куэтта позволяет исследовать нелинейные свойства течения Куэтта в задачах теории устойчивости изотермических течений вязкой несжимаемой жидкости [4–9]. С другой стороны, решение Ку-

эта является первым примером стационарного ползущего течения вязкой несжимаемой жидкости, модификации которого находят применение в практических задачах, для которых также существует необходимость поиска точного решения нелинейной системы Обербека–Буссинеска, а также в приближении Стокса, описывающей конвективное движение несжимаемой жидкости, обладающей диссипативными эффектами [11–26].

В настоящей статье сделана попытка обобщить установившееся классическое решение Куэтта для случая ползущих течений неизотермических вязких несжимаемых жидкостей. Следует отметить, что говоря о течении Куэтта при конвективном перемешивании жидкости, речь прежде всего идет о граничных условиях, задаваемых в виде скоростей на одной или обеих границах бесконечного слоя. Как было показано, в статьях [11, 18–21] для описания ползущих конвективных потоков вместо класса решений Куэтта необходимо использовать точное решение Хименца [27] с дальнейшей линеаризацией уравнений Обербека–Буссинеска. Использование класса Хименца позволяет учесть не только горизонтальную скорость, но и распространение импульсов в поперечном направлении. Кроме того, модификации течения Хименца с успехом применяются в гидродинамике неизотермических высоковязких многослойных жидкостей [28–30].

Отдельный интерес вызывает эффект существования в слое жидкости застойных точек (точек покоя), вызванных учетом горизонтальных градиентов функций скорости, температуры и давления (стратификации в продольном направлении). Впервые точное решение, учитывающее эффект застойных точек при течении жидкости, было исследовано Хименцем [27, 31, 32]. Аналогичные эффекты в океанологии для вращающихся жидкостей были исследованы на начальных этапах Экманом [33]. Течение Экмана было рассмотрено как сдвиговое, т. е. вертикальная компонента скорости тождественно равнялась нулю.

В настоящей работе рассмотрены и проанализированы условия существования застойных точек для заданного теплового источника на верхней границе бесконечного слоя жидкости в зависимости от значений граничных условий. Приведены критерии существования противотечений и условия стратификации полей температуры и давления.

2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое, описывающие влияние температуры на распределение гидродинамических полей, в приближении Буссинеска [2, 34]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g\beta T; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь V_x и V_z – скорости параллельные, соответственно, координатным осям Ox и Oz прямоугольной декартовой системы координат; P – отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости ρ ; T – отклонение от средней температуры; ν , χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропро-

водности жидкости соответственно; g – ускорение свободного падения; β – температурный коэффициент объемного расширения жидкости [2, 34].

Точное решение системы Обербека–Буссинеска (1) будем искать для стационарного случая в виде [12, 20, 31, 35–37]:

$$\begin{aligned} V_x(z) &= U(z) + u_1(z)x, V_z(z) = w(z); \\ P(x, z) &= P_0(z) + P_1(z)x; \\ T(x, z, t) &= T_0(z, t) + T_1(z, t)x. \end{aligned} \quad (2)$$

Поля давления, температуры и горизонтальной скорости (2) линейно зависят от координаты x , что позволяет описывать течения вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые неоднородными распределениями скоростей (напряжений), температуры и давления на одной или обеих границах бесконечного слоя. Класс решений (2) обобщает известное в гидродинамике точное решение Хименца [27].

Подставим класс точных решений (2) в систему Обербека–Буссинеска (1), получим уравнения:

$$\begin{aligned} (U + xu_1)u_1 + (U' + xu_1')w &= -P_1 + \nu(U'' + xu_1''); \\ ww' &= -(P_0' + xP_1') + \nu w'' + g\beta(T_0 + xT_1); \\ (U + xu_1)T_1 + (T_0' + xT_1')w &= \chi(T_0'' + xT_1''); \\ u_1 + w' &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее штрих обозначает производные от функций, входящих в класс (2), по вертикальной (поперечной) координате z . Используя метод неопределенных коэффициентов (линейную независимость функций 1 и x), выпишем отдельно свободные члены и коэффициенты при горизонтальной (продольной) координате x в системе (3):

$$Uu_1 + U'w = -P_1 + \nu U''; \quad (4)$$

$$u_1^2 + u_1'w = \nu u_1''; \quad (5)$$

$$ww' = -P_0' + \nu w'' + g\beta T_0; \quad (6)$$

$$-P_1' + g\beta T_1 = 0; \quad (7)$$

$$UT_1 + T_0'w = \chi T_0''; \quad (8)$$

$$u_1T_1 + T_1'w = \chi T_1''; \quad (9)$$

$$u_1 + w' = 0. \quad (10)$$

Полученная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4)–(10) наследует нелинейные свойства системы (1). Далее рассмотрим случай крупномасштабных конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости, для которых можно пренебречь влиянием инерционных эффектов [2]. Такое допущение можно сделать из-за преобладания вязких сил

$$\nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) = \nu (U'' + xu_1''), \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) = \nu w''$$

над инерционными эффектами

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = (U + xu_1)u_1 + (U' + xu_1')w, V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = ww'.$$

Другими словами, справедливы следующие оценки в силу класса решений (2):

$$\frac{(U + xu_1)u_1 + (U' + xu_1')w}{\nu(U'' + xu_1'')} \ll 1, \frac{ww'}{\nu w''} \ll 1.$$

Такая аппроксимация системы уравнений (1) называется приближением Стокса [2] и является наиболее употребительной при исследовании асимптотик нелинейных течений вязкой несжимаемой жидкости [20–23, 25, 26, 28–30]. Далее выясним, при каких безразмерных параметрах справедливо приближение Стокса для системы (4)–(10).

3. Приведение уравнений к безразмерному виду

Приведем систему уравнений (4)–(10) к безразмерному виду. Для этого выберем следующие масштабные переменные. Горизонтальная координата x характеризуется масштабом $2l$, а вертикальная координата z – толщиной слоя жидкости h . Условие введения двух масштабных переменных длины существенно расширяет классические методы приведения к безразмерным переменным, поскольку позволяет описывать течение жидкости в приближении тонкого слоя [11, 12, 19–26]. Аналогично можно ввести два масштаба для скоростей. Ниже обсудим возможность использовать один базисный масштаб скорости, установив при этом функциональную связь с характерным размером другой компоненты скорости.

Для того чтобы текст статьи не загромождать новыми обозначениями, безразмерные переменные будем обозначать теми же буквами, за исключением координат, а масштабные переменные – в квадратных скобках. В этом случае для однородных слагаемых гидродинамических полей скоростей, давления, температуры, соответственно, масштабные переменные примут следующий вид:

$$[U], [w], [P_0], [T_0].$$

Отдельно распишем приведение к безразмерному виду каждого уравнения системы (4)–(10). Будем учитывать размерность дифференциальных операторов для произвольной функции f в следующем виде [2, 34]:

$$f' \sim \frac{[f]}{h}, \quad f'' \sim \frac{[f]}{h^2}.$$

Для начала рассмотрим обезразмеривание уравнения (7) и получим зависимость безразмерных величин давления и температуры:

$$P'_1 \frac{[P_0]}{lh} = g\beta T_1 \frac{[T_0]}{l}.$$

Определим размерность давления следующим образом:

$$[P_0] = g\beta l [T_0].$$

Тогда уравнение (7) запишем в виде:

$$P'_1 = \delta T_1,$$

где $\delta = \frac{h}{l}$ – параметр геометрической анизотропии слоя вязкой несжимаемой жидкости.

Приведем уравнение (4) к безразмерному виду. Получим следующее выражение:

$$Uu_1 [U] \frac{[U]}{l} + U'w \frac{[U]}{h} [w] = -P_1 \frac{[P_0]}{l} + \nu U'' \frac{[U]}{h^2}.$$

Домножим обе части уравнения на число $\frac{[U]l^2}{\nu}$, получим:

$$Uu_1 \frac{[U]l}{\nu} + U'w \frac{[w]l^2}{\nu h} = -P_1 \frac{[P_0]l}{\nu [U]} + \nu U'' \frac{l^2}{\nu h^2}.$$

Определим размерность скоростей следующим образом:

$$[U] = \frac{[P_0]l}{\nu} = \frac{g\beta [T_0]l^2}{\nu};$$

(11)

$$[w] = \frac{[P_0]h}{\nu} = \frac{g\beta [T_0]lh}{\nu} = \frac{g\beta [T_0]l^2 h}{\nu l}.$$

Таким образом, получим зависимость введенных безразмерных скоростей в следующем виде:

$$[w] = \delta [U]. \quad (12)$$

Подставив введенные размерности в безразмерное первое уравнение системы (4), получим:

$$Uu_1 \frac{g\beta[T_0]l^3}{\nu^2} + U'w \frac{g\beta[T_0]l^3}{\nu^2} = -P_1 + \frac{U''}{\delta^2}.$$

Используя безразмерные критерии подобия гидродинамики, можно записать

$$Uu_1\delta^2\text{Gr} + U'w\delta^2\text{Gr} = -\delta^2 P_1 + U'',$$

где $\text{Gr} = \frac{g\beta[T_0]l^3}{\nu^2}$ – число Грасгофа [2, 34]. Для рассматриваемой задачи число Грасгофа

также можно записать в следующем виде: $\text{Gr} = \frac{[U]l}{\nu}$ (конвективное число Рейнольдса).

Далее сделаем безразмерным уравнение (10) – уравнение несжимаемости:

$$u_1 \frac{[U]}{l} + w' \frac{[w]}{h} = 0.$$

Подставим в это выражение зависимость (12) и получим уравнение в следующем виде:

$$w' + u_1 = 0.$$

Дальше обезразмерим уравнение (5):

$$u_1^2 \frac{[U][U]}{l^2} + u_1'w \frac{[U]}{lh} [w] = \nu u_1'' \frac{[U]}{lh^2}.$$

Упростим выражение с учетом зависимости (12) и получим:

$$u_1^2 \frac{[U]}{l} + u_1'w \frac{[U]}{l} = \nu u_1'' \frac{1}{h^2}.$$

Умножим полученное выражение на $\frac{l^2}{\nu}$ и получим:

$$u_1^2 \delta^2 \text{Gr} + u_1'w \delta^2 \text{Gr} = u_1''.$$

Аналогично обезразмериваем уравнение (6):

$$ww' [w] \frac{[w]}{h} = -P_0' \frac{[P_0]}{h} + \nu w'' \frac{[w]}{h^2} + g\beta T_0 [T_0].$$

Умножаем обе части уравнения на комплекс $\frac{h^2}{\nu[w]}$:

$$ww' \frac{[w]h}{\nu} = -P_0' \frac{[P_0]h}{\nu[w]} + w'' + \frac{g\beta T_0 h^2 [T_0]}{\nu[w]}.$$

Выразим масштабные переменные $[w]$, $[P_0]$ и $[T_0]$ через $[U]$ из выражений (11) и (12) и подставим их в это уравнение. Получим:

$$ww' \frac{\delta[U]h}{\nu} = -P_0' \frac{[U]\nu h}{\nu l \delta[U]} + w'' + \frac{g\beta T_0 h^2 [U]\nu}{\nu \delta[U] g \beta l^2}.$$

Преобразуем выражение и получим окончательный вид:

$$ww' \delta^2 Gr = -P_0' + w'' + T_0 \delta.$$

Следующее обезразмеривание проведем для уравнения (8):

$$UT_1 [U] \frac{[T_0]}{l} + T_0' w \frac{[T_0]}{h} [w] = \chi T_0'' \frac{[T_0]}{h^2}.$$

Упростим выражение и выразим масштабную переменную $[w]$ через $[U]$ из выражения (12) и подставим их в полученное уравнение:

$$UT_1 \frac{[U]}{l} + T_0' w \frac{[U]}{h} \delta = \frac{\chi T_0''}{h^2}.$$

Умножим полученное выражение на $\frac{h^2}{\nu}$ и заменим безразмерным числом Грасгофа:

$$UT_1 \delta^2 Gr + T_0' w \delta^2 Gr = \frac{T_0''}{Pr},$$

где $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля [2, 34].

В последнюю очередь обезразмерим уравнение (9):

$$u_1 T_1 \frac{[U]}{l} \frac{[T_0]}{l} + T_1' w \frac{[T_0]}{lh} = \chi T_1'' \frac{[T_0]}{lh^2}.$$

Проведем преобразования, аналогичные с проведенными для уравнения (8), и получим уравнение:

$$UT_1 \delta^2 Gr + T_1' w \delta^2 Gr = \frac{T_1''}{Pr}.$$

Запишем все безразмерные уравнения в систему:

$$\begin{aligned}
 Uu_1\delta^2\text{Gr} + U'w\delta^2\text{Gr} &= -\delta^2 P_1 + U''; \\
 u_1^2\delta^2\text{Gr} + u_1'w\delta^2\text{Gr} &= u_1''; \\
 ww'\delta^2\text{Gr} &= -P_0' + w'' + T_0\delta; \\
 P_1' &= \delta T_1; \\
 UT_1\delta^2\text{Gr} + T_0'w\delta^2\text{Gr} &= \frac{T_0''}{\text{Pr}}; \\
 UT_1\delta^2\text{Gr} + T_1'w\delta^2\text{Gr} &= \frac{T_1''}{\text{Pr}}; \\
 w' + u_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

В полученной системе (13) будем считать произведение $\delta^2\text{Gr}$ малым, в силу выбора приближения тонкого слоя. Следовательно, можно пренебречь слагаемыми, содержащими множитель $\delta^2\text{Gr}$ (конвективной производной). В результате получим следующую систему уравнений, записанную в том порядке, в котором будет осуществляться ее интегрирование:

$$\begin{aligned}
 T_0'' = 0, \quad T_1'' = 0, \quad P_1' &= \delta T_1; \\
 U'' = \delta^2 P_1, \quad u_1'' = 0, \quad w' + u_1 &= 0; \\
 P_0' &= w'' + T_0\delta.
 \end{aligned} \tag{14}$$

4. Решение краевой задачи

Последовательное интегрирование систем уравнений (14) позволяет получить общее решение для полей скоростей, температуры и давления, которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= C_1 z + C_2, \quad T_1 = C_3 z + C_4; \\
 P_1 &= \delta \left(C_3 \frac{z^2}{2} + C_4 z \right) + C_5; \\
 U &= \delta^2 \left[\delta \left(C_3 \frac{z^4}{4!} + C_4 \frac{z^3}{3!} \right) + C_5 \frac{z^2}{2} \right] + C_6 z + C_7; \\
 u_1 &= C_8 z + C_9, \quad w = - \left(C_8 \frac{z^2}{2} + C_9 z \right) + C_{10}; \\
 P_0 &= -C_8 z - C_9 + \delta \left(C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z \right) + C_{11}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для вычисления частного решения системы (14), описывающего конвекцию вязкой несжимаемой жидкости при задании теплового источника на верхней границе горизонтального слоя, сформулируем граничные условия. Безразмерная толщина слоя жидкости равна единице, а поперечная координата принадлежит множеству $0 \leq z \leq 1$.

На нижней (твердой) границе при $z = 0$ выполняются условия прилипания:

$$V_x(0) = V_z(0) = 0.$$

Следовательно, в силу структуры класса решений (2) условие прилипания записывается следующим образом:

$$U = w = u_1 = 0. \quad (16)$$

На верхней границе ($z = 1$) задано безразмерное неоднородное распределение горизонтальной скорости

$$V_x(1) = W + \Omega x.$$

Следовательно, выполняются равенства:

$$U(1) = W, \quad u_1(1) = \Omega. \quad (17)$$

Запишем краевые условия для температуры и давления. Нижняя граница является изотермической, на которой задана отсчетная температура. Без ограничения общности отсчет ведется от нулевого значения:

$$T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = 0. \quad (18)$$

На верхней границе задан тепловой источник $V_x = A + Bx$ и распределено давление:

$$T_0(1) = A, \quad T_1(1) = B, \quad P_0(1) = S, \quad P_1(1) = 0. \quad (19)$$

Точное решение уравнений (14) с граничными условиями (16)–(19) имеют вид:

$$T_0 = Az, \quad T_1 = Bz;$$

$$P_1 = \frac{\delta B}{2}(z^2 - 1);$$

$$U = \frac{\delta^3 B z}{4!}(z^3 - 6z + 5) + Wz; \quad (20)$$

$$u_1 = \Omega z, \quad w = -\frac{\Omega z^2}{2};$$

$$P_0 = \frac{\delta A}{2}(z^2 - 1) + \Omega(1 - z) + S.$$

5. Анализ точного решения

Проанализируем полученные решения (20). Отметим, что функции T_0 и T_1 изменяются по линейному закону с различными коэффициентами пропорциональности, а поведение функций (возрастание или убывание) определяется граничными условиями (рис. 1 а). Такая же ситуация с градиентом давления P_1 (рис. 1 б). Изолинии температуры, являющие гиперболами, приведены на рис. 2.

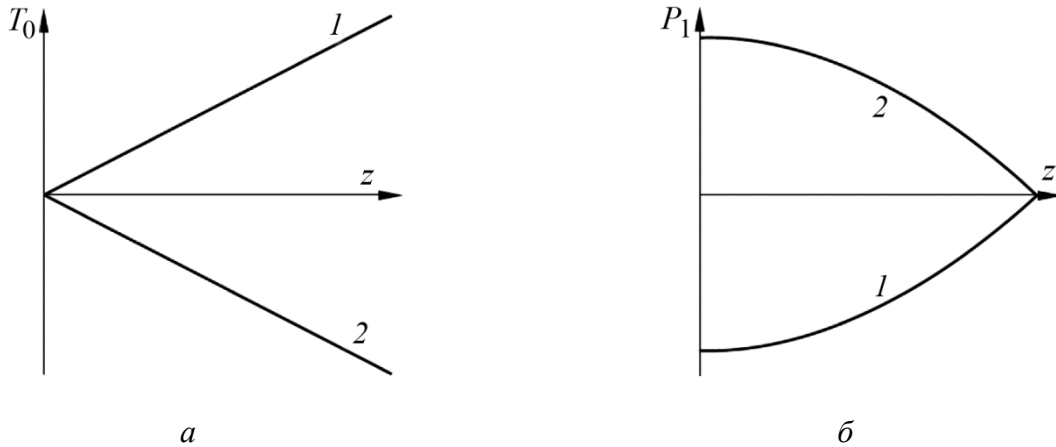


Рис. 1. Графики: а – T_0 (прямая 1 – $A > 0$; прямая 2 – $A < 0$); б – P_1 (прямая 1 – $B > 0$; прямая 2 – $B < 0$), при различных граничных условиях

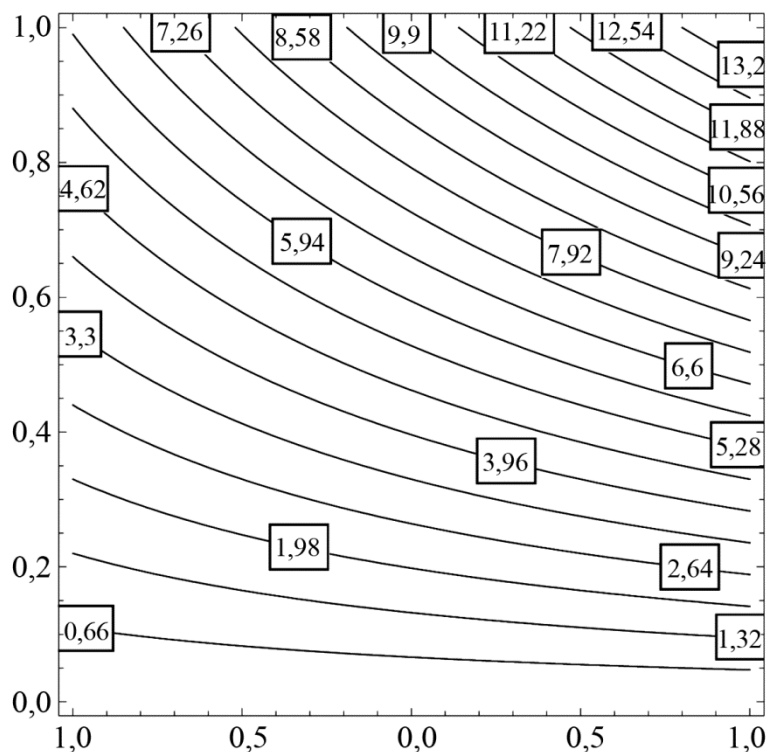


Рис. 2. Изолинии температуры

Скорость V_z и составляющая градиента V_x по горизонтальной координате не зависят от способа нагрева (положительные или отрицательные значения температуры на границе слоя). При $\Omega > 0$ скорость V_z монотонно убывает по квадратичному закону по толщине слоя (функция

u_1 линейно возрастает). В этом случае жидкость оттекает от верхней границы. Отток жидкости обусловлен растеканием жидкости в горизонтальном направлении (рис. 3 б). При противоположном значении ($\Omega < 0$) наблюдается монотонное возрастание скорости V_z (u_1 линейно убывает), что говорит об испарении жидкости с верхней границы бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости (рис. 3 а).

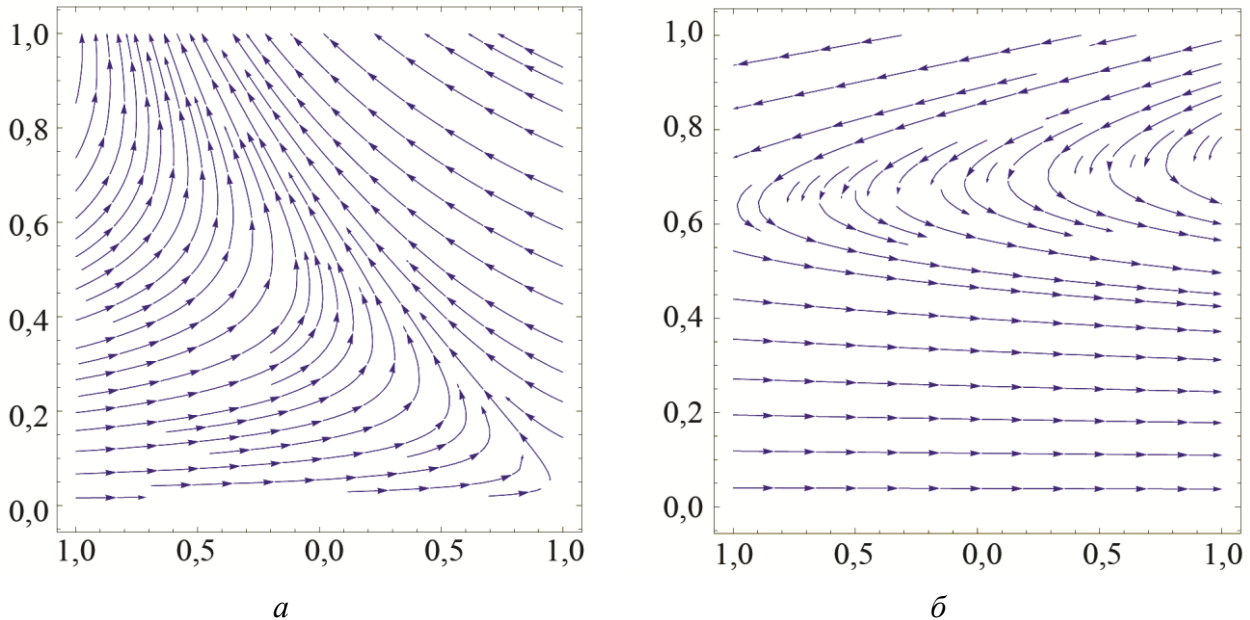


Рис. 3. Линии тока при различных граничных значениях ($a - \Omega < 0$; $b - \Omega < 0$)

Проанализируем однородную компоненту скорости U , параллельную оси абсцисс. Запишем функцию U в следующем виде:

$$U = z \left[\frac{\delta^3 B}{4!} (z^3 - 6z + 5) + W \right].$$

При $W = 0$ функция U принимает вид:

$$U = \frac{\delta^3 B}{4!} [z(z-1)(z^2 + z - 5)].$$

Данная функция имеет два нуля на области определения, которые являются граничными точками: $z = 0$ и $z = 1$. Очевидно, что во внутренних точках слоя жидкости скорость сонаправлена оси абсцисс, принимая максимальное значение $U = 1,07607 \frac{\delta^3 B}{24}$ для $z = 0,446298$. В том случае, если $W = 0$, то U принимает только положительные значения внутри слоя, а нулевое значение имеет только на твердой границе (условие прилипания). Если задать скорость, направление которой противоположно оси абсцисс ($W < 0$), могут существовать застойные точки (скорость принимает нулевые значения). Анализ функции U показывает, что возможна только одна точка, в которой скорость может обратиться в нуль во внутренних точках области определения U . Реализация этого случая определяется неравенством

$$\frac{5\delta^3 B}{24} + W > 0.$$

В этом случае скорость U имеет застойную точку и принимает как положительные, так и отрицательные значения, достигая при этом максимального значения внутри слоя.

При выполнении противоположного неравенства скорость U будет отрицательна, монотонно убывая на всей области определения (минимум достигается на верхней границе) (рис. 4 б).

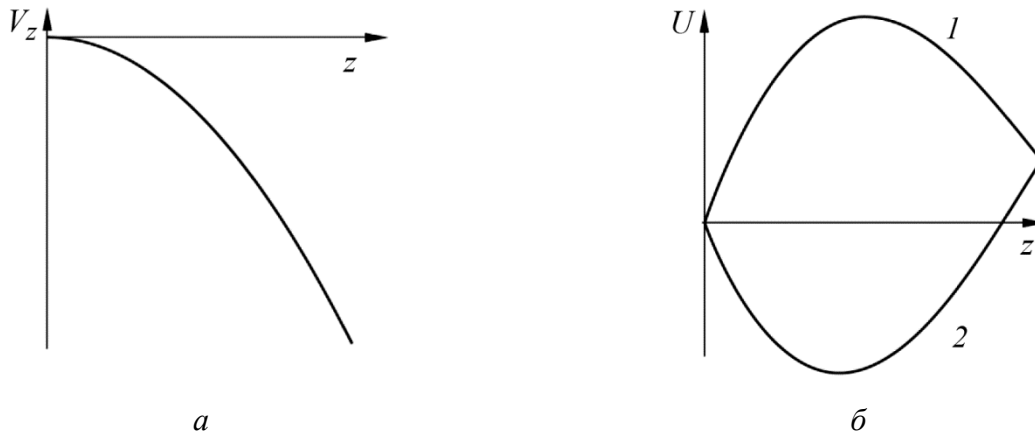


Рис. 4. График функций компонент скорости V_z и U при различных граничных условиях

Завершаем исследование решений, описывающих конвективное течение Куэтта-Хименца при линейном распределении температуры на верхней границе, анализом приведенного давления P_0 . При выполнении неравенства

$$S < \frac{\delta A}{2} - \Omega$$

давление, отнесенное к плотности, может принимать нулевое значение внутри слоя жидкости. Следовательно, могут существовать при подходящем выборе граничных условий области положительного и отрицательного давления. Отметим, что давление на недеформируемой (нижней) границе может быть меньше, чем на верхней границе. Это возможно при выполнении неравенства

$$\Omega < \frac{\delta A}{2}.$$

Если строго выполняется противоположное неравенство, то давление на нижней границе (как и в случае гидростатического равновесия) будет больше, чем на свободной поверхности. При выполнении равенства давление принимает одинаковые значения на границе, а внутри слоя оно одного знака (положительное). График функции P_0 показан на рис. 5. Изолинии давления показаны на рис. 6.

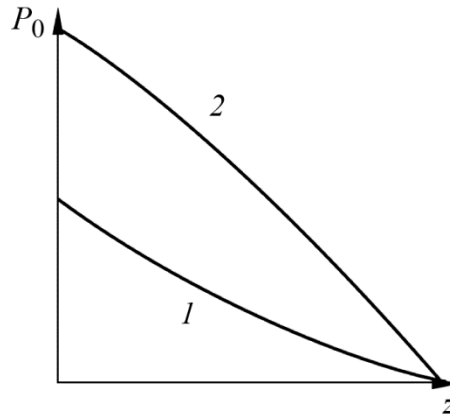


Рис. 5. График функции P_0 (прямая 1– $A > 0$; прямая 2– $A < 0$)

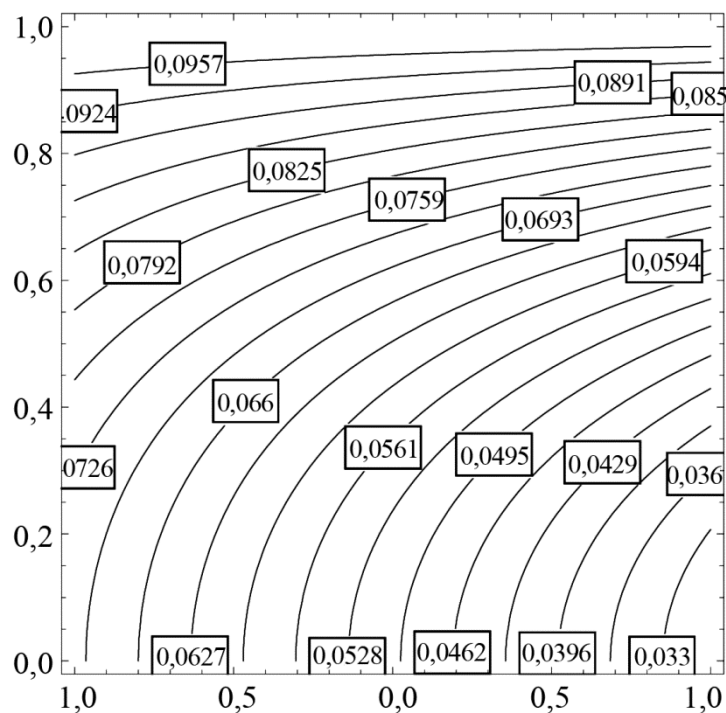


Рис. 6. Изолинии давления

Исследование изобар показывает, что они всегда имеют бесконечно удаленную точку (являются локально гиперболическими или параболическими). Невозможность существования замкнутых изолиний давления обусловлена структурой рассматриваемого точного решения (2) – линейностью поля давления от горизонтальной координаты.

6. Заключение

В настоящей статье получено обобщение установившегося классического решения Куэтта для неизотермических вязких несжимаемых жидкостей. Изучен линейный случай распределения температуры на свободной границе. Показано существование «застойных» точек у гидродинамических полей при определенных ограничениях на физические постоянные и граничные условия. Посредством методов локализации корней у полиномиальных решений изучены качественные и количественные свойства полученных точных решений в классе линейно растущих скоростей по горизонтальным координатам.

Литература

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21 – P. 433–510.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. – Т. 6. Гидродинамика, 5-е изд. – М. : Физматлит, 2006. – 736 с.
3. Drazin P. G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
4. Boronin S. A. Stability of the plane Couette flow of a disperse medium with a finite volume fraction of the particles // Fluid Dynamics. – 2011. – Vol. 46. – P. 64–71. – DOI: 10.1134/S0015462811010078.
5. Georgiyevskii D. V. Generalized Joseph Estimates of Stability of Plane Shear Flows with Scalar Nonlinearity // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2011. – Vol. 75, no. 1. – P. 149–152. – DOI: 10.3103/S1062873810121044.
6. Zhuk V. I., Protsenko I. G. Asymptotic model for the evolution of perturbations in the plane Couette-Poiseuille flow // Doklady Mathematics. – 2006. – Vol. 74, no. 3. – P. 896–900. – DOI: 10.1134/S1064562406060287.
7. Rudyak V. Ya., Isakov E. B., Bord E.G. Instability of plane Couette flow of two-phase liquids // Technical Physics Letters. – 1998. – Vol. 24. – P. 199–200. – DOI: 10.1134/1.1262051.
8. Troshkin O. V. Nonlinear stability of Couette, Poiseuille and Kolmogorov plane channel flows // Doklady Mathematics. – 2012. – Vol. 85, no. 2. – P. 181–185. – DOI: 10.1134/S1064562412020068.
9. Shalybkov D. A. Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow // Physics-Uspekhi. – 2009. – Vol. 52, no. 9. – P. 915–935. – DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971.
10. Абрамян А. К., Миранцев Л. В., Кучмин А. Ю. Моделирование течения Куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 4. – С. 3–21.
11. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51. – P. 581–587. – DOI: 10.1134/S001546281605001X.
12. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theor. Found. Chem. Eng. – 2016. – Vol. 50, no. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
13. Babkin V. A. Plane Turbulent Couette Flow // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Vol. 76, iss. 6. – P. 1251–1254. – DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.c6.
14. Беляева Н. А., Кузнецов К. П. Анализ нелинейной динамической модели течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 2 (27). – С. 85–92. – DOI: 10.14498/vsgtu1018.
15. Gavrilenko S. L., Shil'ko S. V., Vasin R. A. Characteristics of a viscoplastic material in the couette flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2002. – Vol. 43, iss. 3. – P. 439–444. – DOI: 10.1023/A:1015378622918.
16. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2012. – № 1. – С. 119–133.
17. Malyshev V. A., Manita A. D. Stochastic Micromodel of the Couette Flow // Theory of Probability & Its Applications. – 2009. – Vol. 53, iss. 4. – P. 716–727. – DOI: 10.1137/S0040585X97983924.
18. Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P. Couette Problem for Kelvin-Voigt Medium // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 186, iss. 3. – P. 495–510. – DOI: 10.1007/s10958-012-1003-0.
19. Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких жидкостей. – Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. – 156 с.
20. Aristov S. N., Privalova V. V., Prosviryakov E. Y. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2016. – Vol. 12, no. 2. – P. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.

21. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118.
22. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2014. – № 3. – С. 7–12.
23. Аристов С. Н., Власова С. С., Просвирыков Е. Ю. Линейная конвекция Бенара–Марангони при квадратичном нагреве сверху плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Ползуновский вестник. – 2014. – № 4–2. – С. 95–102.
24. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.
25. Vlasova S. S., Prosviryakov E. Y. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary // Russian Aeronautics. – 2016. – Vol. 59, no. 4. – P. 529–535. – DOI: 10.3103/S1068799816040140.
26. Vlasova S. S., Prosviryakov E. Yu. Two-dimensional convection of an incompressible viscous fluid with the heat exchange on the free border // Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2016. – Vol. 20, no. 3. – P. 567–577. – DOI: 10.14498/vsgtu1483.
27. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeit-sstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // Dingler's Politech. J. – 1911. – Vol. 326. – P. 321–324.
28. Andreev V. K., Cheremnykh E. N. 2D thermocapillary motion of three fluids in a flat channel. Journal of Siberian Federal University // Mathematics and Physics. – 2016. – Vol. 9, iss. 4. – P. 404–415. – DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-4-404-415.
29. Andreev V. K., Cheremnykh E. N. The joint creeping motion of three viscid liquids in a plane layer: A priori estimates and convergence to steady flow // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2016. – Vol. 10, no. 1. – P. 7–20. – DOI: 10.1134/S1990478916010026.
30. Андреев В. К., Собачкина Н. Л. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях. – Красноярск : СФУ, 2012. – 187 с. – ISBN 978–5–7638–2372–1.
31. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyandin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, no. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
32. Pukhnachev V. V. Group Properties of the Navier-Stokes Equations in a Plane Case // Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. – 1960. – No. 1. – P. 83–90.
33. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents // Ark. Mat. Astron. Fys. – 1905. – Vol. 2, no. 11. – P. 1–52.
34. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – Москва : Наука, 1972. – 392 с.
35. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
36. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1989. – Vol. 30, no. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
37. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.