

DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2

Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

<http://dream-journal.org>

2,2021

March-April

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Mitko M. Mihovski (Bulgaria)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Kononov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Yury V. Subachev (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Elena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D., (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазиский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)
Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

CONTENTS

| | |
|--|----|
| Guzanov B. N., Pugacheva N. B., Bykova T. M. Erosion resistance of a combined multi-layer coating protecting critical parts of modern gas turbine engines | 6 |
| Prosviryakov E. Yu. Gravitational principle of minimum pressure for incompressible flows | 22 |
| Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid | 30 |
| Artemov M. A. and Baranovskii E. S. An extremum problem for a linear integro-differential system describing creeping flows of a viscoelastic fluid | 52 |
| Nazarov V. V. Selection of complex equivalent stress for two different variants of the plane stress state | 64 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Гузанов Б. Н., Пугачева Н. Б., Быкова Т. М. Эрозионная стойкость комбинированного многослойного покрытия для защиты ответственных деталей современных ГТД | 6 |
| Просвиряков Е. Ю. Гравитационный принцип минимума давления в течениях несжимаемой жидкости | 22 |
| Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения уравнений Навье–Стокса для описания изобарического однонаправленного вертикально завихренного течения жидкости | 30 |
| Артемов М. А., Барановский Е. С. Экстремальная задача для линейной интегродифференциальной системы, описывающей ползущее течение вязкоупругой жидкости | 52 |
| Назаров В. В. Выбор сложного эквивалентного напряжения для двух различных вариантов плоского напряженного состояния | 64 |

Received: 14.03.2021

Revised: 16.04.2021

Accepted: 23.04.2021

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.006-021

EROSION RESISTANCE OF A COMBINED MULTILAYER COATING PROTECTING CRITICAL PARTS OF MODERN GAS TURBINE ENGINES



B. N. Guzanov^{1, a)}, N. B. Pugacheva^{2, b)}, T. M. Bykova^{2, c)}*



¹Russian State Vocational Pedagogical University,



11 Mashinostroiteley St., Ekaterinburg, 620012, Russian Federation

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

a)  <http://orcid.org/0000-0001-5698-0018>  guzanov_bn@mail.ru;

b)  <http://orcid.org/0000-0001-8015-8120>  nat@imach.uran.ru;

c)  <http://orcid.org/0000-0002-8888-6410>  tatiana_8801@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: tatiana_8801@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 43; fax: +7 (343) 374 53 30

Comprehensive studies of the chemical composition, microstructure, and thickness of a combined multilayer coating on a heat-resistant nickel alloy are presented. The distribution pattern of chemical elements over the coating thickness for all the layers, namely the inner aluminosilicated layer, the plasma sublayer, and the outer heat-insulating layer, has been established. Surface roughness was determined at all the stages of coating application and after testing.

The results of comparative tests of corrosion-erosion resistance and resistance to burn-through of a diffusion aluminosilicide coating, a two-layer heat-insulating coating, and a combined multilayer coating are presented. High heat-shielding properties of a combined multilayer coating on a heat-resistant nickel alloy have been discovered.

Keywords: steel, coating, microstructure, roughness, microhardness, erosion resistance.

Acknowledgment

The research used the facilities of the Plastometriya shared access center at the IES UB RAS. It was performed according to the state assignment on theme No. AAAA-A18-118020790145-0.

References

1. Babkin V.I., Tskhovrebov M.M., Solonin V.I., Lanshin A.I. Development of aviation gas turbine engines and the creation of unique technologies. *Engine*, 2013, No. 2 (86), pp. 2–7. (In Russian).
2. Guzanov B.N., Kositsyn S.V., Pugacheva N.B. *Uprochnyayushchie zashchitnye pokrytiya v mashinostroenii* [Reinforcing Protective Coatings in Mechanical Engineering]. Yekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2004, 244 p. ISBN: 5-7691-1405-3. (In Russian).
3. Kositsyn S.V. *Splavy i pokrytiya na osnove monoaluminida nikelya* [Alloys and Coatings Based on Nickel Monoaluminide]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2008, 377 p. (In Russian).
4. Muboyadzhan S.A., Lesnikov V.P., Kuznetsov V.P. *Kompleksnyye zashchitnye pokrytiya turbinnykh lopatok aviatsionnykh GTD* [Complex protective coatings for turbine blades of aircraft GTE]. Ekaterinburg, Izd. "Kvist" Publ., 2008, 208 p. ISBN: 5-900474-60-7. (In Russian).
5. Movchan B.A., Malashenko I.S. *Zharostoykie pokrytiya, osazhdaemye v vakuume* [Vacuum-Deposited Heat-Resistant Coatings]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983, 232 p.

6. Budinovsky S.A., Muboyadzhyan S.A., Gayamov A.M., Matveev P.V. Development of Ion-Plasma Refractory Metallic Layers of Heat-Insulating Coatings for Cooled Turbine Rotor Blades. *Metal Science and Heat Treatment*, 2014, vol. 55, pp. 652–657. DOI: 10.1007/s11041-014-9684-2.
7. Tarasenko Yu.P., Tsareva N.N., Berdnik O.B. The structure and physical-mechanical properties of the heat-resistant Ni-Co-Cr-Al-Y intermetallic coating obtained using rebuilt plasma equipment. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2014, vol. 21, No. 5, pp. 641–650. DOI: 10.1134/S0869864314050138.
8. Pugacheva N.B., Mazaeva E.S. Protective properties of high-temperature combined coatings. *Fizika i Khimiya Obrabotki Materialov*, 2001, No. 4, pp. 82–89.
9. Guzanov B.N., Obabkov N.V., Migacheva G.N. Development and research of multi-layer composite coatings high temperature. *Sciences of Europe*, 2017, No. 16 (16), pp. 261–26.
10. Sivakumar R., Mordike B.L. High temperature coatings for gas turbine blades: a review. *Surface and Coatings Technology*, 1989, vol. 37, No. 2, pp. 139–160. DOI: 10.1016/0257-8972(89)90099-6.
11. Guzanov B.N., Kositsin S.V., Salamatov E.S. Laser treatment of heat-resistant protective coatings. *Protective Coatings on Metals*, 1990, No. 24, pp. 76–80.
12. Matveev P.V., Budinovskiy S.A. Influence of vacuum annealing on structure of ion-plasma coatings made with double aluminizing technology. *Proceedings of VIAM*, 2016, No. 3 (39), pp. 8. DOI: 10.18577 / 2307-6046-2016-0-3-8-8. (In Russian).
13. Kadyrmetov A.M. Research of plasma spray application and strengthening of coatings and ways of quality management of plasma coatings. *Scientific journal KuBG AU*, 2012, No. 81 (7), pp. 1–18. (In Russian).
14. Pugacheva N.B. Modern trends in the development of heat-resistant coatings based on iron, nickel and cobalt aluminides. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2015, No. 3, pp. 51–82. DOI: 10.17804 / 2410-9908.2015.3.051-082.
15. Stecura S. Optimization of the NiCrAl-Y/ZrO-Y₂O₃ thermal barrier system. *NASA Technical Memorandum*, NASA/TM-86905, 1985, 26 p. Available at: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19850007569.pdf> (24.01.2019).
16. Hille T.S., Turteltaub S., Suiker A.S.J. Oxide growth and damage evolution in thermal barrier coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, No. 78, iss. 9, pp. 2139–2152. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.04.003.
17. Zhu D., Miller R.A. Thermal Conductivity and Sintering Behavior of Advanced Thermal Barrier Coatings. *NASA / TM-2002-211481*, 2002, 15 p.
18. Lesnikov V.P., Kuznetsov V.P., Konakova I.P., Moroz E.V. Design of integrated protective coatings for single-crystal turbine blades modern cooled GTE. *Bulletin of the Samara State Aerospace University*, 2012, No. 3–1 (34), pp. 211–215. DOI: 10.18287/2541-7533-2012-0-3-1(34)-211-216. (In Russian).
19. Guzanov B.N., Pugacheva N.B., Alekseev V.D., Slukin E.Yu. Features of creating combined heat-resistant coatings for high-temperature parts. *Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science*, 2020, vol. 22, No 3, pp. 12–19. DOI: 10.15593/2224-9877/ 2020.3.02. (In Russian).
20. Guzanov B.N., Pugacheva N.B., Slukin E.Yu., Bykova T.M. Technology of obtaining composite conglomerate powders for plasma spraying of high-temperature protective coatings. *Obrabotka metallov (tekhnologiya, oborudovanie, instrumenty) - Metal Working and Material Science*, 2021, vol. 23, No 1, pp. 6–20. DOI: 10.17212/1994-6309-2021-23.1-6-20. (In Russian).
21. Lepesh G.V., Moiseev E.N. Assessment of methods for protecting the metal surface from high-temperature erosion. *Technical and technological problems of service*, 2017, No. 3 (41), pp. 20–31. (In Russian).
22. Markova T.V., Kryzhanovskaya I.M. Sherokhovatost' poverkhnostey: Metodicheskie ukazaniya [Roughness of surfaces: Methodology instructions]. St. Petersburg, Izd-vo SPbGTU Publ., 2006, 32 p. (In Russian).

Подана в журнал: 14.03.2021

УДК 621.793:620.197

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.006-021



ЭРОЗИОННАЯ СТОЙКОСТЬ КОМБИНИРОВАННОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ОТВЕТСТВЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ СОВРЕМЕННЫХ ГАЗОВО-ТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ



Б. Н. Гузанов^{1, а)}, Н. Б. Пугачева^{2, б)}, Т. М. Быкова^{2, в)*}



¹Российский государственный профессионально-педагогический университет,
11, ул. Машиностроителей, г. Екатеринбург, 620012, Российская Федерация

²Институт машиноведения УрО РАН,

34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620049, Российская Федерация

а)  <http://orcid.org/0000-0001-5698-0018>  guzanov_bn@mail.ru;

б)  <http://orcid.org/0000-0001-8015-8120>  nat@imach.uran.ru;

в)  <http://orcid.org/0000-0002-8888-6410>  tatiana_8801@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: tatiana_8801@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 362–30–43; факс: +7 (343) 374–53–30

Представлены комплексные исследования химического состава, микроструктуры и толщины комбинированного многослойного покрытия на жаропрочном никелевом сплаве. Установлен характер распределения химических элементов по толщине покрытия, всех слоев: внутреннего алюмосилицированного слоя, плазменного подслоя и внешнего теплоизоляционного. Определена шероховатость поверхности на всех стадиях нанесения покрытия и после испытаний.

Приведены результаты сравнительных испытаний эрозионной стойкости диффузионного алюмосилицидного покрытия, двухслойного теплоизоляционного покрытия и комбинированного многослойного покрытия. Установлены высокие теплозащитные свойства комбинированного многослойного покрытия на жаропрочном никелевом сплаве.

Ключевые слова: сталь, покрытие, микроструктура, шероховатость, микротвердость, эрозионная стойкость.

1. Введение

Постоянное повышение температуры газового потока на входе в газовые турбины является основной тенденцией развития современного газотурбостроения. Это неизбежно приводит к увеличению уровня термических напряжений ответственных элементов конструкций в условиях жесткого температурно-силового напряжения и тем самым оказывает негативное влияние на надежность и ресурс газотурбинной установки (ГТУ) в целом. Стремление повышать КПД силовых и маршевых энергетических установок привело к значительному возрастанию температуры продуктов сгорания топлива перед турбиной, что составляет от 1000 до 1315 °С, при этом скорость потока горячих газов достигла значения примерно 300 м/сек. [1]. Все это определило возникновение ряда проблем, образовавшихся в процессе совершенствования современных ГТУ, среди которых приоритетным направлением считается обеспечение требуемой надежности и долговечности.

Рабочие и сопловые лопатки ГТУ работают в максимально сложных условиях воздействия. Это, главным образом, циклически-меняющиеся рабочие температуры и напряжения, вызывающие термомеханическую усталость и коррозионно-эрозионные разрушения поверхностного слоя скоростным газовым потоком. Для повышения надежности газовых турбин

все более широко применяют новые жаропрочные сплавы. В них за счет применения качественно новых технологий направленной кристаллизации, оптимально подобранных систем легирования и последующей термической обработки удается решить проблему увеличения сопротивляемости деформациям и разрушению лопаток при действии высоких температур и напряжений. Актуальным остается применение термобарьерных защитных покрытий для надежной защиты от разрушения контактных поверхностей под действием газовой коррозии и эрозии.

Основными направлениями создания новых высокотемпературных покрытий прежде всего являются оптимизация химического состава новых композиций [2–4], а также разработка новых технологических процессов [5–7], основанных на использовании принципиально новых физических эффектов при создании многослойных комбинированных покрытий [8–10] и специальных технологий их последующей финишной обработки [11–13]. В основном используют жаростойкие покрытия системы Me-Cr-Al, где в качестве Me используют Fe, Ni и Co, а для газовой турбины двигателей (ГТД) применяют систему Ni-Cr-Al [14]. Несмотря на высокую жаростойкость сплавов системы Ni-Cr-Al этого оказалось недостаточно для турбинных лопаток. В настоящее время требуются покрытия, которые способны длительно работать при температуре металла до 1300 °С под нагрузкой, обеспечивая надежную теплозащиту. Наиболее приемлемым для этих целей можно считать разработку и применение термобарьерных металлических и металлокерамических многослойных защитных покрытий [15–17].

В настоящее время накоплены обширные литературные данные по использованию многослойных покрытий на основе интерметаллидов NiAl и CoAl, это позволяет сформулировать общие закономерности их повреждений и определить возможные пути повышения долговечности. Но несмотря на многолетний опыт эксплуатации выбор защитного термобарьерного покрытия для турбинных лопаток конкретных ГТД весьма затруднен и должен быть индивидуальным для каждого двигателя [18]. Кроме того, необходимо учитывать, что современную систему защиты с заданным ресурсом в условиях совместного коррозионно-эрозионного воздействия скоростного потока газообразных продуктов сгорания топлива на контактную поверхность лопаточного аппарата турбины возможно получить только с использованием комбинаций разных технологий, в частности термодиффузионной и плазменной, которые дополняют друг друга в качестве самостоятельных элементов защиты.

С учетом сказанного для защиты соплового аппарата маршевого реактивного газотурбинного двигателя было разработано комбинированное теплозащитное трехслойное покрытие [19]. Покрытие состоит из трех последовательно нанесенных слоев с использованием различных технологий и специально разработанных порошковых смесей. Первый термодиффузионный алюмосилицированный слой (ДП) должен обеспечивать высокую жаро- и коррозионную стойкость и диффузионную стабильность всего покрытия в целом. Второй плазменный слой Ni-Cr-Al-Y (ПМ) является функциональным подслоем, который обладает достаточно высокой термостойкостью и обеспечивает хорошую адгезию керамического внешнего слоя с контактной поверхностью. Внешний третий керамический слой на основе оксидов $ZrO_2 + Y_2O_3$ (ПК) исполняет роль теплозащитного покрытия, т. е. снижает температуру поверхности сплава лопатки, в то же время на должном уровне, сопротивляясь эрозионному воздействию запыленного скоростного потока газообразных продуктов сгорания топлива.

Ранее выполненные исследования стойкости покрытия к высокотемпературному окислению (ВТО) и высокотемпературной коррозии (ВТК) [2, 14] показали, что только последовательно сформированное трехслойное покрытие регламентированного состава и толщины позволило получить градиентную комбинированную композицию, которая обладает высокими защитными свойствами, особенно ярко проявляющимися в условиях коррозионного воздействия сульфата и хлорида натрия.

Оценивая надежность и ресурс работы защитной композиции, необходимо учитывать, что сопловые и рабочие лопатки ГТД эксплуатируются в сложных условиях, когда окисление и коррозия поверхностных слоев контактных поверхностей подобных рабочих элементов турбины сопровождается интенсивным эрозионным воздействием скоростного газового потока продуктов сгорания жидкого, газообразного либо твердого порошкового топлива [10, 13]. Эрозионное питтинговое разрушение тонкого поверхностного слоя лопаток, особенно на входных кромках может значительно ускорять процессы окисления, вызывая растрескивание и осыпание окалина и тем самым провоцируя ускорение разрушения [21]. В связи с этим важным является проведение испытаний эрозионной стойкости защитных покрытий.

Цель данной работы заключалась в сравнительном анализе эрозионной стойкости и характера повреждений каждого из последовательно нанесенных слоев комбинированного трехслойного покрытия.

2. Материалы и методы исследования

2.1. Методы нанесения покрытий

Покрытия были нанесены на жаропрочный никелевый сплав марки ЭП975 ИД (ЖС6УД-ИД), который используется для изготовления дисков и лопаточного аппарата газотурбинных двигателей.

Химический состав сплава ЭП975 ИД, мас. %:

| | | | | | | |
|----------|---------|-----------|----------|---------|----------|---------|
| C | Cr | Co | W | Al | Ti | Nb |
| 0,1–0,16 | 7,5–9 | 14,1–17,0 | 9,5–11,0 | 4,5–5,1 | 2,0–2,7 | 1,0–2,0 |
| Fe | Mo | Ce | Si | S | P | Ni |
| до 1 | 0,8–1,5 | до 0,03 | до 0,4 | до 0,01 | до 0,015 | Остал. |

Покрытия были получены последовательным нанесением: первый слой – термодиффузионное покрытие Al-Si-P3M, второй – плазменный слой Ni-Cr-Al-Y и третий – внешний керамический слой $ZrO_2+Y_2O_3$. Термодиффузионное покрытие Al-Si-P3M наносили в порошковой смеси следующего состава: 98 мас. % порошка сплава 49Fe-28Al-17Si-6P3M и 2 мас. % активатора AlF_3 при температуре 950 °С в течение 6 ч в герметичном контейнере с плавким затвором. Для придания необходимой шероховатости и очистки поверхности от пленок окислов перед нанесением второго слоя проводили подготовку поверхности образцов и лопаток. Поверхность обрабатывали путем обдува электрокорундом плавленным белым, размер частиц 315–500 мкм. После струйно-абразивной обработки образцы и лопатки обдували сухим сжатым воздухом для удаления дисперсных частиц абразива.

Второй и третий слой наносили с помощью плазменного порошкового напыления в камере низкого давления на установке 15-ВБ-01 по режиму: $I = 200A$, $L = 110$ мм; $Q_{Ar} = 0,6$ л/с; $Q_{N_2} = 0,3$ л/с; $Q_{Tp} = 0,15$ л/с. По данному режиму в подслое обеспечивается минимум пористости – 4–5 % и максимальное значение прочности сцепления с алюмосилицированным слоем (не ниже 30 МПа) и с керамическим слоем $ZrO_2 + 8 \% Y_2O_3$ (не ниже 10 МПа). Плазменный металлический подслой наносили с использованием гранулированного порошка Ni-22Cr-16Al-1Y, получаемого по специально разработанной технологии [20]. Для плазменного напыления теплозащитного слоя использовали порошок ЦИ-8 ($ZrO_2 + 8 \% Y_2O_3$). Перед напылением порошок ЦИ-8 классифицировали на ситах с выделением фракции 40–100 мкм и прокаливали в муфельной печи при температуре 800 °С в течение 3 ч.

2.2. Методы исследования структуры и состояния поверхности

Микроструктуру и микрорентгеноспектральный анализ распределения элементов в покрытиях выполняли на сканирующем электронном микроскопе TESCAN VEGA II XMU

при увеличениях до 2 тыс. с помощью системы энергодисперсионного (ЭДС) микроанализа INCA ENERGY 450 с ADD детектором с программным обеспечением INCA. На этом же микроскопе оценивали состояние поверхности образцов с покрытиями после испытаний на прожиг. Шероховатость поверхности образцов с покрытиями и после их испытаний на прожиг оценивали с помощью трехмерно отображающего анализатора поверхности Wyko NT-1100 – оптического интерферометрического профилометра с программным комплексом Veeco. Микротвердость измеряли на приборе LEICA VMHT AUTO при нагрузке 50 г по требованиям ГОСТ 2999–75, ГОСТ 9450–76 и ГОСТ Р ИСО 6507-1–2007. На этом же приборе с помощью программного обеспечения Materials Workstation определяли пористость покрытия методом количественной металлографии на нетравленных поверхностях шлифов.

Все исследования проведены на оборудовании Центра коллективного пользования Института машиноведения УрО РАН.

2.3. Методы исследования эрозионной стойкости

Испытания эрозионной стойкости образцов с покрытиями проведены в условиях воздействия высокотемпературного газового потока на аэродинамическом стенде с разогревом газа в ВЧД-плазматроне кафедры экспериментальной физики Физико-технологического института УрФУ. Схема установки представлена на рис. 1.

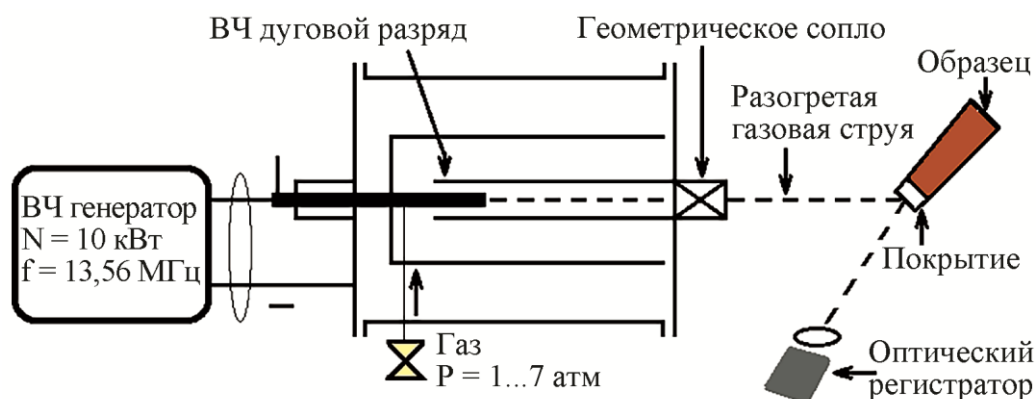


Рис. 1. Схема установки аэродинамического стенда с разогревом газа в ВЧД-плазматроне

Параметры газовой струи приведены в табл. 1. Образцы устанавливали на оси потока под углом к оси, что повышало качество визирования поверхности образца оптическим регистратором. Расстояние от среза сопла устанавливали на основании тарировочных данных и определяли необходимым значением температуры на поверхности образца при испытании. Регулировку температуры проводили как изменением расстояния от среза сопла, так и дополнительной подачей холодного газа через дренажные отверстия в камере смешивания перед соплом.

Таблица 1 – Основные параметры газовой струи

| | | |
|---|---------------------------------|--------------|
| 1 | Газовая среда | Воздух |
| 2 | Давление в камере плазматрона | До 0,5 атм |
| 3 | Температура газа в струе плазмы | 2000–2500 °С |
| 4 | Скорость струи на срезе сопла | 700±100 м/с |
| 5 | Диаметр струи | 8 мм |

В процессе испытания на стенде фиксировалось время, когда происходило образование первых капель расплавленного металла или продуктов эрозионного разрушения на исследуемой поверхности. В этом случае образец сразу же выводили из зоны нагрева высокотемпературной струи и после охлаждения с использованием различных металлофизических методов анализировали состояние торцевой поверхности в зоне нагрева.

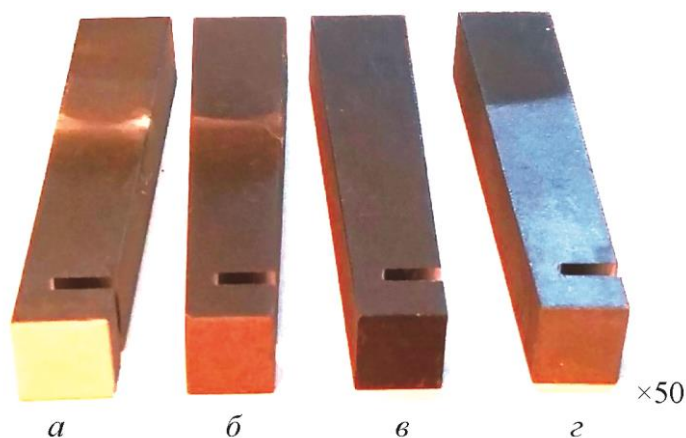


Рис. 2. Внешний вид образцов перед испытаниями на высокотемпературном аэродинамическом стенде: *a* – ДП+ПМ+ПК; *б* – ДП+ПМ; *в* – ДП; *г* – сплав без покрытия

На расстоянии 1 см от исследуемой торцевой поверхности выполнен технологический надрез. Это позволяет сконцентрировать тепловую энергию, передаваемую от высокотемпературного газового потока в исследуемом объеме металла и значительно уменьшить потери за счет теплопроводности. В результате организуется высокоскоростной ударный режим нагрева, в определенной степени имитирующий запуск газотурбинного двигателя.

3. Результаты исследования и обсуждения

Микроструктура и характер распределения химических элементов по слоям комбинированного многослойного покрытия на лопатке газотурбинного двигателя представлена на рис. 3. После термодиффузионного алюмосилицирования на поверхности образцов из никелевого сплава сформировалось покрытие толщиной 50 мкм, состоящее из алюминидов NiAl микротвердостью 900 HV 0,05. Шероховатость поверхности Ra составила 9 мкм (рис. 4 *a* и табл. 3). Алюмосилицированное покрытие обеспечивает защиту от высокотемпературного окисления и коррозии.

Второй напыленный металлический подслой толщиной 100–120 мкм. Микротвердость порядка 600 HV 0,05. Подслой состоит из алюминидов NiAl и твердого раствора на основе Ni. Шероховатость поверхности составила 6 мкм (рис. 4 *б* и табл. 3). Подслой обеспечивает плавный переход от металлического покрытия к керамическому.

Внешний керамический слой, обеспечивающий защиту поверхности изделия от воздействия высоких температур, состоит из оксида циркония ZrO₂ и оксида иттрия Y₂O₃. Толщина покрытия составила около 70 мкм. Шероховатость поверхности керамического слоя составила Ra = 2,47 мкм (рис. 4 *в* и табл. 3).

Общая толщина покрытия составила 0,17–0,27 мм. При этом толщина образцов увеличилась на 0,15–0,2 мм, поскольку первый алюмосилицированный слой не увеличивает толщину лопаток. После диффузионного алюмосилицирования изменяется химический и фазовый состав их поверхностного слоя, а алюмосилицидное покрытие формируется внутри материала лопаток, не приводя к увеличению их размеров.

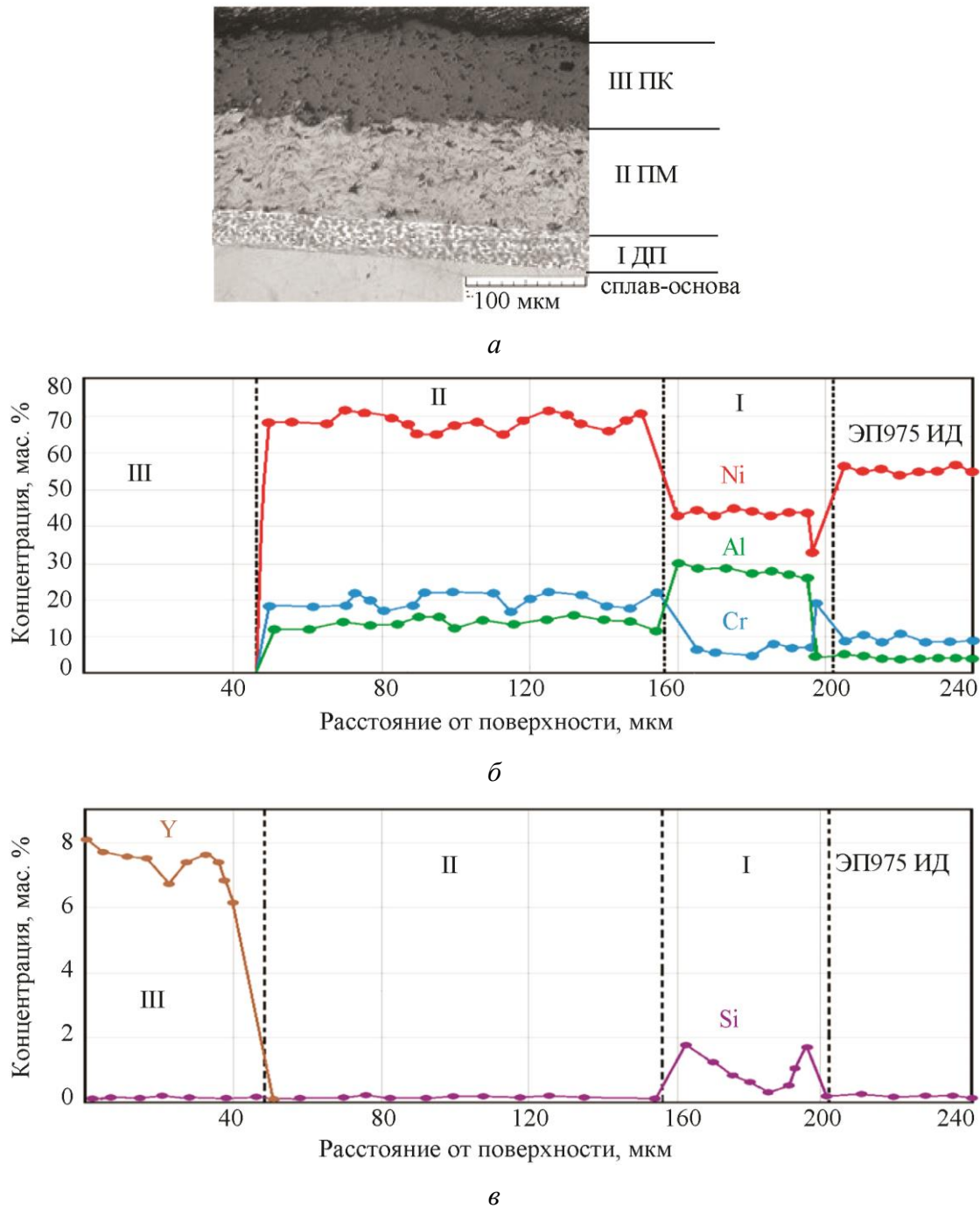


Рис. 3. Микроструктура (а) и распределение элементов (б, в) в комбинированном многослойном покрытии на лопатке газотурбинного двигателя из никелевого сплава ЭП975ИД

В исходном состоянии на границе 1 и 2-го слоев отмечалась небольшая пористость. При количественном микрорентгеноспектральном анализе в точке обнаружено, что поры на границе диффузионного и плазменного металлических слоев заполнены окислами, главным образом хрома, причем в порах содержится до 60 мас. % хрома, около 5 мас. % алюминия и 1 мас. % иттрия.

При исследовании поверхности образцов после нанесения каждого слоя покрытия максимальная шероховатость поверхности зафиксирована для первого алюмосилицированного слоя (рис. 4 а и табл. 2). После термодиффузионного алюмосилицирования ше-

роховатость поверхности образцов осталась на исходном уровне. Плазменное напыление 2-го слоя привело к небольшому снижению шероховатости (рис. 4 б и табл. 2). Вероятно, это обусловлено механизмом формирования металлического подслоя. В плазменной струе гранулы напыляемого порошка Ni-22Cr-16Al-1Y находятся в пластичном состоянии размягченного металла, близкого расплаву. Эти частицы летят к поверхности образцов с большой скоростью. Ударяя о поверхность образца, они пластически деформируются, приобретая форму, близкую пластине. Температура частиц практически соответствует температуре плавления, поэтому происходит диффузионное взаимодействие частиц с поверхностью жаропрочного никелевого сплава, что обеспечивает адгезионное сцепление слоев. Таким образом, после напыления второго слоя исходная шероховатость поверхности образцов залечивается, а шероховатость 2-го слоя определяется размером и формой осевших деформированных частиц Ni-22Cr-16Al-1Y. После напыления керамического слоя шероховатость поверхности еще уменьшилась. В отличие от частиц металлического порошка Ni-22Cr-16Al-1Y напыляемые частицы $ZrO_2+Y_2O_3$ не деформируются в струе плазмы. Ударяясь о поверхность образцов с высокой кинетической энергией, керамические частицы проникают в слой Ni-Cr-Al-Y, обеспечивая хорошее адгезионное сцепление. Шероховатость поверхности после нанесения керамического слоя минимальна (рис. 4 в и табл. 2)

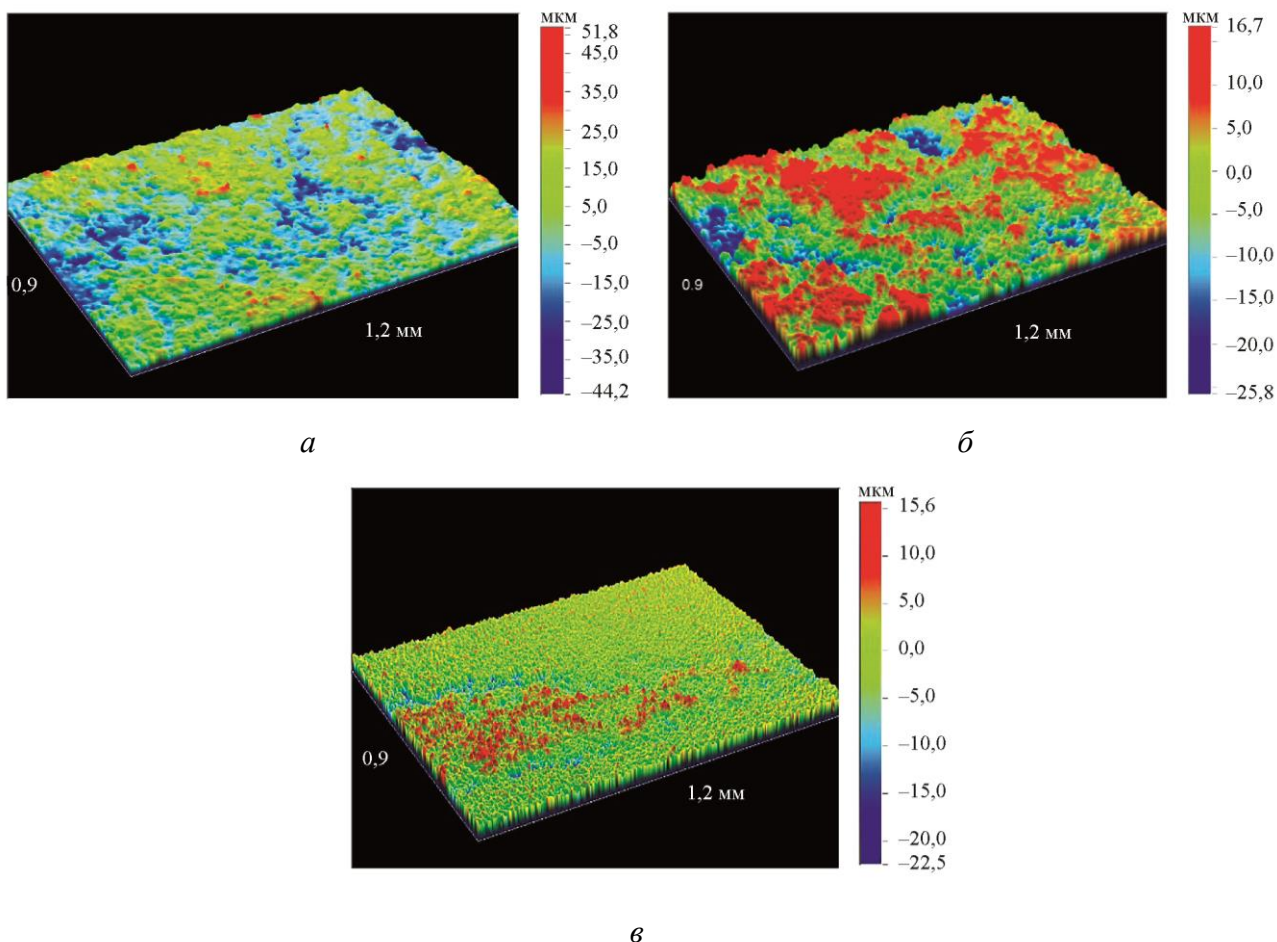


Рис. 4. Профиль поверхности образцов в исходном состоянии:
а – ДП; б – ДП+ПМ; в – ДП+ПМ+ПК

Таблица 2 – Результаты исследования шероховатости поверхностей в исходном состоянии

| Образец | Средняя шероховатость R_a , мкм | Средняя квадратичная шероховатость R_q , мкм | Максимальная высота поверхности R_t , мкм |
|----------|-----------------------------------|--|---|
| ДП | 9,02 | 11,29 | 95,54 |
| ДП+ПМ | 6,32 | 7,74 | 42,45 |
| ДП+ПМ+ПК | 2,45 | 3,36 | 38,07 |

Для повышения адгезии всех трех слоев комбинированного покрытия был проведен дополнительный отжиг в вакууме при температуре $T = 1050$ °С в течение 2 ч. В результате тепловой выдержки произошло выравнивание химического состава во всех слоях покрытия, в частности уменьшилось различие содержания алюминия в диффузионном и плазменном металлических слоях. Кроме того, на границе между этими слоями поры практически полностью исчезли, а там, где они сохранились, в них увеличилось количественное содержание алюминия и иттрия, что свидетельствует об образовании оксида Al_2O_3 , модифицированного иттрием, с высокими защитными свойствами.

С целью сравнительного анализа высокотемпературных защитных свойств каждого слоя были проведены испытания на прожиг трех типов покрытий, параметры которых в исходном состоянии приведены в табл. 3. Каждое из нанесенных на образцы покрытий отражает одно (ДП), двух (ДП+ПМ) и трехслойное (ДП+ПМ+ПК) состояние исследуемого многослойного комбинированного покрытия.

Таблица 3. Параметры исследуемых защитных покрытий в исходном состоянии

| Тип покрытия | Вид слоя | Толщина слоя, мкм | Содержание элементов, мас. % | | | | | |
|--------------|-----------------|-------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----|-------|-----|
| | | | Cr | Al | Ni | Si | Zr | Y |
| ДП | Al-Si-PЗМ | 40–55 | 6–8 | 26–30 | 47–52 | 1–2 | – | – |
| ДП+ПМ | Al-Si-PЗМ | 40–55 | 6–8 | 26–28 | 47–52 | 1–2 | – | – |
| | Ni-Cr-Al-Y | 110–120 | γ : 29–31 β : 9–11 | γ : 4–6 β : 18–20 | γ : 63–65 β : 70–72 | – | – | – |
| ДП+ПМ+ПК | Al-Si-PЗМ | 40–55 | 6–8 | 26–30 | 47–52 | 1–2 | – | – |
| | Ni-Cr-Al-Y | 110–120 | γ : 29–31 β : 9–11 | γ : 4–6 β : 18–20 | γ : 63–65 β : 70–72 | – | – | <1 |
| | $ZrO_2+8Y_2O_3$ | 50 | – | – | – | – | 65–70 | 6–7 |

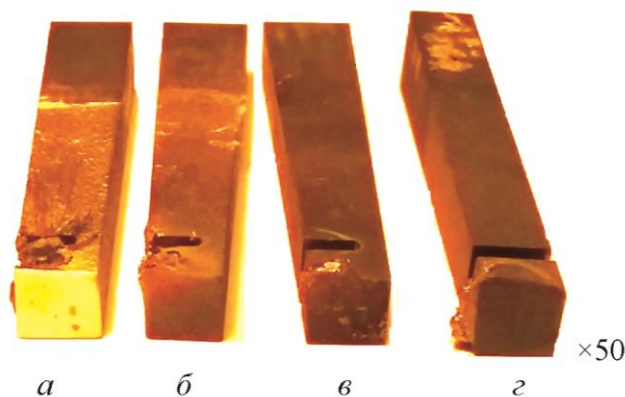


Рис. 5. Образцы после испытания на высокотемпературном аэродинамическом стенде:
a – ДП+ПМ+ПК; *б* – ДП+ПМ; *в* – ДП; *г* – сплав без покрытия

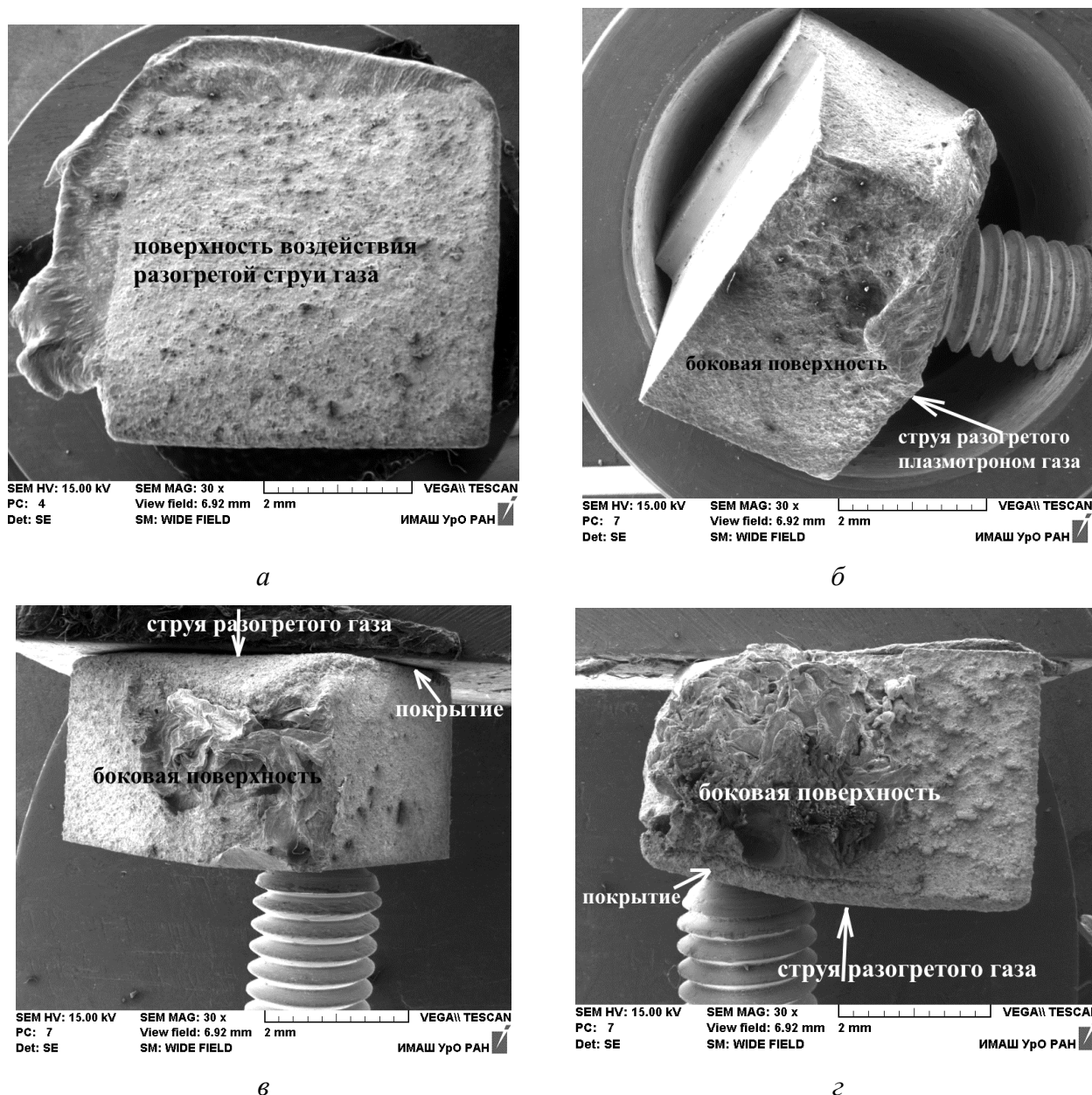
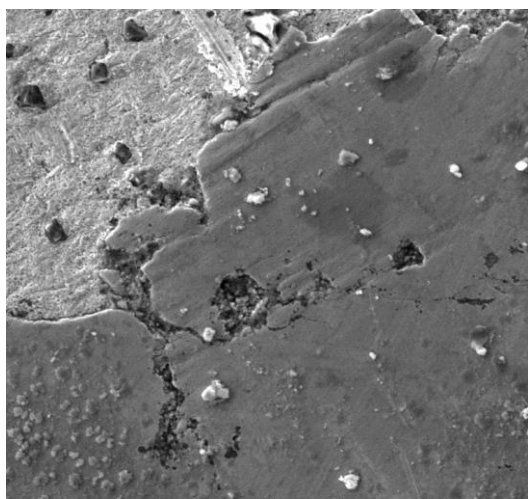


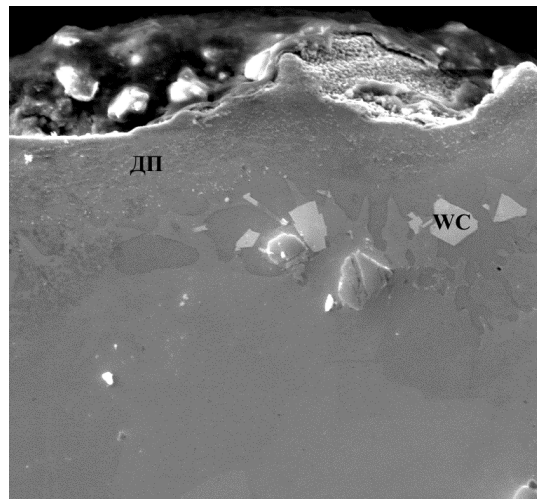
Рис. 6. Рельеф поверхности образцов после испытаний на прожиг:
а – без покрытия; б – ДП; в – ДП + ПМ; г – ДП + ПМ + КП

После испытания на аэродинамическом стенде уже при визуальном осмотре (рис. 5) видно, что только образец с комбинированным трехслойным покрытием (ДП+ПМ+ПК) сохранил свой первоначальный вид и практически не подвергся разрушению (рис. 5 а). Поскольку поток разогретого плазматроном газа попадает на поверхность образцов под углом, происходит частичное расплавление поверхностного слоя, который выдувается на боковые поверхности, образуя натек в виде грата (рис. 6). При анализе торцевых поверхностей образцов после испытаний на высокотемпературном аэродинамическом стенде с использованием растрового электронного микроскопа было обнаружено, что, как и ожидалось, максимальные разрушения претерпел образец без покрытия (рис. 6 а). Кроме эрозионного повреждения зафиксировано развитие окислительных процессов. Образовавшиеся оксиды NiO, Cr₂O₃ и шпинели NiAl₂O₄, NiCr₂O₄ проникают по границам γ -зерен вглубь никелевого сплава (рис. 7 а). Образец после термодиффузионного алюмосилицирования (ДП) сохранился лучше, часть покрытия провзаимодействовала с кислородом воздуха с образованием оксида Al₂O₃, других оксидов на

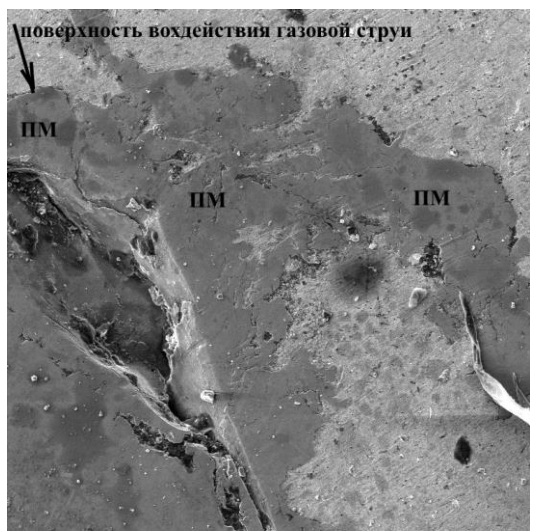
поверхности не обнаружено. Металл основы под покрытием оплавился (рис. 6 б и 7 б). Образец с двухслойным покрытием после термодиффузионного алюмосилицирования и последующего напыления металлического подслоя (ДП+ПМ) окислился с образованием оксидов Al, Cr и Ni, причем на части поверхности образовались эвтектики (рис. 6 в и 7 в). Образец с трехслойным комбинированным покрытием сохранился лучше всех, на торцевой поверхности практически везде обнаруживается только слой керамики с единичными локальными участками оксидов никеля, алюминия и хрома (рис. 6 г и 7 г). Трехслойное покрытие (ДП+ПМ+ПК) выдержало максимальную температуру 1300 °С при наибольшем времени воздействия газового потока (рис. 8).



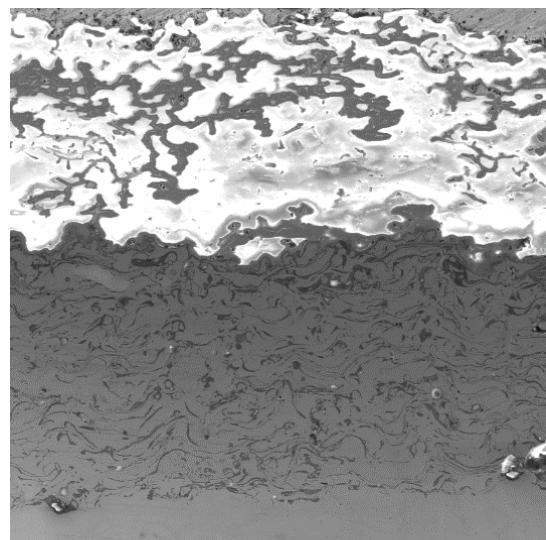
а



б



в



г

Рис. 7. Микроструктура поверхности после воздействия газового потока:
а – без покрытия; *б* – ДП; *в* – ДП + ПМ; *г* – ДП + ПМ + ПК

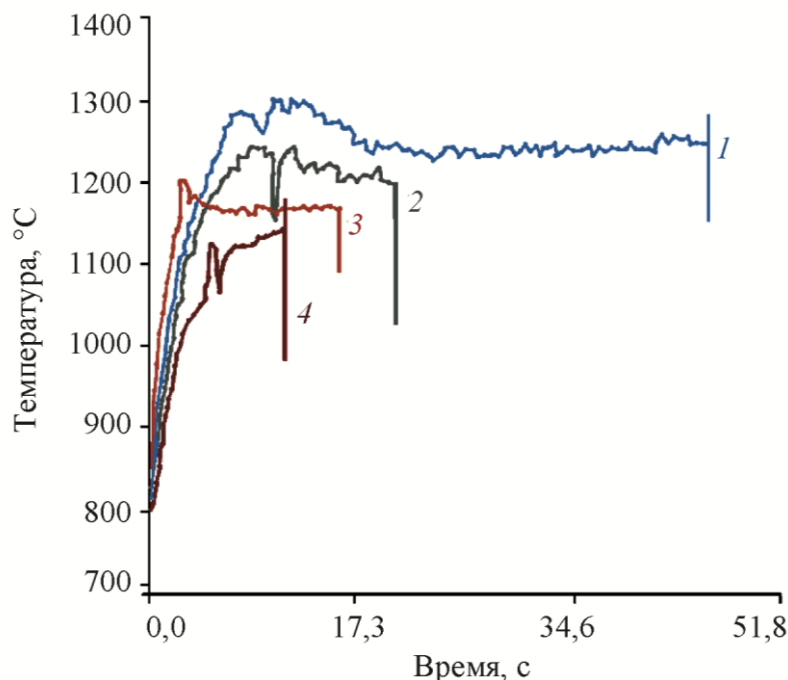


Рис. 8. Влияние состава покрытий на стойкость образцов из никелевого сплава в условиях испытаний на высокотемпературном аэродинамическом стенде:
1 – ДП+ПМ+ПК; 2 – ДП+ПМ; 3 – ДП; 4 – сплав без покрытия

Важным показателем качества напыленных покрытий является шероховатость поверхности, которая в процессе эксплуатации деталей должна, по-возможности, сохраняться и не превышать допустимых значений [22]. Это особенно важно для деталей, которые находятся в динамическом контакте с окружающей средой. Эрозионное воздействие, если не приводит к разрушению контактной поверхности, не должно значительно изменять микрорельеф поверхности деталей. Только в этом случае будет сохраняться ламинарное обтекание лопаток потоком газа, и не будут возникать из-за турбулентности локальные участки с критическим превышением температуры, что наиболее опасно для деталей в условиях интенсивного температурно-силового воздействия.

Исследование рельефа поверхности и шероховатости образцов после испытания на аэродинамическом стенде показало, что высокотемпературный скоростной поток газа не привел к значительному изменению шероховатости поверхности, а рельеф возрос в наиболее поврежденных участках не более чем на 20 % (рис. 9 и табл. 4).

Таблица 4 – Результаты исследования шероховатости поверхности после испытаний на высокотемпературном аэродинамическом стенде

| Образец | Средняя шероховатость R_a , мкм | Средняя квадратичная шероховатость R_q , мкм | Максимальная высота поверхности R_t , мкм |
|--------------|-----------------------------------|--|---|
| Без покрытия | 3,44 | 4,39 | 34,57 |
| ДП | 6,01 | 7,46 | 42,48 |
| ДП+ПМ | 7,46 | 9,31 | 68,83 |
| ДП+ПМ+ПК | 7,02 | 9,49 | 70,46 |

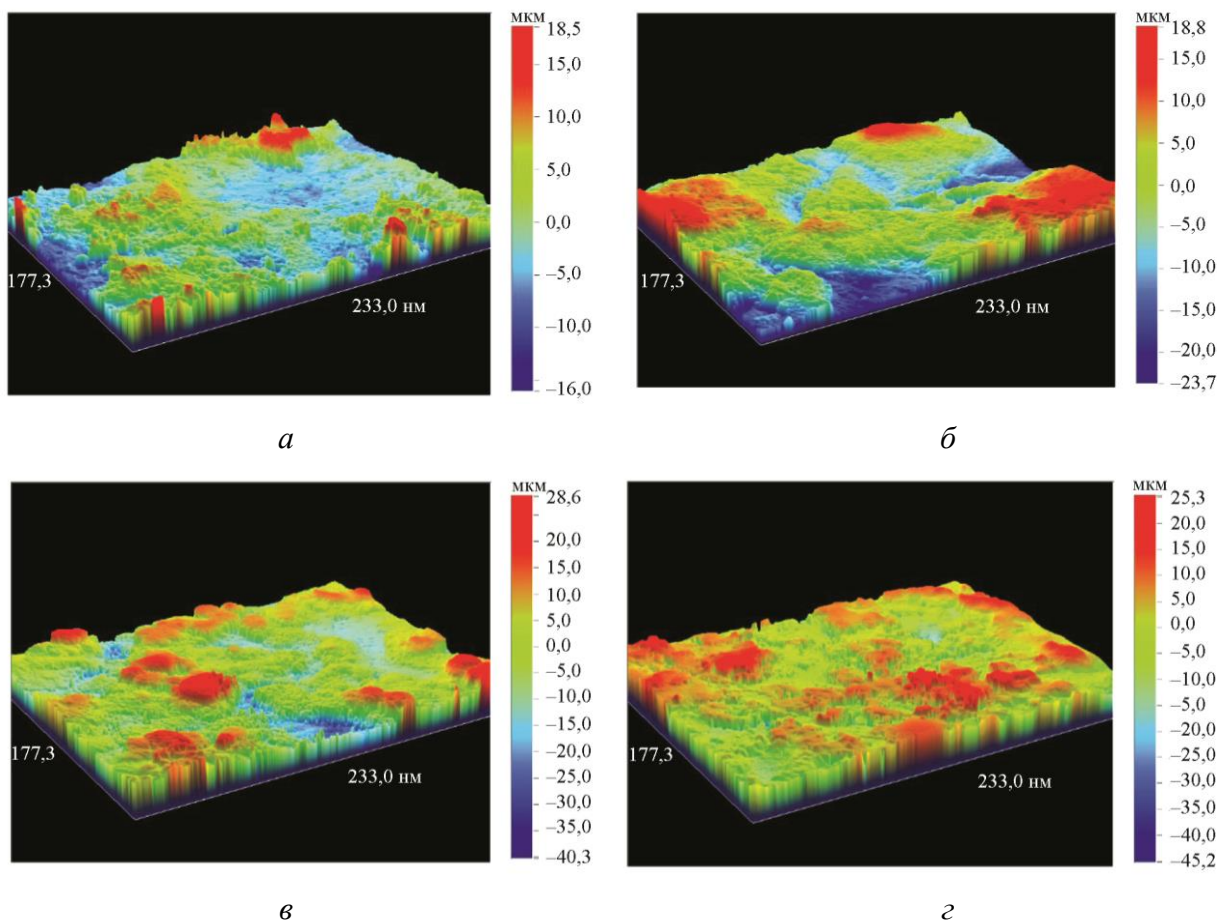


Рис. 9. Профиль поверхности образцов после испытаний на высокотемпературном аэродинамическом стенде: *а* – без покрытия; *б* – ДП; *в* – ДП+ПМ; *г* – ДП+ПМ+ПК

Таким образом, многослойное покрытие полностью сохранилось на поверхности образца после испытаний на прожиг, тогда как все остальные покрытия окислились с образованием оксидов Al_2O_3 , NiO , Cr_2O_3 и шпинелей NiAl_2O_4 и NiCr_2O_4 . По сравнению с образцами без покрытия, диффузионным алюмосилицидным покрытием (ДП) и двухслойным покрытием (ДП+ПМ), трехслойное покрытие (ДП+ПМ+ПК) способно сохраняться после воздействия температур $1300\text{ }^\circ\text{C}$. Это связано с термобарьерным эффектом, обеспечиваемым наличием внешнего керамического слоя $\text{ZrO}_2+\text{Y}_2\text{O}_3$, который снижает температуру металлической составляющей покрытия и сплава-основы не менее чем на $300\text{ }^\circ\text{C}$.

3. Выводы

Результаты исследований показали, что трехслойное покрытие характеризуется максимальными защитными свойствами по сравнению с термодиффузионным алюмосилицидным покрытием и двухслойным покрытием, состоящим из диффузионного слоя Al-Si-PЗМ и плазменно напыленного покрытия Ni-Cr-Al-Y . Трехслойное покрытие состоит из трех слоев: первый слой – диффузионное алюмосилицидное покрытие, обеспечивающее защиту от высокотемпературного окисления и коррозии, толщиной 50 мкм , второй металлический подслоя, обеспечивающий плавный переход от металлического покрытия к керамическому, толщиной $100\text{--}120\text{ мкм}$ и третий керамический слой, обеспечивающий снижение температуры лопаток во время эксплуатации, толщиной $70\text{--}100\text{ мкм}$. Общая толщина покрытия составляет $170\text{--}270\text{ мкм}$. Показано, что наносимые плазменным распылением второй и третий слои достаточно плотные, пористость составила менее $5\text{ об. } \%$. Каких-либо отслоений по

границе первого и второго слоя не обнаружено, зафиксированы лишь единичные микропоры, заполненные оксидом алюминия. Результаты испытаний на прожиг в аэродинамическом стенде показали, что покрытие способно выдерживать без разрушения температуру 1300 °С.

Благодарность

Работа выполнена на оборудовании ЦКП «Пластометрия» ИМАШ УрО РАН в соответствии с государственным заданием по теме № АААА-А18-118020790145-0.

Литература

1. Развитие авиационных ГТД и создание уникальных технологий / В. И. Бабкин, М. М. Цховребов, В. И. Солонин, А. И. Ланшин // Двигатель. – 2013 – № 2 (86) – С. 2–7.
2. Гузанов Б. Н., Косицын С. В., Пугачева Н. Б. Упрочняющие защитные покрытия в машиностроении. – Екатеринбург : УрО РАН, 2004. – 244 с. – ISBN: 5-7691-1405-3.
3. Косицын С. В. Сплавы и покрытия на основе моноалюминидов никеля. – Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2000. – 277 с. – ISBN: 5-7691-1810-1.
4. Мубояджан С. А., Лесников В. П., Кузнецов В. П. Комплексные защитные покрытия турбинных лопаток авиационных ГТД. – Екатеринбург : «Квист», 2008. – 208 с. – ISBN: 5-900474-60-7.
5. Мовчан Б. А., Малашенко И. С. Жаростойкие покрытия, осаждаемые в вакууме. – Киев : Наукова думка, 1983. – 232 с.
6. Development of Ion-Plasma Refractory Metallic Layers of Heat-Insulating Coatings for Cooled Turbine Rotor Blades / S. A. Budinovskiy, S. A. Muboyadzhyan, A. M. Gayamov, P. V. Matveev // Metal Science and Heat Treatment. – 2014. – Vol. 55. – P. 652–657. – DOI: 10.1007/s11041-014-9684-2.
7. Tarasenko Yu. P., Tsareva N. N., Berdnik O. B. The structure and physical-mechanical properties of the heat-resistant Ni-Co-Cr-Al-Y intermetallic coating obtained using rebuilt plasma equipment // Thermophysics and Aeromechanics. – 2014 – Vol. 1, No. 5. – P. 641–650. – DOI: 10.1134/S0869864314050138.
8. Pugacheva N. B., Mazaeva E. S. Protective properties of high-temperature combined coatings // Fizika i Khimiya Obrabotki Materialov. – 2001. – No. 4. – P. 82–89.
9. Guzanov B. N., Obabkov N. V., Migacheva G. N. Development and research of multi-layer composite coatings high temperature // Sciences of Europe. – 2017. – No. 16 (16). – P. 261–265.
10. Sivakumar R., Mordike B. L. High temperature coatings for gas turbine blades: a review // Surface and Coatings Technology. – 1989. – Vol. 37, iss. 2. – P. 139–160. – DOI: 10.1016/0257-8972(89)90099-6.
11. Гузанов Б. Н., Косицын С. В., Саламатов Е. С. Лазерная обработка жаростойких защитных покрытий // Защитные покрытия на металлах. – 1990. – Вып. 24. – С. 76–80.
12. Матвеев П. В., Будиновский С. А. Влияние режима вакуумного отжига на структуру ионно-плазменных покрытий, полученных по технологии двойного алитирования // Труды ВИАМ. – 2016. – № 3 (39). – С. 8. – DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-3-8-8.
13. Кадырметов А. М. Исследование процессов плазменного нанесения и упрочнения покрытий и пути управления их качеством // Научный журнал КубГАУ. – 2012. – № 81 (07). – С. 1–18.
14. Пугачева Н. Б. Современные тенденции развития жаростойких покрытий на основе алюминидов железа, никеля и кобальта // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. – 2015. – No. 3. – С. 51–82. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.3.051-082.
15. Stecura S. Optimization of the NiCrAl-Y/ZrO-Y₂O₃ thermal barrier system // NASA Technical Memorandum. – NASA/TM-86905. – 1985. – 26 p. – URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19850007569.pdf> (24.01.2019).

16. Hille T. S., Turteltaub S., Suiker A. S. J. Oxide growth and damage evolution in thermal barrier coatings // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2011. – No. 78. iss. 9. – P. 2139–2152. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.04.003.
17. Zhu D., Miller R. A. Thermal Conductivity and Sintering Behavior of Advanced Thermal Barrier Coatings, NASA/ TM-2002-211481. – 2002. – 15 p.
18. Конструирование комплексных защитных покрытий для монокристаллических охлаждаемых турбинных лопаток современных ГТД / В. П. Лесников, В. П. Кузнецов, И. П. Конакова, Е. В. Мороз // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. – 2012. – № 3–1 (34). – С. 211–215.
19. Особенности создания комбинированных теплостойких покрытий для деталей высокотемпературного назначения / Б. Н. Гузанов, Н. Б. Пугачева, В. Д. Алексеев, Е. Ю. Слукин // *Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение*. – 2020. – Т. 2, № 3. – С. 12–19. – DOI: 10.15593/2224-9877/2020.3.02.
20. Технология получения композиционных конгломератных порошков для плазменного напыления высокотемпературных защитных покрытий / Б. Н. Гузанов, Н. Б. Пугачева, Е. Ю. Слукин, Т. М. Быкова // *Обработка металлов (Технология. Оборудование. Инструменты)*. – 2021. – Т. 23, № 1. – С. 6–20.
21. Лепеш Г. В., Моисеев Е. Н. Оценка способов защиты поверхности металла от высокотемпературной эрозии // *Технико-технологические проблемы сервиса*. – 2017. – № 3 (41). – С. 20–31.
22. Маркова Т. В., Крыжановская И. М. Шероховатость поверхности : методические указания. – СПб : Изд-во СПбГТУ, 2006. – 32 с.

Received: 01.03.2021

Revised: 02.04.2021



Accepted: 23.04.2021

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.022-029

GRAVITATIONAL PRINCIPLE OF MINIMUM PRESSURE FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS

E. Yu. Prosviryakov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

We consider the flows of ideal (Euler equations) and Newtonian viscous (Navier–Stokes equations) incompressible fluids in the gravitational field of mass forces. In this case, the gravitational field created by the liquid itself (self-gravity) is also taken into account. It is shown that some well-known principles of maximum pressure, according to which either the pressure is constant in the flow region, or the minimum pressure is reached at the boundary of this region if the forces of self-gravity are taken into account, exclude the case of constant pressure. It is also demonstrated that self-gravity makes it impossible for waves and solitons to pass with pressure minima to the surface of a body flown around by a viscous fluid.

Keywords: principle of minimum pressure, vortex flows, ideal incompressible fluid, viscous incompressible fluid.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics* (Volume 6 of A Course of Theoretical Physics) [Original Russian text published in Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika*. Moskva, FIZMATLIT Publ., 1986, 736 p.], Oxford, Pergamon Press, 1987, 536 p.
2. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 57–70. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2019_Privalova_V.V._et_al._057_070.pdf
3. Prosviryakov E.Yu. Dynamic equilibria of a nonisothermal fluid. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 735–749. DOI: 10.14498/vsgtu1651. (In Russian).
4. Prosviryakov E.Y. Exact Solutions for three-dimensional potential and vorticity Couette flows of an incompressible viscous fluid. *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 501–506. DOI: 10.1134/S2304487X15060127. (In Russian).
5. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Thermocapillary Convection of a Vertical Swirling Liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
6. Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, No. 1, pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.

7. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyandin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
8. Knyazev D.V. Solving the motion equations of a viscous fluid with a nonlinear dependence between a velocity vector and some spatial variables. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, pp. 928–933. DOI: 10.1134/S0021894418050218.
9. Hamel G. Ein allgemeiner Satz über den Druck bei der Bewegung volumbeständiger Flüssigkeiten. *Monatsh. f. Mathematik und Physik*, 1936, vol. 43, pp. 345–363. DOI: 10.1007/BF01707614.
10. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, University Press, Cambridge, 1970. DOI: 10.1017/CBO9780511800955.
11. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, New York, Academic Press, 1977, 295 p.
12. Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. In: *Fluid Dynamics I/Strömungsmechanik I*, ed. C. Truesdell, Encyclopedia of Physics/Handbuch der Physik, vol. 3/8/1, Springer, 1959, pp. 125–263.
13. Sedov L.I. *Mechanics of Continuous Media*, World Sci., River Edge, NJ, 1997.
14. Sizykh G. B. A sign of the presence of a deceleration point in a plane irrotational perfect gas flow. *Trudy MFTI*, 2015, vol. 7 (2), pp. 108–112. (In Russian).
15. Burmistrov A.N., Kovalev V.P., Sizykh G.B. Maximum Principle for the Solution of an Elliptic Equation with Unbounded Coefficients. In: *Trudy MFTI* (Proceedings of MIPT), 2014, vol. 6, no. 4, pp. 97–102. (In Russian).
16. Golubkin V.N., Sizykh G.B. Maximum principle for the Bernoulli function. *TsAGI Science Journal*, 2015, vol. 46, No. 5, pp. 485–490. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.v46.i5.50.
17. Golubkin V.N., Sizykh G.B. Maximum principles in hydrodynamics. In: *Proceedings of XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*, Kazan, August 20–24, 2015. Kazan, Izdatelstvo Kazanskogo (Privolzhskogo) Federalnogo Universiteta Publ., 2015, pp. 989–991. (In Russian).
18. Besportochnyy A.I., Burmistrov A.N., Sizykh G.B. Version of the Hopf Theorem. *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 115–122. (In Russian).
19. Golubkin V.N., Kovalev V.P., Sizykh G.B. Maximum principle for pressure in ideal incompressible fluid flows. *TsAGI Science Journal*, 2016, vol. 47, iss. 6, pp. 599–609. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2017019567.
20. Sizykh G.B. A velocity minimum in a potential fluid flow. *Fluid Dynamics*, 2017, vol. 52 (3), pp. 345–350. DOI: 10.1134/S0015462817030024.
21. Polyachenko V. L., Fridman A. M., *Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability*, Rus. transl. [Ravnovesie i ustoychivost` gravitiruyushchikh sistem, Moskva, Nauka Publ., 1976], Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.
22. Golubkin V.N., Korolev G.L., Sizykh G.B. Differential properties of pressure in a viscous fluid. *TsAGI Science Journal*, 2016, vol. 47, iss. 1, pp. 41–49. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2016017060.

Подана в журнал: 01.03.2021



УДК 517.598

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.022-029

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ДАВЛЕНИЯ В ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ю. Просвиряков

*Институт машиноведения УрО РАН, ул. Комсомольская,
34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

Рассмотрены течения идеальной (уравнения Эйлера) и ньютоновской вязкой (уравнения Навье–Стокса) несжимаемых жидкостей в гравитационном поле массовых сил. С учетом гравитационного поля, создаваемого самой жидкостью (самогравитация). Очевидно, что некоторые известные принципы максимума давления, согласно которым или давление постоянно в области течения, или минимум давления достигается на границе этой области при учете сил самогравитации, исключают случай постоянного давления. А самогравитация приводит к невозможности прохождения волн и солитонов с минимумами давления до поверхности тела, обтекаемого вязкой жидкостью.

Ключевые слова: принцип минимума давления, вихревые течения, идеальная несжимаемая жидкость, вязкая несжимаемая жидкость.

1. Введение

Учет «пренебрежимо малого», но все-таки ненулевого слагаемого в уравнениях Навье–Стокса может приводить к выводам, которые нельзя получить при нулевом значении этого слагаемого. Самым ярким примером этого утверждения в гидродинамике являются ползущие течения – движения вязкой несжимаемой жидкости, характеризующейся очень малым значением числа Рейнольдса [1]. Малое число Рейнольдса указывает на очень маленькую скорость течения или мелкий характерный геометрический масштаб течения, на большое значение молекулярной вязкости жидкости [1].

Важность учета конвективной производной уравнений Навье–Стокса продемонстрирована на примере модификаций течений Куэтта, Пуазейля и их конвективных аналогов в статьях [2–5]. Исследование этих точных решений показывает важность качественных и количественных свойств уравнений Навье–Стокса [2–5]. Несмотря на то, что построение классов точных решений является важной и актуальной задачей гидродинамики, необходимо также развивать другие идеи анализа уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости [1, 6–13].

В работе исследован вопрос о месте точек минимума давления. Исследованию этого вопроса уделяли внимание основатели современной гидродинамики [9–13] и посвящают свои работы современные авторы [14–20]. Дело в том, что место точек минимума давления важно для исследования процесса возникновения кавитации [17]. Учет «пренебрежимо малого» слагаемого – силы самогравитации, позволил получить новые утверждения о месте расположения точек минимума давления.

2. Основные обозначения и уравнения движения

Рассмотрим течение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости в гравитационном поле. Обозначим через \mathbf{V} – скорость жидкости; $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ – вектор завихренности; p – давление; ρ – плотность; μ – динамический коэффициент вязкости; φ – потенциал гравитационных сил; ∇ – оператор Гамильтона (набла-оператор). Движение жидкости описано уравнениями Навье–Стокса например в форме Громеки–Ламба [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{V} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \varphi \right); \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.2)$$

Потенциал гравитационных сил φ зависит от пространственных координат и от времени [21]. Гравитационная сила, отнесенная к плотности, равна $-\nabla\varphi$. Пусть A – внутренняя точка течения, а U_A – некоторая шаровая окрестность точки A , целиком расположенная внутри течения. Уменьшая размер рассматриваемого шара U_A , всегда можно добиться того, что вклад в гравитационную силу $-\nabla\varphi$ в точке A , который вносит сама жидкость, находящаяся внутри шара U_A , можно считать пренебрежимо малым по сравнению со вкладом от оставшейся части жидкости и по сравнению со вкладами, привносимыми Землей, Луной, Солнцем и другими небесными телами. Однако есть одно свойство гравитационного поля в точке A , которое, наоборот, не зависит от тел, расположенных вне шара U_A (в настоящей работе рассматриваются внешние тела и жидкость, движущиеся с нерелятивистскими скоростями), а зависит только от жидкости, расположенной внутри сколь угодно малого (но не вырожденного в точку) шара U_A . Это – лапласиан потенциала гравитационных сил. Он зависит только от плотности жидкости в рассматриваемой точке [21]:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho G,$$

где ρ – плотность жидкости; $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ – универсальная гравитационная постоянная. В отличие, например, от интенсивности магнитного поля при заданной плотности жидкости ни в каком эксперименте эту величину невозможно сделать сколь угодно малой. Ее нельзя изменить каким-либо расположением масс вне рассматриваемой точки течения.

Находя дивергенцию обеих частей уравнения (2.1), с учетом уравнения неразрывности (2.2), исключим слагаемые, отвечающие за нестационарность и вязкость, и получим:

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}) = -\Delta \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \varphi \right). \quad (2.3)$$

Повторяя, например, преобразования, выполненные в работе [22] (в этой работе величина $\Delta\varphi$ считалась пренебрежимо малой, и полагалось, что $\Delta\varphi = 0$), приведем уравнение (2.3) к виду:

$$\Delta \left[\frac{p}{\rho} \right] = \Omega^2 - (\nabla V_x)^2 - (\nabla V_y)^2 - (\nabla V_z)^2 - \Delta \phi, \quad (2.4)$$

где V_x , V_y и V_z – компоненты скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$.

Заметим, что уравнение (2.4) верно и для стационарных, и для нестационарных течений, как для вязкой, так и для идеальной жидкости. Это уравнение известно давно. Его использовал Г. Гамель [9] для оценки верхней границы величины завихренности, при которой силы гравитации, созданные самой жидкостью внутри объема со свободными границами, не дают распасться этому объему на части. Заметим также, что равносильность уравнений (2.3) и (2.4) существенным образом опирается на уравнение (2.2), т. е. на несжимаемость жидкости.

Из теории гармонических функций следует, что если правая часть (2.4) в некоторой области D не больше нуля, то давление p , если оно непостоянно в D , принимает минимальное значение только на границе области D . Именно это свойство использовал Г. Гамель в работе [9].

Из уравнения (2.4) следует, что в некоторых случаях силы самогравитации (т. е. силы гравитации, созданные самой жидкостью) могут оказывать влияние на качественную картину течения (расположение точек минимума давления). Речь идет о тех случаях, когда учет величины $\Delta \phi$ влияет на знак правой части (2.4). Таким случаям посвящены следующие разделы.

3. Течение с малой завихренностью

Гамель, в работе [9] показал, что если величина завихренности Ω не превосходит $\sqrt{8\pi\rho G}$, то правая часть (2.4) будет отрицательна. Несложно привести пример реального течения с такой малой завихренностью. Плотность жидкой части ядра Земли по разным оценкам составляет около 10^4 kg/m^3 . Соответствующее значение $\sqrt{8\pi\rho G}$ равно примерно $4,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, что почти в тридцать раз превышает завихренность твердого тела, вращающегося с угловой скоростью Земли. Поэтому можно утверждать, что в жидкой части ядра Земли минимум давления достигается на границе этой жидкой части. Это следствие из результата Г. Гамеля [9] представляется, по-видимому, впервые.

4. Гидростатический принцип минимума давления

Если жидкость покоится, то уравнение (2.4) принимает вид:

$$\Delta \left[\frac{p}{\rho} \right] = -4\pi\rho G.$$

Поэтому в покоящейся несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил, кроме, может быть, гравитационных сил, давление непостоянно по пространству в любой внутренней подобласти и достигает своего минимального значения на границе и только на границе рассматриваемой подобласти. Отсюда, в частности, следует один из результатов данной работы. Он состоит в том, что постоянства давления внутри области невозможно добиться никаким расположением масс снаружи этой области (в гидростатике).

5. Безвихревое течение

В общем случае, если можно априори (до решения задачи) указать область течения, в которой правая часть (2.4) отрицательна, то можно априори утверждать, что давление (если оно непостоянно) достигает минимума только на границе этой области. Так, например, это будет верно для безвихревого течения идеальной жидкости, поскольку для идеальной жидкости также верно уравнение (2.3) и, следовательно, верно уравнение (2.4). Для идеальной несжимаемой жидкости можно априори утверждать, что завихренность будет всюду равна нулю, если она равна нулю в набегающем потоке. Отсюда следует, что точки минимума давления (точки зарождения кавитации) в таких течениях расположены на границах областей с гладкими параметрами течения. Это отличается от известного принципа минимума давления в безвихревых течениях идеальной жидкости (в котором не учитывалась сила самогравитации) [10] тем, что в [10] допускался случай всюду постоянного давления.

6. Вязкое обтекание гладкой поверхности

Правая часть (2.4), как и полностью это уравнение, не содержит вязкие члены. Однако учет вязкости позволяет оценить величину

$$\Omega^2 - (\nabla V_x)^2 - (\nabla V_y)^2 - (\nabla V_z)^2$$

на дне погранслоя. Дело в том, что на дне погранслоя для вязких жидкостей должно быть выполнено условие прилипания. При условии прилипания (для несжимаемых жидкостей) [22] получено, что на гладком участке обтекаемой поверхности выполнено равенство

$$\Omega^2 - (\nabla V_x)^2 - (\nabla V_y)^2 - (\nabla V_z)^2 = 0.$$

Следовательно, на дне погранслоя правая часть (2.4) меньше нуля. В силу непрерывности она останется таковой нуля и в некотором слое вблизи дна. В настоящей работе этот слой будем называть *слоем самогравитации* или *G-слоем*.

Таким образом, *вблизи гладкого участка поверхности, обтекаемого несжимаемой вязкой жидкостью, есть слой ненулевой толщины (G-слой), в котором давление жидкости (если оно непостоянно) не может достигать минимального значения.*

Полученный результат (существование G-слоя) и результат Г. Гамеля (течение с малой завихренностью) несопоставимы, поскольку на дне погранслоя величина завихренности, в общем случае, не мала.

Из существования обнаруженного в данной работе критерия G-слоя следует, что через этот слой не могут проходить минимумы в волнах и солитонах давления (в нестационарных процессах). Это справедливо для областей с гладкими параметрами. Например, вся зона отрыва такой областью не является. А части этой зоны, разделенные линиями разрыва, могут рассматриваться как зоны гладких параметров. Для них сформулированный выше принцип минимума давления в G-слое верен, и невозможно прохождение волн и солитонов с минимумами давления.

7. Заключение

В работе замечено (и в этом состоит новизна работы), что с учетом самогравитации во многих важных течениях можно априори указать область течения с отрицательным значением правой части (2.4). В такой области минимум давления достигается на границе и только на границе рассматриваемого течения. Этот вывод качественно отличается от многих других

принципов минимума давления, в которых также утверждается, что минимум давления достигается на границе, но допускается случай постоянства давления во всей области.

Полученные результаты свидетельствуют, что учет самогравитации в некоторых случаях, может приводить к новым качественным выводам, основанным на исследовании знака правой части уравнения (2.4).

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 736 с.
2. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2019. – Iss. 2. – P. 57–70. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2019_Privalova_V.V._et_al._057_070.pdf
3. Prosviryakov E. Yu. Dynamic equilibria of a nonisothermal fluid // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. – 2018. – Vol. 22, no. 4. – P. 735–749. – DOI: 10.14498/vsgtu1651.
4. Просвирыков Е. Ю. Точные решения трехмерных потенциальных и завихренных течений Куэтта вязкой несжимаемой жидкости // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. – 2015. – Т. 4. Вып. 6. – С. 501–506. – DOI: 10.1134/S2304487X15060127.
5. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Y. Thermocapillary Convection of a Vertical Swirling Liquid // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2020. – Vol. 54. – P. 230–239. – DOI: 10.1134/S0040579519060034.
6. Prosviryakov E. Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2019. – Vol. 53, No. 1. – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088
7. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2009. – Vol. 43. No. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
8. Knyazev D. V. Solving the motion equations of a viscous fluid with a nonlinear dependence between a velocity vector and some spatial variables // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2018. – Vol. 59. – P. 928–933. – DOI: 10.1134/S0021894418050218.
9. Hamel G. Ein allgemeiner Satz über den Druck bei der Bewegung volumbeständiger Flüssigkeiten // *Monatsh. f. Mathematik und Physik*. – 1936. – Vol. 43. – P. 345–363. – DOI: 10.1007/BF01707614.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / пер. с англ. – М. : Мир, 1973. – 778 с.
11. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / пер. с англ. – М. : Мир, 1975. – 592 с.
12. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости / пер. с англ. А. Б. Шабата ; под ред. Л. В. Овсянникова. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. – 256 с.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. – М. : Наука, 1973. – 568 с.
14. Сизых Г. Б. Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // *Труды МФТИ*. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 108–112.
15. Бурмистров А. Н., Ковалев В. П., Сизых Г. Б. Принцип максимума для решения уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами // *Труды МФТИ*. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 97–102.
16. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Maximum principle for the Bernoulli function // *TsAGI Science Journal*. – 2015. – Vol. 46, No. 5. – P. 485–490. – DOI: 10.1615/TsAGISciJ.v46.i5.50.

17. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Принципы максимума в гидродинамике // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 г. : сборник трудов. – Казань : Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 989–991.
18. Беспорточный А. И., Бурмистров А. Н., Сизых Г. Б. Вариант теоремы Хопфа // Труды МФТИ. – 2016. – Т. 8, № 1 – С. 115–122.
19. Golubkin V. N., Kovalev V. P., Sizykh G. B. Maximum principle for pressure in ideal incompressible fluid flows // TsAGI Science Journal. – 2016. – Vol. 47, iss. 6. – P. 599–609. – DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2017019567.
20. Sizykh G. B. A velocity minimum in a potential fluid flow // Fluid Dynamics. – 2017. – 52 (3). – P. 345–350. – DOI: 10.1134/S0015462817030024.
21. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. – М. : Наука, 1976. – 447 с.
22. Golubkin V. N., Korolev G. L., Sizykh G. B. Differential properties of pressure in a viscous fluid // TsAGI Science Journal. – 2016. – Vol. 47, iss. 1. – P. 41–49. – DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2016017060.

Received: 03.03.2021

Revised: 01.04.2021



Accepted: 23.04.2021



DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051

EXACT SOLUTIONS OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR DESCRIBING AN ISOBARIC ONE-DIRECTIONAL VERTICAL VORTEX FLOW OF A FLUID

N. V. Burmasheva^{a)}, E. Yu. Prosviryakov^{b)*}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

The article proposes a family of exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing isobaric inhomogeneous unidirectional fluid motions. Due to the incompressibility equation, the velocity of the inhomogeneous Couette flow depends on two coordinates and time. The expression for the velocity field has a wide functional arbitrariness. This exact solution is obtained by the method of separation of variables, and both algebraic operations (additivity and multiplicativity) are used to substantiate the importance of modifying the classical Couette flow. The article contains extensive bibliographic information that makes it possible to trace a change in the exact Couette solution for various areas of the hydrodynamics of a Newtonian incompressible fluid. The fluid flow is described by a polynomial depending on one variable (horizontal coordinate). The coefficients of the polynomial functionally depend on the second (vertical) coordinate and time; they are determined by a chain of the simplest homogeneous and inhomogeneous partial differential parabolic-type equations. The chain of equations is obtained by the method of undetermined coefficients after substituting the exact solution into the Navier–Stokes equation. An algorithm for integrating a system of ordinary differential equations for studying the steady motion of a viscous fluid is presented. In this case, all the functions defining velocity are polynomials. It is shown that the topology of the vorticity vector and shear stresses has a complex structure even without convective mixing (creeping flow).

Keywords: exact solution, Couette flow, Navier–Stokes equation, inhomogeneous unidirectional flow, method of separation of variables, shear stress.

References

1. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, No. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
2. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p.
3. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Boca Raton, Chapman & Hall / CRC Press, 2004, 840 p.
4. Yerin G.B. *The Navier-Stokes equations of motion*, Oxford, Clarendon, Laminar Boundary Layers, 1963, ed. L. Rosenhead, pp. 114–162.

5. Dryden H.L., Murnaghan F.D., Bateman H. Report of the Committee on hydrodynamics. *Bull. Natl. Res. Council. (US)*, 1932, vol. 84, pp. 155–332.
6. Berker R. *Sur quelques cas d'Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Paris–Lille, Taffin–Lefort, 1936.
7. Berker R. *Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Berlin, Springer–Verlag. Handbuch der Physik, ed. S. Flugge, 1963, VIII/2, 384 p.
8. Wang C.Y. Exact solution of the Navier-Stokes equations—the generalized Beltrami flows, review and extension. *Acta Mech.*, 1990, vol. 81, pp. 69–74. DOI: 10.1007/BF01174556.
9. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
10. Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.* 1989, vol. 42 (11S), pp. 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
11. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier-Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, No. 1, pp. 6–76. (In Russian).
12. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
13. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1851, vol. 9, pp. 8–106.
14. Taylor G.I. Stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders. *J. Phil. Trans. Royal Society A.*, 1923, vol. 223, No. 605–615, pp. 289–343. DOI: 10.1098/rsta.1923.0008.
15. Holodniok M., Kubíček M., Hlaváček V. Computation of the flow between two rotating coaxial disk: multiplicity of steady-state solutions. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 108, pp. 227–240. DOI: 10.1017/S0022112081002097.
16. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 464, pp. 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.
17. Zhilenko D.Y., Krivonosova O.E. Transitions to chaos in the spherical Couette flow due to periodic variations in the rotation velocity of one of the boundaries. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, No. 4, pp. 452–460. DOI: 10.1134/S0015462813040042.
18. Zhilenko D., Krivonosova O., Gritsevich M., Read P. Wave number selection in the presence of noise: Experimental results. *Chaos*, 2018, vol. 28 (5), pp. 053110. DOI: 10.1063/1.5011349.
19. Zhilenko D.Y., Krivonosova O.E. Origination and evolution of turbulent flows in a rotating spherical layer. *Technical Physics*, 2010, vol. 55, No. 4, pp. 449–456. DOI: 10.1134/S1063784210040031.
20. Belyaev Yu.N., Monakhov A.A., Yavorskaya I.M. Stability of a spherical Couette flow in thick layers with rotation of the inner sphere. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, 1978, No. 2, pp. 9–15. (In Russian).
21. Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P. The Couette problem for a Kelvin–Voigt medium. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 186, pp. 495–510. DOI: 10.1007/s10958-012-1003-0.
22. Zhuk V.I., Protsenko I.G. Asymptotic model for the evolution of perturbations in the plane Couette–Poiseuille flow. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, No. 3, pp. 896–900. DOI: 10.1134/S1064562406060287.
23. Gavrilenko S.L., Shil'ko S.V., Vasin R.A. Characteristics of a viscoplastic material in the Couette flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, No. 3, pp. 439–444. DOI: 10.1023/A:1015378622918.
24. Troshkin O.V. Nonlinear stability of Couette, Poiseuille, and Kolmogorov plane channel flows. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, pp. 181–185. DOI: 10.1134/S1064562412020068.
25. Rudyak V.Y., Isakov E.B. & Bord E.G. Instability of plane Couette flow of two-phase liquids. *Tech. Phys. Lett.*, 1998, vol. 24, pp. 199–200. DOI: 10.1134/1.1262051.
26. Shalybkov D.A. Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow. *Physics–Uspekhi*, 2009, vol. 52, No. 9, pp. 915–935. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971.

27. Boronin S.A. Stability of the plane Couette flow of a disperse medium with a finite volume fraction of the particles. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46, pp. 64–71. DOI: 10.1134/S0015462811010078.
28. Kudinov V.A. and Kudinov I.V. Calculation of Exact Analytic Solutions of Hyperbolic Equations of Motion in the Accelerated Couette Flow. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Energetika*, 2012, No. 1, pp. 119–133. (In Russian).
29. Babkin V.A. Plane Turbulent Couette Flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2003, vol. 76, pp. 1251–1254. DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.c6.
30. Abramyan A.K., Mirantsev L.V., Kuchmin A.Yu. Modeling of processes at Couette simple fluid flow in flat nano-scopical canal. *Matem. Mod.*, 2012, vol. 24, Nos. 4, pp. 3–21. (In Russian).
31. Malyshev V. and Manita A. Stochastic Micromodel of the Couette Flow. *Theor. Prob. Appl.*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 716–727. DOI: 10.1137/S0040585X97983924.
32. Georgievskii D.V. Generalized Joseph estimates of stability of plane shear flows with scalar nonlinearity. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2011, vol. 75, pp. 140–143. DOI: 10.3103/S1062873810121044.
33. Belyaeva N.A., Kuznetsov K.P. Analysis of a nonlinear dynamic model of the Couette flow for structured liquid in a flat gap. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2012, vol. 2 (27), pp. 85–92. (In Russian).
34. Neto C., Evans D., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Rep. Prog. Phys.*, 2005, vol. 68 (12), pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
35. Beirão Da Veiga H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 2004, 9 (9–10), pp. 1079–1114.
36. Bocquet L., Charlaix E. Nanofluidics, from bulk to interfaces. *Chem. Soc. Rev.*, 2010, vol. 39, pp. 1073–1095. DOI: 10.1039/b909366b.
37. Bouzigues C. I., Tabeling P., Bocquet L. Nanofluidics in the debye layer at hydrophilic and hydrophobic surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, pp. 114503.
38. Ng C.O., Wang C.Y. Apparent slip arising from Stokes shear flow over a bidimensional patterned surface. *Microfluid Nanofluid*, 2010, vol. 8, pp. 361–371. DOI: 10.1007/s10404-009-0466-x.
39. Wang Y., Bhushan B. Boundary slip and nanobubble study in micro/nanofluidics using atomic force microscopy. *Soft Matter*, 2010, vol. 6, pp. 29–66. DOI: 10.1039/B917017K.
40. Schwarz K.G., Schwarz Y.A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer in the Presence of the Navier Slip Condition. *Fluid Dyn.*, 2020, iss. 55, pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0015462820010115.
41. Burmasheva N.V., Privalova V.V., Prosviryakov E.Y. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sādhanā*, 2021, vol. 46, pp. 55. DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
42. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, No. 2, pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20. (In Russian).
43. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, No. 7, pp. 43–44. DOI: 10.1007/BF00914697.
44. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
45. Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part. 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech*, 1983, vol. 132, pp. 119–144. DOI: 10.1017/S0022112083001512.
46. Ortiz-Pérez A.S., Dávalos-Orozco L.A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluid*, 2011, vol. 23, iss. 8, pp. 084107. DOI: 10.1063/1.3626009.
47. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for stable convective concentration flows of a Couette type. *Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, No. 3, pp. 337–349. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.27. (In Russian).

48. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm State Univ. Publ., 2006, 155 p. (In Russian).
49. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, No. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
50. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, No. 1, pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
51. Birikh R.V., Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Convective flow in a horizontal channel with non-newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, No. 1, pp. 173–179. DOI: 10.1134/S0015462815010172.
52. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2017, vol. 21, No.1, pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527. (In Russian).
53. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2017, vol. 21, No. 4, pp. 736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568. (In Russian).
54. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2019, vol. 23, No. 2, pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
55. Aristov S.N., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2016, vol. 12, No. 2, pp. 167–178. DOI: 10.20537/nd1602001. (In Russian).
56. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*, 2020, vol. 32, iss. 8, pp. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
57. Schwarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 49, No. 4, pp. 438–442. DOI: 10.1134/S0015462819110016.
58. Andreev V.K., Stepanova I.V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 2, pp. 136–147. DOI: 10.1134/S0015462816020022.
59. Andreev V.K., Stepanova I.V., Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 228, pp. 59–67. DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.002.
60. Bekezhanova V.B. Change of the types of instability of a steady two-layer flow in an inclined channel. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46 (525). DOI: 10.1134/S001546281104003X.
61. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Ekman convective layer flow of a viscous incompressible fluid. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, No. 2, pp. 189–195. DOI: 10.1134/S0001433818020081. (In Russian).
62. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogues of the Birikh solution. *Izv. AltGU*, 2011, Nos. 1–2 (69), pp. 62–69. (In Russian).
63. Shvarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, No. 4, pp. 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
64. Andreev V.K. *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotoryye ego obobshcheniya* [Birikh's solutions of convection equations and some of its generalizations: preprint]. Krasnoyarsk, IVM SO RAN Publ., 2010, 24 p. (In Russian).

65. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, No. 2, pp. 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
66. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, No. 4, pp. 445–456. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38. (In Russian).
67. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, vol. 9, No. 4, pp. 651–657. (In Russian).
68. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Layered Bénard-Marangoni convection during heat transfer according to the Newton's law of cooling. *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, No. 6, pp. 927–940. (In Russian).
69. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. *Trudy IMM UrO RAN*, 2017, vol. 23, No. 2, pp. 32–41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41. (In Russian).
70. Knyazev D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, No. 2, pp. 212–217. DOI: 10.1134/S0021894411020088.
71. Kompaniets L.A., Pitalskaya O.S. Exact solutions of Ekman's model for three-dimensional wind-induced flow of homogeneous fluid with geostrophic current. *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, No. 1, pp. 57–66. DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-1-57-66. (In Russian).
72. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of Navier-Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy IMM UrO RAN*, 2020, vol. 26, No. 2, pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87. (In Russian).
73. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series «Mathematics»*, 2020, vol. 32, pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).
74. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 1, pp. 6–23. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023. Available at: https://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1_278.html
75. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 2, pp. 61–75, DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2020_Burmasheva_N.V._et_al._061_075.pdf
76. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
77. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, No. 2, pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
78. Aristov S.N. Eddy currents in thin liquid layers: Synopsis of a Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis, Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
79. Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, No. 1, pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
80. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, No. 4, pp. 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.

81. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, vol. 10, No. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
82. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 57–70. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. Available at: https://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_249.html
83. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 2, pp. 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
84. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, No. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
85. Prosviryakov E.Yu. Exact solutions of three-dimensional potential and vortical Couette flows of a viscous incompressible fluid. *Bulletin of the National Research Nuclear University MIFI*, 2015, vol. 4, No. 6, pp. 501–506. DOI: 10.1134/S2304487X15060127. (In Russian).
86. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2019, vol. 15, No. 3, pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306. (In Russian).
87. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, No. 5, pp. 581–587. DOI: 10.7868/S0568528116050030. (In Russian).
88. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of viscous fluid layer under the heating the lower boundary condition. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 4, pp. 44–55. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055. Available at: https://dream-journal.org/issues/2019-4/2019-4_262.html
89. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for the convective creep Couette-Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 2, pp. 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2018_Privalova_V.V._et_al_092_109.pdf
90. Aristov S.N., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Planar linear Bénard-Rayleigh convection with quadratic heating of the upper boundary of a layer of a viscous incompressible fluid. *Vestnik Kazanskogo gos. tekhn. Universiteta im. A.M. Tupoleva*, 2015, vol. 71, No. 2, pp. 69–75. (In Russian).
91. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Stationary convective Couette flow with linear heating of the lower boundary of the liquid layer. *Vestnik Kazanskogo gos. tekhn. Universiteta im. A.M. Tupoleva*, 2015, vol. 71, No. 2, pp. 148–153. (In Russian).
92. Aristov S.N., Privalova V.V., Prosviryakov E.Y. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 12, No. 2, pp. 167–178. DOI: 10.20537/nd1602001. (In Russian).
93. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Marangoni viscous incompressible fluid. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, No. 3 (32), pp. 110–118. (In Russian).
94. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Exact solutions of thermocapillary convection with localized heating of a flat layer of a viscous incompressible fluid. *Vestnik Kazanskogo gos. tekhn. Universiteta im. A.M. Tupoleva*, 2014, No. 3, pp. 7–12. (In Russian).
95. Andreev V.K., Cheremnykh E.N. 2D thermocapillary motion of three fluids in a flat channel. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2016, vol. 9, iss. 4, pp. 404–415. DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-4-404-415.

96. Andreev V.K., Cheremnykh E.N. The joint creeping motion of three viscid liquids in a plane layer: A priori estimates and convergence to steady flow. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, No. 1, pp. 7–20. DOI: 10.1134/S1990478916010026.
97. Andreev V.K., Sobachkina N.L. *Dvizhenie binarnoy smesi v ploskikh i cilindricheskikh oblastyakh* [Movement of a binary mixture in flat and cylindrical regions]. Krasnoyarsk, SFU Publ., 2012, 187 p. (In Russian).
98. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeit-sstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dingler's Politech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324.
99. Riabouchinsky D. Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquid. *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, 1924, vol. 179, pp. 1133–1136.
100. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*, 2nd ed., Elsevier, 558 p.
101. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow, Izd-vo IPMekh RAN Publ., 2020, 384 p. (In Russian).
102. Aristov S.N., Polyanin A.D. Exact solutions of unsteady three-dimensional Navier-Stokes equations. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, No. 7, pp. 316–321. DOI: 10.1134/S1028335809070039.
103. Polyanin A.D. Exact generalized separable solutions of the Navier-Stokes equations. *Doklady RAN*, 2001, vol. 380, No. 4, pp. 491–496. (In Russian).
104. Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics. *Matematicheskoe Modelirovanie i Chislennye Metody*, 2019, No. 1, pp. 65–97. DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597. (In Russian).
105. Polyanin A.D., Aristov S.N. Systems of hydrodynamic type equations: exact solutions, transformations, and nonlinear stability. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, No. 9, pp. 429–434. DOI: 10.1134/S1028335809090079.
106. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional separable solutions of two classes of nonlinear mathematical physics equations. *Doklady AN*, 2019, vol. 486, No. 3, pp. 287–291. DOI: 10.31857/S0869-56524863287-291. (In Russian).
107. Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations. *Russian J. Math. Physics*, 2010, vol. 17, No. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1134/S1061920810010012.
108. Meleshko S.V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, No. 1, pp. 47–68, DOI: 10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73.

Подана в журнал: 03.03.2021



УДК 517.958



DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗОБАРИЧЕСКОГО ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. Бурмашева^{а)}, Е. Ю. Просвирыков^{б)*}

*Институт машиноведения УрО РАН,
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: +7 (343) 374–53–30

В статье предложено семейство точных решений уравнений Навье–Стокса для описания изобарических неоднородных однонаправленных движений жидкости. Из-за уравнения несжимаемости скорость неоднородного течения Куэтта зависит от двух координат и времени. Приведенное выражение для поля скоростей обладает широким функциональным произволом. Данное точное решение получено методом разделения переменных, причем используются обе алгебраические операции (аддитивность и мультипликативность) для обоснования важности модификации классического течения Куэтта. В статье собрана значительная библиографическая информация, позволяющая проследить изменение точного решения Куэтта для различных областей гидродинамики ньютоновской несжимаемой жидкости. Течение жидкости представлено полиномом, зависящим от одной переменной (горизонтальной координаты). Коэффициенты полинома функционально зависят от второй (вертикальной) координаты и времени и определяются цепочкой простейших однородных и неоднородных уравнений в частных производных параболического типа. Цепочка уравнений получена методом неопределенных коэффициентов после подстановки точного решения в уравнение Навье–Стокса. Приведен алгоритм интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для изучения установившегося движения вязкой жидкости. В этом случае все функции, определяющие скорость, являются полиномами, топология вектора завихренности и касательных напряжений даже без конвективного перемешивания (ползущее течение) имеет сложную структуру.

Ключевые слова: точное решение, течение Куэтта, уравнение Навье–Стокса, неоднородное однонаправленное течение, метод разделения переменных, касательное напряжение.

1. Введение

Проводя ретроспективный анализ научной литературы, можно сделать вывод, что одними из первых точных решений уравнений Навье–Стокса являлись формулы, описывающие изобарические потоки жидкости [1–11]. К таким решениям можно отнести однонаправленные течения Куэтта и две задачи Стокса [12;13]. Точное решение Куэтта описывает слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое между одной или двумя подвижными границами [1–13]. Для первой и второй задач Стокса характерно изучение нестационарных потоков, индуцируемых различными возмущениями границ слоя жидкости [13]. Не будет преувеличением утверждение о том, что точные решения Куэтта и Стокса положи-

ли начало теории точного интегрирования уравнений Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей в различных силовых полях [1–13].

Течение Куэтта в цилиндрической области описывается точным решением Куэтта–Тейлора (течение жидкости между коаксиальными цилиндрами) [14–16]. Движение жидкости в сферической области так же, как точные решения Куэтта и Куэтта–Тейлора, имеет имя – сферическое течение Куэтта [17–20].

С теоретической точки зрения решение Куэтта востребовано в теории гидродинамической устойчивости [21–33]. Известно, что использование профиля Куэтта в качестве основного течения используется при изучении влияния различных типов возмущений (вторичных течений) на структуру изотермических гидродинамических потоков в бесконечно протяженных слоях жидкости, в областях с цилиндрической и сферической симметрией [21–33].

Течение Куэтта нашло свое применение в гидродинамике, протекающей на масштабах наномира и микрофлюидике [34–41]. Использование профиля Куэтта позволяет теоретически визуализировать длину скольжения при движении жидкости по гидрофобной поверхности в протяженной слое [34–42].

Применение структуры точного решения Куэтта в теории конвекции привело к первому классу точных решений уравнений Обербека–Буссинеска – семейству Остроумова–Бириха [43–46]. Обобщение точного решения для однонаправленных конвективных, диффузионных и термодиффузионных потоков вращающихся и невращающихся жидкостей приведено в библиографических источниках [47–76].

В сравнительно недавно опубликованных статьях было освещено, что в рамках класса Линя–Сидорова–Аристовой [77–80] было построено обобщение течения типа Куэтта, индуцированное неоднородным распределением скоростей и касательных напряжений на границе жидкости и атмосферного воздуха [81–84]. Неоднородное распределение кинематических характеристик приводит к образованию вертикальной закрутки жидкости при отсутствии вращения [81–84]. Эти решения позволяют исследовать течения в экваториальной зоне Мирового океана в приближении f -плоскости.

Движение жидкости может быть индуцировано не только при помощи движения границ, но и посредством действия силовых полей. Интересные решения, обобщающие результаты Куэтта, приведены в статьях [50; 85–87]. При рассмотрении ползущих плоских или трехмерных конвективных течений типа Куэтта в горизонтальных слоях с проницаемыми границами [88–92] или с учетом термокапиллярного эффекта Марангони [93–97] описывается семейством Хименца–Рябушинского [98; 99].

Учитывая важность использования классического точного решения Куэтта в теоретических и экспериментальных исследованиях, в статье осуществляется построение точных решений для описания однонаправленных изобарических и изотермических потоков жидкости с неоднородным распределением скорости и касательных напряжений на границах горизонтального слоя жидкости.

2. Постановка задачи

Изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое представлено следующей системой уравнений, записанной в векторной форме [100]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V}; \quad (1)$$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0. \quad (2)$$

В уравнении Навье–Стокса (1) и уравнении несжимаемости (2) приняты обозначения: $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ – оператор Гамильтона; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа; круглые скобки в уравнении (1) определяют скалярное произведение.

Далее рассмотрим однонаправленные течения жидкости с полем скоростей:

$$\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), 0, 0). \quad (3)$$

После подстановки вектора скорости (3) в уравнения (1) и (2) получим следующую систему:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

В последней системе уравнение (4) – параболическое уравнение типа теплопроводности размерности (3+1). Из уравнения несжимаемости (5) следует, что скорости жидкости не зависят от координаты x . Таким образом, однонаправленное течение жидкости является неоднородным. Поле скоростей зависит от двух координат и времени:

$$V_x = V_x(y, z, t). \quad (6)$$

Неизвестная функция скорости V_x , описывающая однонаправленное неоднородное изобарическое течение типа Куэтта, в этом случае удовлетворяет уравнению размерности (2+1):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (7)$$

Далее приведены новые точные решения уравнения (7), которые также удовлетворяют уравнению Навье–Стокса (1) и уравнению несжимаемости (2). Заметим, что установившиеся течения жидкости $\mathbf{V} = (V_x(y, z), 0, 0)$, как и классическое течение Куэтта, не зависят от вязкости:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = 0.$$

Поскольку скорость V_x удовлетворяет уравнению Лапласа, то эта функция является гармонической.

3. Класс точных решений

Построение точного решения будет осуществляться при помощи метода разделенных переменных и его модификаций [2; 3; 100]. Отметим, что уравнению (7) удовлетворяет классическое точное решение Куэтта

$$V_x = U(z, t), \quad (8)$$

которое определяется из уравнения типа теплопроводности размерности (1+1):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Если рассматривать установившееся течение $V_x = U(z)$ вязкой несжимаемой жидкости, то профиль скорости определяется из обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и имеет вид:

$$U = C_1 z + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Другим известным частным решением уравнения (7) является следующее представление поля скорости:

$$V_x = y u_1(z, t). \quad (9)$$

В этом случае функция u_1 также удовлетворяет простейшему параболическому уравнению типа теплопроводности размерности (1+1). Если учесть, что уравнение (7) является линейным, то сумма частных решений (8) и (9)

$$V_x = U(z, t) + y u_1(z, t) \quad (10)$$

также является решением. Поставив выражение (10) в уравнение (7), получим уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right).$$

Используя метод неопределенных коэффициентов относительно координаты y , получим систему уравнений, состоящую из двух изолированных уравнений параболического типа (1+1), для определения скорости U и пространственного ускорения u_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим сумму решения (10) и нелинейного слагаемого вида $\frac{y^2}{2}u_2(z, t)$:

$$V_x = U(z, t) + yu_1(z, t) + \frac{y^2}{2}u_2(z, t). \quad (11)$$

Подставим сумму (11) в уравнение (7) и в результате несложных преобразований придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = v \left(u_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение в силу метода неопределенных коэффициентов относительно координаты y распадается на несколько уравнений типа теплопроводности размерности $(1+1)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \left(u_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Отметим, что в получившейся системе первое уравнение (уравнение для однородной скорости U) перестает быть изолированным. Этот факт объясняется именно нелинейностью последнего слагаемого решения (11) по переменной y . Другими словами, решение (11) уже не является суперпозицией ранее приведенных решений, т. е. наследует нелинейные свойства уравнений Навье–Стокса. Эта же тенденция сохраняется и при дальнейшем повышении степени для координаты y в слагаемых, определяющих вид скорости V_x .

4. Полиномиальные точные решения произвольного порядка

Рассмотрим далее точное решение уравнения (7) в виде полиномиальных сумм специального вида:

$$V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} u_k(z, t). \quad (13)$$

В формуле (13) $k!$ обозначает взятие факториала от натурального числа k , коэффициенты U и u_k зависят от вертикальной координаты z и времени t . Вид точного решения можно трактовать как применение модифицированного разделения переменных [101–108].

Посчитаем отдельно частные производные, необходимые для подстановки в уравнение типа теплопроводности (7):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k.$$

Подставим получившиеся выражения в уравнение (7):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} = v \left[\sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right];$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} y^k = v \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{u_k}{(k-2)!} \right) y^{k-2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} y^k \right].$$

Это уравнение можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений, если применить метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 \right); \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= v \left(u_3 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= v \left(u_4 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right); \\ &\dots; \\ \frac{\partial u_{n-2}}{\partial t} &= v \left(u_n + \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} &= v \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= v \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

В получившейся системе только два изолированных уравнения (уравнения для коэффициентов u_{n-1} и u_n (13)). Интегрирование системы (14) осуществляется в обратном порядке – от последнего уравнения к первому. Каждое из уравнений системы (14) является нестационарным уравнением типа уравнения теплопроводности. При этом большая часть указанных уравнений является неоднородными, неоднородность которых определяется в результате решения предыдущих уравнений. Таким образом, имеет место рекуррентный порядок интегрирования уравнений системы (14).

Заметим, что если в разложении (13) положить $n = 2$, т. е. ограничиться только квадратичными членами, то система (14) примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \left(u_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Получившаяся система полностью совпадает с приведенной выше системой (12), определяющей компоненты решения (11).

Используем рекуррентный способ интегрирования для описания установившихся течений для поля скоростей (11), которое имеет вид:

$$V_x = U(z) + yu_1(z) + \frac{y^2}{2}u_2(z).$$

В этом случае система уравнений в частных производных типа теплопроводности (12) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -u_2; \quad \frac{d^2u_1}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^2u_2}{dz^2} = 0.$$

Точное решение последней системы имеет вид:

$$u_2 = C_1z + C_2; \quad u_1 = C_3z + C_4;$$

$$U = -\left(C_1 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2}\right) + C_5z + C_6.$$

Последний коэффициент u_2 и предпоследний коэффициент u_1 являются линейными функциями, а однородное слагаемое U описывается многочленом третьей степени.

Возвращаясь к исследованию поля скоростей (13), рассмотрим случай установившегося течения. Оно сводится к интегрированию системы уравнений (14) вида:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -u_2;$$

$$\frac{d^2u_1}{dz^2} = -u_3;$$

$$\frac{d^2u_2}{dz^2} = -u_4;$$

...

$$\frac{d^2u_{n-2}}{dz^2} = -u_n;$$

$$\frac{d^2u_{n-1}}{dz^2} = 0;$$

$$\frac{d^2u_n}{dz^2} = 0.$$

Интегрирование системы производится аналогично частному случаю для $n=2$. Коэффициенты u_n и u_{n-1} являются линейными функциями; коэффициенты, определяемые непосредственно через u_n и u_{n-1} , – кубическими многочленами. Степень полиномов, описы-

вающих остальные коэффициенты в представлении поля скорости, постепенно будет возрастать, каждый раз увеличиваясь на два.

5. Завихренность и касательные напряжения

Напомним, что для классического течения Куэтта касательное напряжение $\tau_{xz} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z}$ является постоянными, т. е. в жидкости регистрируются напряжения одного знака [1–12]. Вычислив касательное напряжение для поля скоростей (11), получим для него выражение:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{y^k}{k!} \right).$$

При учете пространственной неоднородности скорости однонаправленных течений поле касательного напряжения имеет сложную топологию зон растягивающих и сжимающих напряжений. Границы нулевого значения касательного напряжения τ_{xz} для каждого момента времени определяются алгебраическим уравнением:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{y^k}{k!} = 0.$$

Неоднородное распределение скорости влечет появление в жидкости касательного напряжения:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial y} = \eta \sum_{k=1}^n u_k \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Проанализируем величину завихренности потока для точного решения вида (13). Согласно определению, завихренность определяется следующим определителем:

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{y^k}{k!} \right) \mathbf{j} - \left(\sum_{k=1}^n u_k \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Учитывая выражения для касательных напряжений, получим следующее разложение вектора завихренности:

$$\Omega = \frac{\tau_{xz}}{\eta} \mathbf{j} - \frac{\tau_{xy}}{\eta} \mathbf{k}.$$

На основании полученного выражения можно утверждать, что рассматриваемое однонаправленное течение вида (13) является всюду (возможно, за исключением нескольких точек) вихревым. Зоны потенциального течения определяются условием:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 = 0.$$

При этом возникновение завихренности потока объясняется сильной нелинейной зависимостью структуры решения (13) от горизонтальной координаты y .

6. Заключение

В статье предложен новый класс решений уравнений Навье–Стокса для описания нестационарного изобарического однонаправленного вертикально завихренного течения жидкости. Отличительной особенностью указанного класса является полиномиальная зависимость произвольного порядка скорости от одной из горизонтальных координат, причем коэффициенты данного полиномиального представления зависят произвольным образом как от вертикальной координаты, так и от времени. В статье доказано, что решения такого вида, начиная с полиномов второго порядка, не могут быть получены суперпозицией решений меньшей степени. Приведена система уравнений, позволяющая определить переменные коэффициенты в представлении скорости, решение системы сводится к последовательному интегрированию нестационарных неоднородных уравнений типа теплопроводности.

Литература

1. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyinin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2009. – Vol. 43, No. 5. – P. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
2. Drazin P. G. and Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
3. Polyinin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. – Boca Raton : Chapman & Hall / CRC Press, 2004. – 840 p.
4. Whitham G. B. *The Navier–Stokes equations of motion* / ed. L. Rosenhead. – Oxford, Clarendon : *Laminar Boundary Layers*, 1963. – P. 114–162.
5. Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H. Report of the committee on hydrodynamics // *Bull. Natl. Res. Council. (US)*. – 1932. – Vol. 84 – P. 155–332.
6. Berker R. *Sur quelques cas d'Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*. – Paris-Lille: Taffin–Lefort, 1936.
7. Berker R. *Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible* / ed. S. Flugge. – Berlin : Springer-Verlag. *Handbuch der Physik*, 1963. – VIII/2. – 384 p.
8. Wang C. Y. Exact solution of the Navier–Stokes equations-the generalized Beltrami flows, review and extension // *Acta Mech.* – 1990. – Vol. 81. – P. 69–74. – DOI: 10.1007/BF01174556.
9. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
10. Wang, C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
11. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
12. Couette M. *Etudes sur le frottement des liquids* // *Ann. Chim. Phys.* – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
13. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // *Camb. Philo. Trans.* – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.

14. Taylor G. I. Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders // *Philosophical Transactions Royal Society of London.* – 1923. – Vol. 223, No. 605–615. – P. 289–343. – DOI: 10.1098/rsta.1923.0008.
15. Holodniok M., Kubíček M., Hlaváček V. Computation of the flow between two rotating coaxial disk: multiplicity of steady-state solutions // *J. Fluid Mech.* – 1981. – Vol. 108. – P. 227–240. – DOI: 10.1017/S0022112081002097.
16. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215. – DOI: 10.1017/S0022112002001003.
17. Zhilenko D. Y., Krivonosova O. E. Transitions to chaos in the spherical Couette flow due to periodic variations in the rotation velocity of one of the boundaries // *Fluid Dynamics.* – 2013. – Vol. 48, No. 4. – P. 452–460. – DOI: 10.1134/S0015462813040042.
18. Wave number selection in the presence of noise: Experimental results / D. Zhilenko, O. Krivonosova, M. Gritsevich, P. Read // *Chaos.* – 2018. – Vol. 28. – 053110. – DOI: 10.1063/1.5011349.
19. Zhilenko D. Y., Krivonosova O. E. Origination and evolution of turbulent flows in a rotating spherical layer // *Technical Physics.* – 2010. – Vol. 55, No. 4. – P. 449–456. – DOI: 10.1134/S1063784210040031.
20. Беляев Ю. Н., Монахов А. А., Яворская И. М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа.* – 1978. – № 2. – С. 9–15.
21. Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P. The Couette problem for a Kelvin–Voigt medium // *J. Math. Sci.* – 2012. – Vol. 186. – P. 495–510. – DOI: 10.1007/s10958-012-1003-0.
22. Zhuk V. I., Protsenko I. G. Asymptotic model for the evolution of perturbations in the plane Couette–Poiseuille flow // *Doklady Mathematics.* – 2006. – Vol. 74, No. 3. – P. 896–900. – DOI: 10.1134/S1064562406060287.
23. Gavrilenko S. L., Shil'ko S. V., Vasin R. A. Characteristics of a viscoplastic material in the Couette flow // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2002. – Vol. 43, No. 3. – P. 439–444. – DOI: 10.1023/A:1015378622918.
24. Troshkin O. V. Nonlinear stability of Couette, Poiseuille, and Kolmogorov plane channel flows // *Dokl. Math.* – 2012. – Vol. 85. – P. 181–185. – DOI: 10.1134/S1064562412020068.
25. Rudyak V., Isakov E., & Bord E. Instability of plane Couette flow of two-phase liquids // *Tech. Phys. Lett.* – 1998. – Vol. 24. – P. 199–200. – DOI: 10.1134/1.1262051.
26. Shalybkov D. A. Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow // *Physics–Uspekhi.* – 2009. – Vol. 52, No. 9. – P. 915–935. – DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971.
27. Boronin S. A. Stability of the plane Couette flow of a disperse medium with a finite volume fraction of the particles // *Fluid Dynamics.* – 2011. – Vol. 46. – P. 64–71. – DOI: 10.1134/S0015462811010078.
28. Кудинов В. А., Кудинов И. В. Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // *Изв. РАН. Энергетика.* – 2012. – № 1. – С. 119–133.
29. Babkin V. A. Plane Turbulent Couette Flow // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* – 2003. – Vol. 76. – P. 1251–1254. – DOI: 10.1023/B:JOEP.0000012026.19646.c6.
30. Абрамян А. К., Миранцев Л. В., Кучмин А. Ю. Моделирование течения Куэтта простой жидкости в плоском канале наноразмерной высоты // *Математическое моделирование.* – 2012. – Т. 24, № 4. – С. 3–21.
31. Malyshev V. and Manita A. Stochastic Micromodel of the Couette Flow // *Theor. Prob. Appl.* – 2009. – Vol. 53, No. 4. – P. 716–727. – DOI: 10.1137/S0040585X97983924.
32. Georgievskii D. V. Generalized Joseph estimates of stability of plane shear flows with scalar nonlinearity // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* – 2011 – Vol. 75. – P. 140–143. – DOI: 10.3103/S1062873810121044.

33. Беляева Н. А., Кузнецов К. П. Анализ нелинейной динамической модели течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре // Вестник СамГТУ. Сер. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (27). – С. 85–92.
34. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso, H.-J. Butt, V. S. J. Craig // Rep. Prog. Phys. – 2005. – Vol. 68. – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
35. Beirao da Veiga H. Regularity for Stokes and general-ized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions // Adv. Different. – 2004. – 9 (9–10). – P. 1079–1114.
36. Bocquet L., Charlaix E. Nanofluidics, from bulk to interfaces // Chem. Soc. Rev. – 2010. – Vol. 39. – P. 1073–1095. – DOI: 10.1039/b909366b.
37. Bouzigues C. I., Tabeling P., Bocquet L. Nanofluidics in the Debye Layer at Hydrophilic and Hydrophobic Surfaces // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – P. 114503.
38. Ng C. O., Wang C. Y. Apparent slip arising from Stokes shear flow over a bidimensional patterned surface // Microfluid Nanofluid. – 2010. – Vol. 8. – P. 361–371. – DOI: 10.1007/s10404-009-0466-x.
39. Wang Y., Bhushan B. Boundary slip and nanobubble study in micro/nanofluidics using atomic force microscopy // Soft Matter. – 2010. – Vol. 6. – P. 29–66. – DOI: 10.1039/B917017K.
40. Schwarz K. G., Schwarz Y. A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer in the Presence of the Navier Slip Condition // Fluid Dynamics. – 2020. – Iss. 55. – P. 31–42. – DOI: 10.1134/S0015462820010115.
41. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov E. Y. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition // Sādhanā. – 2021. – Vol. 46. – 55. – DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
42. Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 230–242. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
43. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1966. – No. 7. – P. 43–44. – DOI: 10.1007/BF00914697.
44. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М. : Гостехиздат, 1952. – 256 с.
45. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part. 1. Convective instabilities // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 132. – P. 119–144. – DOI: 10.1017/S0022112083001512.
46. Ortiz-Pérez A. S., Dávalos-Orozco L. A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // Phys. Fluid. – 2011. – Vol. 23. – 084107. – DOI: 10.1063/1.3626009.
47. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение для установившихся конвективных концентрационных течений типа Куэтта // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 3. – С. 337–349. – DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.27.
48. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Изд-во Пермск. гос. ун-та, 2006.
49. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50, No. 3. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
50. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Y. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2020. – Vol. 54, No. 1. – P. 230–239. – DOI: 10.1134/S0040579519060034.
51. Birikh R. V., Pukhnachev V. V., Frolovskaya O. A. Convective flow in a horizontal channel with non-newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient // Fluid Dynamics. – 2015. – Vol. 50, No. 1. – P. 173–179. – DOI: 10.1134/S0015462815010172.

52. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, вып. 1. – С. 180–196. – DOI: 10.14498/vsgtu1527.
53. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, вып. 4. – С. 736–751. – DOI: 10.14498/vsgtu1568.
54. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, вып. 2. – С. 341–360. – DOI: 10.14498/vsgtu1670.
55. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12, вып. 2. – С. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
56. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // Journal of King Saud University – Science. – 2020. – Vol. 32, iss. 8. – P. 3364–3371. – DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
57. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynamics. – 2019. – Vol. 49, No. 4. – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462819110016.
58. Andreev V. K., Stepanova I. V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, No. 2. – P. 136–147. – DOI: 10.1134/S0015462816020022.
59. Andreev V. K., Stepanova I. V. Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force // Appl. Math. Comput. – 2014. – Vol. 228. – P. 59–67. – DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.002.
60. Bekezhanova V. B. Change of the types of instability of a steady two-layer flow in an inclined channel // Fluid Dynamics. – 2011. – Vol. 46 (525). – DOI: 10.1134/S001546281104003X.
61. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2018. – Т. 54, вып. 2. – С. 213–220. – DOI: 10.7868/S0003351518020101.
62. Пухначев В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. АлтГУ. – 2011. – № 1–2 (69). – С. 62–69.
63. Shvarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynamics. – 2014. – Vol. 49, No. 4. – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
64. Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения : Препринт. – Красноярск : ИВМ СО РАН, 2010. – 24 с.
65. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50, No. 2. – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.
66. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спёвак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
67. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелин. динам. – 2013. – Т. 9. – № 4. – С. 651–657.
68. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8, № 6. – С. 927–940.

69. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Тр. ИММ УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 32–41. – DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.
70. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2011. – Vol. 52, No. 2. – P. 212–217. – DOI: 10.1134/S0021894411020088.
71. Компаниец Л. А., Питальская О. С. Точные решения модели Экмана трехмерного ветрового движения однородной жидкости с учетом геострофической составляющей // Компьютерные исследования и моделирование. – 2009. – Т. 1, вып. 1. – С. 57–66. – DOI: 10.20537/2076-7633-2009-1-1-57-66.
72. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26. Вып. 2. – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
73. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
74. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 1. – P. 6–23. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023. – URL: https://dream-journal.org/issues/2020-1/2020-1_278.html
75. Burmasheva N. V. and Prosviryakov E. Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 2. – P. 61–75. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2020_Burmasheva_N.V._et_al._061_075.pdf
76. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. – 1957. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: [10.1007/BF00298016](https://doi.org/10.1007/BF00298016).
77. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1989. – Vol. 30, No. 2. – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
78. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Аристов Сергей Николаевич. – Владивосток : ИАПУ, 1990. – 303 с.
79. Prosviryakov E. Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53, No. 1. – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
80. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2015. – Вып. 4. – С. 50–54.
81. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10, вып. 2. – С. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.
82. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Vortex flows of a viscous incompressible fluid at constant vertical velocity under perfect slip conditions // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 2. – P. 57–70. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.057-070. – URL: https://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_249.html
83. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Unsteady layered vortical fluid flows // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, No. 2. – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.

84. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2019. – Vol. 60, No. 6. – P. 1031–1037. – DOI: 10.1134/S0021894419060075.
85. Просвирыков Е. Ю. Точные решения трехмерных потенциальных и завихренных течений Куэтта вязкой несжимаемой жидкости // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. – 2015. – Т. 4, вып. 6. – С. 501–506. – DOI: 10.1134/S2304487X15060127.
86. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // *Нелинейн. динам.* – 2019. – Т. 15, вып. 3. – С. 271–283. – DOI: 10.20537/nd190306.
87. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородное конвективное течение Куэтта // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2016. – № 5. – С. 3–9. – DOI: 10.7868/S0568528116050030.
88. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of viscous fluid layer under the heating the lower boundary condition // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2019. – Iss. 4. – P. 44–55. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055. – URL: https://dream-journal.org/issues/2019-4/2019-4_262.html
89. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the convective creep Couette-Hiemenz flow with the linear temperature distribution on the upper border // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2018_Privalova_V.V._et_al._092_109.pdf
90. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Плоская линейная конвекция Бенара–Рэлея при квадратичном нагреве верхней границы слоя вязкой несжимаемой жидкости // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. – 2015. – Т. 71, № 2. – С. 69–75.
91. Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Стационарное конвективное течение Куэтта при линейном нагреве нижней границы слоя жидкости // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. – 2015. – Т. 71, № 5. – С. 148–153.
92. Aristov S. N., Privalova V. V., Prosviryakov E. Y. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2016. – Vol. 12, No. 2. – P. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
93. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118.
94. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // *Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева*. – 2014. – № 3. – С. 7–12.
95. Andreev V. K., Cheremnykh E. N. 2D thermocapillary motion of three fluids in a flat channel. *Journal of Siberian Federal University // Mathematics and Physics*. – 2016. – Vol. 9, iss. 4. – P. 404–415. – DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-4-404-415.
96. Andreev V. K., Cheremnykh E. N. The joint creeping motion of three viscid liquids in a plane layer: A priori estimates and convergence to steady flow // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2016. – Vol. 10, No. 1. – P. 7–20. – DOI: 10.1134/S1990478916010026.
97. Андреев В. К., Собачкина Н. Л. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях. – Красноярск : СФУ, 2012. – 187 с.
98. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeit-sstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dingler's Politech. J.* – 1911. – Vol. 326. – P. 321–324.
99. Riabouchinsky D. Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d' un liquide // *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.* – 1924. – Vol. 179. – P. 1133–1136.
100. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. – 6-е изд. – М. : Физматлит, 2006.

101. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : Изд-во «ИПМех РАН», 2020. – 384 с.
102. Aristov S. N., Polyanin A. D. Exact solutions of unsteady three-dimensional Navier–Stokes equations // *Doklady Physics*. – 2009. – Vol. 54, No. 7. – P. 316–321. – DOI: 10.1134/S1028335809070039.
103. Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // *Доклады АН*. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 491–496.
104. Полянин А. Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // *Мат. моделирование и численные методы*. – 2019. – № 1. – С. 65–97. – DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597.
105. Polyanin A. D., Aristov S. N. Systems of hydrodynamic type equations: exact solutions, transformations, and nonlinear stability // *Doklady Physics*. – 2009. – Vol. 54, No. 9. – P. 429–434. – DOI: 10.1134/S1028335809090079.
106. Полянин А. Д., Журов А. И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // *Докл. АН*. – 2019. – Т. 486, № 3. – С. 287–291. – DOI: 10.31857/S0869-56524863287-291.
107. Aristov S. N., Polyanin A. D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations // *Russian J. Math. Physics*. – 2010. – Vol. 17, No. 1. – P. 1–18. – DOI: 10.1134/S1061920810010012.
108. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // *Nonlinear Dynamics*. – 2004. – Vol. 36, No. 1. – P. 47–68. – DOI: 10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73.

Received: 15.03.2021

Revised: 16.04.2021



Accepted: 23.04.2021



DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.052-063

AN EXTREMUM PROBLEM FOR A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEM DESCRIBING CREEPING FLOWS OF A VISCOELASTIC FLUID

M. A. Artemov^{a)} and E. S. Baranovskii^{b)*}

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394018, Russian Federation

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0001-8356-5418>  artemov_m_a@mail.ru;

^{b)}  <http://orcid.org/0000-0002-1514-4475>  esbaranovskii@gmail.com

*Corresponding author. E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Address for correspondence: 1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russian Federation

We consider an optimal control problem for an integro-differential system (with a quadratic cost functional) modeling a three-dimensional creeping flow of an incompressible viscoelastic fluid in a bounded domain with impermeable solid walls. The fluid flow is controlled by the time-dependent external force. The concept of the control operator is proposed. We prove a theorem on the existence of a unique optimal control under the assumption that the set of admissible controls is convex and that it is closed in a suitable function space. Moreover, we obtain a variational inequality for the optimal control. The proof of this theorem is based on the application of the Faedo–Galerkin approximation scheme taking into account energy estimates of approximate solutions and using the lemma on the existence and uniqueness of the metric projection of a point onto a closed convex set in a real Hilbert space.

Keywords: viscoelastic fluid, creeping flow, integro-differential equations, control operator, optimal control, existence theorem, variational inequality.

References

1. Fursikov A.V. *Optimal Control of Distributed Systems*. Providence, RI, AMS, 2000.
2. Litvinov W.G. *Optimization in Elliptic Problems with Application to Mechanics of Deformable Body and Fluid Mechanics*. Basel, Springer, 2000.
3. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike вязкой жидкости [Analysis and optimization in viscous fluid hydrodynamics]*. Vladivostok, Dalnauka Publ., 2008. (In Russian).
4. Saut J.-C. Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids. *Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations*, part 3, Int. Press, Somerville, 2013, pp. 325–393.
5. Temam R. *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publishing Co., 1977.
6. Oskolkov A.P., Shadiev R. Towards a theory of global solvability on $[0, \infty)$ of initial-boundary value problems for the equations of motion of Oldroyd and Kelvin–Voight fluids. *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 68, pp. 240–253. DOI: 10.1007/BF01249338.
7. Oskolkov A.P. Smooth global solutions of initial boundary-value problems for the equations of Oldroyd fluids and of their e-approximations. *Journal of Mathematical Sciences*, 1998, vol. 89, 1750–1763. DOI: 10.1007/BF02355375.

8. Doubova A., Fernandez-Cara E. On the control of viscoelastic Jeffreys fluids. *Systems & Control Letters*, 2012, vol. 61, pp. 573–579. DOI: 10.1016/j.sysconle.2012.02.003.
9. Hatzikiriakos S. G. Wall slip of molten polymers. *Progress in Polymer Science*, 2012, vol. 37, pp. 624–643. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2011.09.004.
10. Ullah H., Siddiqui A.M., Sun H., Haroon T. Slip effects on creeping flow of slightly non-Newtonian fluid in a uniformly porous slit. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2019, vol. 41, article ID 412. DOI: 10.1007/s40430-019-1917-2.
11. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 1, pp. 6–23. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023.
12. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 2, pp. 61–75. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2020_Burmasheva_N.V._et_al._061_075.pdf
13. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. New York, Academic Press, 1980.

Подана в журнал: 15.03.2021



УДК 517.9:532.1



DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.052-063

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

М. А. Артемов^{а)}, Е. С. Барановский^{б)*}

*Воронежский государственный университет,
1, Университетская пл, г. Воронеж, Российская Федерация*

^{а)}  <http://orcid.org/0000-0001-8356-5418>  artemov_m_a@mail.ru;

^{б)}  <http://orcid.org/0000-0002-1514-4475>  esbaranovskii@gmail.com

*Ответственный автор. Электронная почта: esbaranovskii@gmail.com
Адрес для переписки: Университетская пл, 1, Воронеж, Российская Федерация

Рассматривается экстремальная задача управления для интегро-дифференциальной системы (с квадратичным целевым функционалом), моделирующей трехмерное ползущее течение несжимаемой вязкоупругой жидкости в ограниченной области с непроницаемыми твердыми стенками. Параметром управления служит зависящая от времени внешняя сила. Вводится понятие оператора управления. Доказана теорема о существовании единственного оптимального управления в предположении, что множество допустимых управлений выпукло и замкнуто в соответствующем функциональном пространстве. Кроме того, получено вариационное неравенство, которому удовлетворяет оптимальное управление. Доказательство теоремы основано на применении метода Фаэдо–Галеркина с учетом энергетических оценок приближенных решений и использовании леммы о существовании и единственности метрической проекции точки на выпуклое замкнутое множество в вещественном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, ползущее течение, интегро-дифференциальные уравнения, оператор управления, оптимальное управление, теорема существования, вариационные неравенства.

1. Введение

Проблемам оптимального управления в задачах гидродинамики посвящено много работ (см., например, [1–3] и приведенную там библиографию). При этом в большинстве из них рассматривается управление для классической системы Навье–Стокса, предназначенной для описания движения ньютоновской жидкости. Однако многие встречающиеся на практике среды не подчиняются ньютоновскому определяющему соотношению (закону трения Ньютона). К таким средам относятся, например, вязкоупругие жидкости с «памятью» [4], при математическом моделировании которых учитывается предыстория течения.

В настоящей статье изучается экстремальная задача управления для линейной интегро-дифференциальной системы, описывающей ползущее течение несжимаемой вязкоупругой среды с «памятью» в ограниченной трехмерной области Ω с границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0, T]$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{v} - \int_0^t h(s, t) \Delta \mathbf{v}(\cdot, s) ds + \nabla \pi = \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } Q_T; \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega \times (0, T); \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{0} \text{ в } \Omega; \quad (4)$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{F}; \quad (5)$$

$$J_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{f}) = \xi \|\mathbf{v} - \mathbf{b}\|_{L^2(Q_T)}^2 + (1 - \xi) \|\mathbf{f}\|_{L^2(Q_T)}^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $Q_T := \Omega \times (0, T)$; $\mathbf{v}: \overline{Q_T} \rightarrow \mathbf{R}^3$ – вектор-функция скорости; $\pi: \overline{Q_T} \rightarrow \mathbf{R}$ – функция давления; $\mu > 0$ – коэффициент вязкости; $h: [0, T] \times [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ – ядро вязкоупругости; $\mathbf{f}: \overline{Q_T} \rightarrow \mathbf{R}^3$ – внешняя сила (управляющая функция); \mathbf{F} – множество допустимых управлений; J_0 – «компромиссный» целевой функционал [1] с весовым коэффициентом $\xi \in (0, 1)$; $\mathbf{b}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^3$ – заданная вектор-функция (желаемое поле скоростей); операторы ∇ , Δ и div обозначают соответственно градиент, лапласиан и дивергенцию по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 .

В вырожденном случае $h(s, t) \equiv 0$ приходим к линейризованным уравнениям Навье–Стокса [5]. Если $h(s, t) \equiv \beta \exp(\alpha(s - t))$, то система (1), (2) сводится к линейризованным уравнениям движения вязкоупругой жидкости типа Джеффриса–Олдройда [6, 7]. Аппроксимативная управляемость соответствующих уравнений установлена в [8].

В настоящей статье мы не будем ограничиваться конкретным выбором ядра вязкоупругости – рассмотрим общую ситуацию, предполагая лишь, что функция h непрерывна. Основная цель работы заключается в том, чтобы установить однозначную разрешимость экстремальной задачи (1)–(6) в классе слабых решений. Доказательство основано на построении приближенных решений по методу Фаэдо–Галеркина, выводе энергетических оценок, изучении свойств оператора управления и применении леммы о существовании и единственности метрической проекции точки на выпуклое замкнутое множество в вещественном гильбертовом пространстве.

Отметим, что результаты работы могут быть перенесены на случай граничных условий проскальзывания, учет которых особенно важен при моделировании потоков неньютоновских сред [9, 10] и в задачах термоконвекции [11, 12].

2. Вариационная формулировка задачи и основной результат работы

Условимся использовать стандартные обозначения для пространства Лебега $L^2(\Omega)$ и пространства Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ векторных функций, заданных на области Ω и со значениями в \mathbf{R}^3 (или в $\mathbf{R}^{3 \times 3}$, что понятно из контекста). Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ будем обозначать с помощью круглых скобок, т. е. $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w})_{L^2(\Omega)}$.

Следуя [5, гл. I], введем пространства:

$$\mathbf{Y} := \{\mathbf{w} \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \mathbf{w} \subset \Omega, \operatorname{div} \mathbf{w} \equiv 0\},$$

\mathbf{H} – замыкание \mathbf{Y} в пространстве $L^2(\Omega)$,

\mathbf{V} – замыкание \mathbf{Y} в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$.

Снабдим пространство \mathbf{V} скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\mathbf{V}} := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})$$

и соответствующей евклидовой нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})^{1/2}.$$

Заметим, что норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ эквивалентна стандартной норме $\|\cdot\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)}$.

Функции, зависящие от переменных $\mathbf{x} \in \Omega$ и $t \in (0, T)$, будем рассматривать так же, как функции аргумента t со значениями в банаховом пространстве, определенном на Ω . Например, $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ – это пространство функций, заданных на $(0, T)$ и действующих в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Очевидно, что

$$\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) = \mathbf{L}^2(Q_T).$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) граница области Ω является локально-липшицевой;

(ii) функция $h: [0, T] \times [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ непрерывна;

(iii) выполнено включение $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$;

(iv) множество \mathbf{F} выпукло и замкнуто в $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Определение 1. Допустимой парой для системы (1)–(6) будем называть пару вектор-функций (\mathbf{f}, \mathbf{v}) :

$$\mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}), \quad \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{0},$$

и для любой вектор-функции $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ выполнено следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) + \left(\int_0^t h(s, t) \nabla \mathbf{v}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{w} \right) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}),$$

где оператор d/dt обозначает обобщенную производную по t .

Множество всех допустимых пар обозначим через $\mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Для любого управления $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ существует единственная пара (\mathbf{f}, \mathbf{v}) , принадлежащая множеству $\mathbf{M}(\mathbf{F})$ (разд. 3). Это позволяет корректно определить оператор управления \mathbf{K} .

Опр

$$\mathbf{K}: \mathbf{F} \subset \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \rightarrow \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{f}) = \mathbf{v},$$

где $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ и \mathbf{v} – вторая компонента пары $(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \in \mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Через $\mathbf{G}(\mathbf{K})$ обозначим график оператора \mathbf{K} , т. е.

$$\mathbf{G}(\mathbf{K}) := \{(\mathbf{f}, \mathbf{K}(\mathbf{f})) : \mathbf{f} \in \mathbf{F}\} \subset \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}).$$

Определение 3. Вектор-функция $\mathbf{f}_* \in \mathbf{F}$ является оптимальным управлением в системе (1)–(6), если

$$\begin{aligned} & \xi \|\mathbf{K}(\mathbf{f}_*) - \mathbf{b}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + (1-\xi) \|\mathbf{f}_*\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 = \\ & = \inf \left\{ \xi \|\mathbf{K}(\mathbf{f}) - \mathbf{b}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + (1-\xi) \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 : \mathbf{f} \in \mathbf{F} \right\}. \end{aligned}$$

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда в системе (1)–(6) существует единственное оптимальное управление. При этом вектор-функция $\mathbf{f}_* \in \mathbf{F}$ является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда выполнено вариационное неравенство

$$\xi(\mathbf{K}(\mathbf{f}_*) - \mathbf{b}, \mathbf{K}(\mathbf{f}) - \mathbf{K}(\mathbf{f}_*))_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})} \geq (1-\xi)(\mathbf{f}_*, \mathbf{f}_* - \mathbf{f})_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}. \quad (7)$$

Доказательство этого утверждения представлено в разд. 4.

3. Обоснование корректности определения оператора управления \mathbf{K}

Установим некоторые свойства допустимых пар.

Лемма 1. Если $(\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbf{M}(\mathbf{F})$ и $(\mathbf{f}_2, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{M}(\mathbf{F})$, тогда

$$\begin{aligned} & \max_{\tau \in [0,T]} \left(\|\mathbf{v}_1(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_2(\cdot, \tau)\|^2 + \mu \int_0^\tau \|\mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \leq \\ & \leq \frac{e^{C(h,T,\mu)T}}{C(h,T,\mu)} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$C(h,T,\mu) := \frac{1}{\mu^2} \max_{t \in [0,T]} \int_0^t h^2(t,s) ds.$$

Доказательство. Отождествляя гильбертово пространство \mathbf{H} и сопряженное к нему \mathbf{H}^* в соответствии с теоремой представления Рисса, приходим к цепочке вложений

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \cong \mathbf{H}^* \subset \mathbf{V}^*.$$

Заметим, что имеют место включения

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}^*), \quad i=1,2,$$

и применим лемму 1.2 [5, гл. III, § 1] к вектор-функции $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Получаем, что для п. в. $t \in (0,T)$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 = 2 \left\langle \frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \right\rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}}, \quad (9)$$

где угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}}$ обозначают отношение двойственности между пространством \mathbf{V} и его сопряженным \mathbf{V}^* .

Поскольку

$$(\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i) \in \mathbf{M}(\mathbf{F}), \quad i = 1, 2,$$

легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt}, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} + \mu (\nabla(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \nabla \mathbf{w}) + \\ & + \left(\int_0^t h(s, t) \nabla(\mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s)) ds, \nabla \mathbf{w} \right) = (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (10)$$

для любой вектор-функции $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Подставляя $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)$ в равенство (10) с учетом (9), приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|^2 + 2\mu \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & + 2 \left(\int_0^t h(s, t) \nabla(\mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s)) ds, \nabla(\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)) \right) = \\ & = 2(\mathbf{f}_1(\cdot, t) - \mathbf{f}_2(\cdot, t), \mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)), \end{aligned}$$

Затем, применяя неравенства Гельдера и Юнга, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|^2 + 2\mu \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ & \leq \mu \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C(h, T, \mu) \mu \int_0^t \|\mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \\ & + \frac{\|\mathbf{f}_1(\cdot, t) - \mathbf{f}_2(\cdot, t)\|^2}{C(h, T, \mu)} + C(h, T, \mu) \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|^2. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|^2 + \mu \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ & \leq C(h, T, \mu) \left(\|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) + \frac{\|\mathbf{f}_1(\cdot, t) - \mathbf{f}_2(\cdot, t)\|^2}{C(h, T, \mu)}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t от 0 до τ :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{v}_1(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_2(\cdot, \tau) \|^2 + \mu \int_0^\tau \| \mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s) \|^2_{\mathbf{V}} ds \leq \\ & \leq C(h, T, \mu) \int_0^\tau \left(\| \mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t) \|^2 + \mu \int_0^t \| \mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s) \|^2_{\mathbf{V}} ds \right) dt + \\ & + \frac{1}{C(h, T, \mu)} \int_0^\tau \| \mathbf{f}_1(\cdot, t) - \mathbf{f}_2(\cdot, t) \|^2 dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем следующую оценку:

$$\| \mathbf{v}_1(\cdot, \tau) - \mathbf{v}_2(\cdot, \tau) \|^2 + \mu \int_0^\tau \| \mathbf{v}_1(\cdot, s) - \mathbf{v}_2(\cdot, s) \|^2_{\mathbf{V}} ds \leq \frac{e^{C(h, T, \mu)T}}{C(h, T, \mu)} \| \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \|^2_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))},$$

откуда и вытекает требуемое неравенство (8).

Лемма 2. Для любой вектор-функции $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{F}$ существует единственная вектор-функция \mathbf{v}_0 такая, что $(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Доказательство. Для нахождения \mathbf{v}_0 построим последовательность приближенных решений $\{ \mathbf{v}_n \}_{n=1}^\infty$ по методу Фаздо–Галеркина и затем осуществим предельный переход при $n \rightarrow \infty$, используя равномерную ограниченность норм $\{ \| \mathbf{v}_n \|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})} \}_{n=1}^\infty$.

Приближенные решения, соответствующие выбору $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$, представим в виде сумм:

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) \mathbf{w}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T),$$

где $a_{nj} : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ – неизвестные функции; $\{ \mathbf{w}_j \}_{j=1}^\infty$ – полная последовательность в \mathbf{V} ; образующая ортонормированный базис в \mathbf{H} .

Зафиксируем произвольное натуральное число n . Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t}, \mathbf{w}_k \right) + \mu (\nabla \mathbf{v}_n, \nabla \mathbf{w}_k) + \left(\int_0^t h(t, s) \nabla \mathbf{v}_n(s) ds, \nabla \mathbf{w}_k \right) = \\ & = (\mathbf{f}_0, \mathbf{w}_k), \quad t \in (0, T), k \in \{ 1, \dots, n \}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{12}$$

Линейная интегро-дифференциальная система (11) с начальными данными (12) единственным образом определяет функции a_{nk} на всем отрезке $[0, T]$.

Выведем независимые от параметра n оценки решений задачи (11), (12). Предположим, что \mathbf{v}_n удовлетворяет равенствам (11) и (12). Умножим обе части (11) на $a_{nk}(t)$. Сложив полученные равенства по $k = 1, \dots, n$, находим:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t}, \mathbf{v}_n \right) + \mu (\nabla \mathbf{v}_n, \nabla \mathbf{v}_n) + \left(\int_0^t h(t,s) \nabla \mathbf{v}_n(s) ds, \nabla \mathbf{v}_n \right) = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}_n), \quad t \in (0, T).$$

Умножим обе части последнего равенства на 2. После элементарных преобразований находим, что

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_n\|^2 + 2\mu \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{V}}^2 + 2 \left(\int_0^t h(t,s) \nabla \mathbf{v}_n(s) ds, \nabla \mathbf{v}_n \right) = 2(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}_n), \quad t \in (0, T).$$

Применяя неравенства Гельдера и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_n\|^2 + 2\mu \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq \mu \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{V}}^2 + C(h, T, \mu) \mu \int_0^t \|\mathbf{v}_n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \\ &+ \frac{1}{C(h, T, \mu)} \|\mathbf{f}_0\|^2 + C(h, T, \mu) \|\mathbf{v}_n\|^2, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_n\|^2 + \mu \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C(h, T, \mu) \left(\|\mathbf{v}_n\|^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{v}_n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) + \frac{1}{C(h, T, \mu)} \|\mathbf{f}_0\|^2. \quad (13)$$

Проинтегрируем обе части (13) по t от 0 до τ :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}_n(\cdot, \tau)\|^2 + \mu \int_0^\tau \|\mathbf{v}_n(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq \\ &\leq C_2(h, T, \mu) \int_0^\tau \left(\|\mathbf{v}_n(\cdot, t)\|^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{v}_n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) dt + \frac{1}{C(h, T, \mu)} \int_0^\tau \|\mathbf{f}_0(\cdot, t)\|^2 dt, \end{aligned}$$

откуда с помощью неравенства Гронуолла выводим оценку

$$\max_{\tau \in [0, T]} \left(\|\mathbf{v}_n(\cdot, \tau)\|^2 + \mu \int_0^\tau \|\mathbf{v}_n(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \leq \frac{e^{C(h, T, \mu)T}}{C(h, T, \mu)} \|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2. \quad (14)$$

Из неравенства (14) следует равномерная по n ограниченность норм $\{\|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})}\}_{n=1}^\infty$.

Поэтому, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), получаем:

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_0 \text{ слабо в } \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}) \quad (15)$$

для некоторой вектор-функции $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$.

Умножим обе части равенства (11) на произвольную C^∞ -гладкую функцию η с носителем, содержащимся в интервале $(0, T)$, и проинтегрируем по t от 0 до T . Применяв интегрирование по частям к первому слагаемому из левой части полученного равенства, приходим к соотношению:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_k) \eta' dt + \mu \int_0^T (\nabla \mathbf{v}_n, \nabla \mathbf{w}_k) \eta dt + \\
 & + \int_0^T \left(\int_0^t h(t,s) \nabla \mathbf{v}_n(s) ds, \nabla \mathbf{w}_k \right) \eta dt = \int_0^T (\mathbf{f}_0, \mathbf{w}_k) \eta dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Используя слабую сходимость (15), перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (16):

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_k) \eta' dt + \mu \int_0^T (\nabla \mathbf{v}_0, \nabla \mathbf{w}_k) \eta dt + \\
 & + \int_0^T \left(\int_0^t h(t,s) \nabla \mathbf{v}_0(s) ds, \nabla \mathbf{w}_k \right) \eta dt = \int_0^T (\mathbf{f}_0, \mathbf{w}_k) \eta dt, \quad k \in \{1, 2, \dots\}.
 \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^\infty$ полна в \mathbf{V} , последнее равенство останется справедливым, если заменить \mathbf{w}_k на произвольную вектор-функцию $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Отсюда, в частности, следует:

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^*).$$

Поэтому, вновь применяя лемму 1.2 [5, гл. III, § 1], получаем:

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}).$$

Принимая во внимание (12), нетрудно проверить, что выполнено начальное условие $\mathbf{v}_0(\cdot, 0) = \mathbf{0}$. Таким образом, установлено, что $(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Единственность вектор-функции \mathbf{v}_0 , удовлетворяющей условиям леммы 2, непосредственно следует из леммы 1.

Следствие. Оператор управления \mathbf{K} определен корректно и непрерывен как отображение из подмножества \mathbf{F} пространства $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ в пространство $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$.

4. Доказательство основного результата

Нам понадобятся следующие две леммы [13, гл. I, §2].

Лемма 3. Пусть \mathbf{S} – выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства \mathbf{U} . Тогда для каждого $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$ существует единственная точка $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$:

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|_{\mathbf{U}} = \inf \{ \|\mathbf{q} - \mathbf{s}\|_{\mathbf{U}} : \mathbf{s} \in \mathbf{S} \}. \tag{17}$$

Замечание. Точка \mathbf{p} , удовлетворяющая соотношению (17), называется метрической проекцией точки \mathbf{q} на множество \mathbf{S} . При этом используется обозначение $\mathbf{p} = \text{Pr}_{\mathbf{S}} \mathbf{q}$.

Лемма 4. Пусть \mathbf{S} – выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства \mathbf{U} и $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$. Тогда $\mathbf{p} = \text{Pr}_{\mathbf{S}} \mathbf{q}$ в том и только в том случае, когда

$$(\mathbf{p}, \mathbf{s} - \mathbf{p})_{\mathbf{U}} \geq (\mathbf{q}, \mathbf{s} - \mathbf{p})_{\mathbf{U}} \quad (18)$$

для любого $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$.

Доказательство теоремы. Заметим, что $\mathbf{f}_* \in \mathbf{F}$ – оптимальное управление в системе (1)–(6) тогда и только тогда, когда пара функций $(\mathbf{f}_*, \mathbf{K}(\mathbf{f}_*))$ является метрической проекцией пары $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ на график оператора управления \mathbf{K} в декартовом произведении $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$ со скалярным произведением:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})} := (1 - \xi)(\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1)_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))} + \xi(\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_2)_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})},$$

где $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ и $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$.

Пусть

$$\mathbf{U} := \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \mathbf{S} := \mathbf{G}(\mathbf{K}), \quad \mathbf{q} := (\mathbf{0}, \mathbf{b}). \quad (19)$$

Применяя лемму 3, получаем метрическую проекцию $\mathbf{p} = (\mathbf{f}_*, \mathbf{K}(\mathbf{f}_*))$ точки \mathbf{q} на множество \mathbf{S} . При том, что \mathbf{f}_* – единственное оптимальное управление в системе (1)–(6).

Принимая во внимание (19) и равенство $\mathbf{p} = (\mathbf{f}_*, \mathbf{K}(\mathbf{f}_*))$, выводим из (18) вариационное неравенство (7). Теорема доказана.

5. Заключение

В статье установлена однозначная разрешимость экстремальной задачи управления для линейной интегро-дифференциальной системы, описывающей трехмерное ползущее течение несжимаемой вязкоупругой жидкости в ограниченной области с непроницаемыми твердыми стенками. Выведено вариационное неравенство, характеризующее оптимальное управление. В дальнейшем предполагается развить предложенный подход и получить новые результаты для нелинейных моделей вязкоупругих сред с «памятью» при учете инерционных сил и тепловых эффектов.

Литература

1. Fursikov A. V. Optimal Control of Distributed Systems, Rus. transl. – Providence, RI, AMS, 2000.
2. Litvinov W. G. Optimization in Elliptic Problems with Application to Mechanics of Deformable Body and Fluid Mechanics. – Basel, Springer, 2000.
3. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. – Владивосток : Дальнаука, 2008.
4. Saut J.-C. Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids. Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 3. – Int. Press, Somerville, 2013. – P. 325–393.
5. Temam R. Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. – Amsterdam, New York, Oxford : North-Holland Publishing Co., 1977.
6. Oskolkov A. P., Shadiev R. Towards a theory of global solvability on $[0, \infty)$ of initial-boundary value problems for the equations of motion of Oldroyd and Kelvin–Voight fluids // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – Vol. 68. – P. 240–253. – DOI: 10.1007/BF01249338.
7. Oskolkov A. P. Smooth global solutions of initial boundary-value problems for the equations of Oldroyd fluids and of their e-approximations // Journal of Mathematical Sciences. – 1998. – Vol. 89. – P. 1750–1763. – DOI: 10.1007/BF02355375.

8. Doubova A., Fernandez-Cara E. On the control of viscoelastic Jeffreys fluids // *Systems & Control Letters*. – 2012. – Vol. 61. – P. 573–579. – DOI: 10.1016/j.sysconle.2012.02.003.
9. Hatzikiriakos S. G. Wall slip of molten polymers // *Progress in Polymer Science*. – 2012. – Vol. 37. – P. 624–643. – DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2011.09.004.
10. Slip effects on creeping flow of slightly non-Newtonian fluid in a uniformly porous slit / H. Ullah, A. M. Siddiqui, H. Sun, T. Haroon // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2019. – Vol. 41. – Article ID 412. – DOI: 10.1007/s40430-019-1917-2.
11. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution for describing the unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Temperature field investigation // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 1. – P. 6–23. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.006-023. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2020_Burmasheva_N.V._et_al._061_075.pdf
12. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 2. – P. 61–75. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2020_Burmasheva_N.V._et_al._061_075.pdf
13. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. – New York : Academic Press, 1980.

Received: 18.03.2021

Revised: 20.04.2021



Accepted: 23.04.2021

DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.064-072

SELECTION OF COMPLEX EQUIVALENT STRESS FOR TWO DIFFERENT VARIANTS OF THE PLANE STRESS STATE

V. V. Nazarov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
1 Michurinsky Ave., Moscow, 119192, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Corresponding author. E-mail: inmec130@mail.ru

Address for correspondence: 1 Michurinsky Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

To describe the creep rupture process under complex stress, various equivalent stresses are considered. From them, the equivalent stress at which the total error of the difference between the experimental and theoretical values takes the smallest value among the considered equivalent stresses is selected. In this paper, three basic equivalent stresses are considered, as well as two complex equivalent stresses, which are a linear combination of the basic ones with one material parameter. The analysis of the total errors in the considered experimental data shows that, with the simultaneous effect of internal pressure and the axial force on the wall of tubular specimens (or biaxial tension of a plane element), a complex equivalent stress should be used in the form of a combination of the maximum normal stress and the Mises stress. For simultaneous torsion and tension of tubular specimens (or simultaneous tension and compression of a plane element), a complex equivalent stress should be used in the form of a combination of the maximum normal stress and the doubled maximum tangential stress.

Keywords: creep rupture, time at rupture, plane stress state, equivalent stress.

Acknowledgment

The study was partially financially supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 20-08-00387.

References

1. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V. Kinetic approach of investigation of creep-rupture for metals under biaxial tension. *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2005, no. 10 (26), pp. 73–79. (In Russian). Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2005_10_15
2. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V. Choice of Long-Term Strength Criteria for Metals in Combined Stress State. *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2004, no. 7 (15), pp. 124–128. (In Russian). Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2004_7_27
3. Lokoshchenko A.M. Long-term strength of metals in complex stress state (a survey). *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, pp. 357–372. DOI: 10.3103/S0025654412030090.
4. Himeno T., Chuman Y., Tokiyoshi T., Fukahori T., Igari T. Creep rupture behaviour of circumferentially welded mod. 9Cr–1Mo steel pipe subject to internal pressure and axial load. *Materials at High Temperatures*, 2016, vol. 33, iss. 6, pp. 636–643. DOI: 10.1080/09603409.2016.1226703.
5. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 174, pp. 30–43. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.01.001.

6. Dyson B.F., Mclean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension. *Metal Science*, 1977, vol. 11, iss. 2, pp. 37–45. DOI: 10.1179/msc.1977.11.2.37.
7. Cane B.J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses. In: Proceedings of *The 5th International Conference on Fracture Mechanics «Advances in Fracture Research»*, Cannes, France, 29 March-2 April 1981, Oxford, 1981, vol. 3, pp. 1285–1293.
8. Nazarov V.V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens. *Inorganic Materials*, 2014, vol. 50, pp. 1514–1515. DOI: 10.1134/S0020168514150138.
9. Kowalewski Z.L. Biaxial creep study of copper on the basis of isochronous creep surfaces. *Archives of Mechanics*, 1996, vol. 48, no 1, pp. 89–109. Available at: <https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v48p89>
10. Stanzl-Tschegg S., Argon A.S., Tschegg E.K. Diffusive intergranular cavity growth in creep in tension and torsion. *Acta Metallurgica*, 1983, vol. 31, iss. 6, pp. 833–843. DOI: 10.1016/0001-6160(83)90111-6.
11. Nazarov V.V. Criterion of creep rupture for tubular specimens under tension and torsion. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2014, vol. 80, no. 12, pp. 57–59. (In Russian).
12. Lebedev A.A. The theory of equivalent stresses as a problem of mechanics of materials. *Strength of Materials*, 1996, vol. 28, no. 2, pp. 94–108. DOI: 10.1007/BF02215833.
13. Nazarov V.V. Analysis of two creep rupture models. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 5, pp. 73–80. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_5_2019_Nazarov_V.V._073_080.pdf
14. Nazarov V.V. Approximation of secondary creep for tubular specimens under tension and torsion. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2015, vol. 81, no 7, pp. 60–61. (In Russian).
15. Norton F.N. *Creep of Steel at High Temperatures*, New York, Mc. Graw–Hill Book Company, 1929, 67 p.
16. Bailey R.W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant. In: *Transactions of World Power Conference*, Oct–Nov 1929, Tokyo, vol. 3.
17. Lasdon L.S., Fox R.L., Ratner M.W. Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method. *Operations Research*, 1974, vol. 8, No. V3, pp. 73–103. Available at: http://www.numdam.org/item/RO_1974__8_3_73_0/
18. Available at: <https://www.solver.com/excel-solver-algorithms-and-methods-used>

Подана в журнал: 18.03.2021



УДК 539.376

DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.064-072

ВЫБОР СЛОЖНОГО ЭКВИВАЛЕНТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В. В. Назаров

*Научно-исследовательский институт механики
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Мичуринский проспект, 1, Москва, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: inmec130@mail.ru
Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация

Для описания процесса длительной прочности при сложном напряженном состоянии рассматривают различные эквивалентные напряжения. Из них выбирают такое эквивалентное напряжение, при котором суммарная погрешность разности экспериментального и теоретического значений принимает наименьшее значение среди всех рассмотренных эквивалентных напряжений. В работе рассмотрены три базовых эквивалентных напряжения, а также два сложных эквивалентных напряжения, представляющих собой линейную комбинацию базовых с одним материальным параметром. Анализ суммарных погрешностей в рассмотренных экспериментальных данных показал, что при одновременном воздействии внутреннего давления и осевой силы на стенку трубчатых образцов (или двухосном растяжении плоского элемента) следует использовать сложное эквивалентное напряжение в виде комбинации максимального нормального напряжения и напряжения Мизеса. При одновременном кручении и растяжении трубчатых образцов (или одновременном растяжении и сжатии плоского элемента) следует использовать сложное эквивалентное напряжение в виде комбинации максимального нормального напряжения и удвоенного максимального касательного напряжения.

Ключевые слова: длительная прочность, время в момент разрушения, плоское напряженное состояние, эквивалентное напряжение.

1. Введение

В работе рассмотрена длительная прочность изотропных металлических материалов (металлы, стали, никелевые сплавы), в основе строения которых присутствует кристаллическая решетка. Для анизотропных металлических материалов в элементах конструкций дополнительно рассмотрен коэффициент прочностной анизотропии, что никак не влияет на полученный результат. При исследовании явления длительной прочности отчет времени начинают с момента приложения стационарных сил. Под действием этих сил в материале накапливаются рассеянные повреждения, которые приводят к образованию магистральных трещин и разрушению в определенный момент времени, поэтому в качестве характеристики явления длительной прочности рассматривают время в момент разрушения.

Для описания длительной прочности при сложном напряженном состоянии используют либо кинетический [1], либо критериальный подход [2]. В обзоре [3] перечислены экспериментальные и теоретические результаты, полученные в условиях сложного напряженного состояния. Каждый из двух подходов применяется в зависимости от типа

сложного напряженного состояния, которое определяется знаками главных напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Кинетический подход [1] используют при описании длительной прочности либо при двухосном растяжении ($\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$) элементарного плоского элемента (испытания на совместное внутреннее давление и растяжение трубчатых образцов [4] или двухосное растяжение плоских образцов [5]), либо при трехосном растяжении ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$) элементарного объемного элемента [5] (испытания на одновременное трехосное растяжение кубических образцов). Суть кинетического подхода [1] заключается в том, что повреждения накапливаются исключительно на площадках, перпендикулярных главным растягивающим напряжениям, на которых скорости накопления компонент вектора поврежденности пропорциональны соответствующим главным напряжениям, что означает $\frac{d\omega_1}{dt} = f(\sigma_1), \frac{d\omega_2}{dt} = f(\sigma_2)$ и $\frac{d\omega_3}{dt} = f(\sigma_3)$, где t – время воздействия стационарных сил. В качестве характеристики поврежденного состояния материала рассматривается абсолютная величина вектора поврежденности $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ с двумя условиями по времени $\omega|_{t=0} = 0$ и $\omega|_{t=t_{\text{rupt}}} = 1$, где t_{rupt} – время в момент разрушения. В частном случае, когда одно из трех главных напряжений равно нулю (в этом частном случае многоосного растяжения одна из компонент вектора поврежденности $\omega_3 = 0$), абсолютная величина вектора поврежденности принимает вид $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Время в момент разрушения t_{rupt} определяется из выражения для абсолютной величины ω вектора поврежденности при интегрировании от начального состояния $\omega|_{t=0} = 0$ до состояния в момент разрушения $\omega|_{t=t_{\text{rupt}}} = 1$.

Обратим внимание, что кинетический подход [1] не позволяет описать длительную прочность при одновременном растяжении и сжатии ($\sigma_1 > 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$) элементарного плоского элемента по двум взаимно ортогональным направлениям [6–10] (испытания на одновременное кручение и растяжение трубчатых образцов). Для главных напряжений следует использовать критериальный подход [2], в котором принято, что $t_{\text{rupt}} = g(\sigma_{\text{eq}})$, где σ_{eq} – эквивалентное напряжение (одна из скалярных характеристик тензора напряжений). Скалярные характеристики выбираются таким образом, чтобы они принимали одинаковое значение при одноосном растяжении (исключением является модель [11]). Как правило, при анализе суммарных погрешностей Δ (формула приведена ниже) рассматривают три основных эквивалентных напряжения (максимальное нормальное напряжение σ_{max} , напряжение Мизеса σ_{mises} и удвоенное максимальное касательное напряжение $2\tau_{\text{max}}$). Дополнительно к трем основным эквивалентным напряжениям, могут рассматриваться их возможные линейные комбинации с одним материальным параметром, где величина этого параметра определяет вклад одного из двух используемых базовых эквивалентных напряжений на время в момент разрушения.

2. Два сложных эквивалентных напряжения

Рассмотрим два сложных эквивалентных напряжения σ_{eq}^1 [12] и σ_{eq}^2 [13] с параметрами β_1 и β_2 в виде линейных комбинаций из разных базовых эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{eq}^1 = [1 - \beta_1]\sigma_{mises} + \beta_1\sigma_{max}, \quad 0 \leq \beta_1 \leq 1; \quad (1)$$

$$\sigma_{eq}^2 = [1 - \beta_2][2\tau_{max}] + \beta_2\sigma_{max}, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1. \quad (2)$$

Из анализа суммарных погрешностей постараемся определить, какое из двух рассмотренных сложных эквивалентных напряжений σ_{eq}^1 и σ_{eq}^2 следует использовать при описании длительной прочности для каждого из двух возможных типов плоского напряженного состояния. Чтобы убедиться в целесообразности рассмотренных сложных эквивалентных напряжений, для анализа потребуется вычислить суммарные погрешности основных эквивалентных напряжений.

3. Методика вычисления суммарных погрешностей

В статье [13] представлены результаты анализа минимальных суммарных погрешностей для трех основных эквивалентных напряжений σ_{max} , σ_{mises} , $2\tau_{max}$ и двух сложных эквивалентных напряжений σ_{eq}^1 и σ_{eq}^2 . Установлено, что для аппроксимации используемых для анализа экспериментальных данных при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 < 0$, полученных на трубчатых образцах под действием кручения и растяжения, следует использовать эквивалентное напряжение (2). Данная работа является продолжением [13], где дополнительно будут рассмотрены экспериментальные данные при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 < 0$, полученные на трубчатых образцах под действием внутреннего давления и растяжения и плоских образцах под действием двух взаимно ортогональных сил.

При двухосном растяжении элементарного плоского элемента

$$\sigma_{max} = \sigma_1, \quad \sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad 2\tau_{max} = \sigma_1. \quad (3)$$

Можно заметить, что $\sigma_{max} = 2\tau_{max} = \sigma_1$, что означает $\sigma_{eq}^2 = \sigma_1$.

При одновременном растяжении и сжатии элементарного плоского элемента

$$\sigma_{max} = \sigma_1, \quad \sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}, \quad 2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (4)$$

где главные напряжения [14] зависят от нормального напряжения σ и касательного напряжения τ следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2}. \quad (5)$$

Для связи времени в момент разрушения от эквивалентного напряжения будем использовать степенную зависимость с двумя материальными параметрами [15, 16]:

$$\frac{t_{rupt}^{app}}{B} = \left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{dim}} \right]^{-m}, \quad B > 0, \quad m > 1, \quad (6)$$

где t_{rupt}^{app} – время в момент разрушения из аппроксимации; σ_{eq} – одно из рассматриваемых эквивалентных напряжений σ_{max} ; σ_{mises} ; $2\tau_{max}$; σ_{eq}^1 и σ_{eq}^2 ; B ; m – материальные параметры; $\sigma_{dim} = 1$ МПа – обезразмеривающее напряжение.

Неизвестные параметры B , m и β_1 (или β_2) вычисляются из условия минимальной суммарной погрешности разности экспериментальных t_{rupt}^{exp} и их аппроксимирующих t_{rupt}^{app} значений времени в момент разрушения:

$$\Delta = \min \left(\sum_1^N \left| \lg \frac{t_{rupt}^{app}}{t_{rupt}^{exp}} \right| \right), \quad (7)$$

где N – количество экспериментов в данной серии; t_{rupt}^{exp} – время в момент разрушения из эксперимента. Выражение (7) является аналогом метода наименьших квадратов, где в качестве расстояния между двумя значениями используется модуль разности логарифмов $\lg(t_{rupt}^{app}) - \lg(t_{rupt}^{exp})$, который равен логарифму отношения $\lg(t_{rupt}^{app} / t_{rupt}^{exp})$. Минимизация целевого условия (7) реализуется через алгоритм [17] нелинейной оптимизации *Обобщенного метода сопряженных градиентов (GRG2)* с помощью меню надстройки в Microsoft Excel [18]. Для неизвестных параметров B , m и β_1 (или β_2) начальное приближение их значений используется из равенства $t_{rupt}^{app} = t_{rupt}^{exp}$.

4. Экспериментальные данные для анализа суммарных погрешностей

В работе при анализе суммарных погрешностей рассмотрены экспериментальные данные, которые получены для различных изотропных металлических материалов – разных марок стали, никелевого сплава и меди после термической обработки (табл. 1). Влияние прочностной анизотропии на время в момент разрушения прослеживается в экспериментальных данных, полученных при одновременном кручении и растяжении трубчатых образцов [9–10]. При аппроксимации экспериментальных данных [9–10] наблюдается эффект нескольких аппроксимаций [11]. Этот эффект заключается в том, что аппроксимация зависит от типа напряженного состояния (чистое растяжение, чистое кручение, одновременное кручение и растяжение). Для того чтобы экспериментальные значения подчинялись одной единственной эмпирической закономерности, перед началом механических испытаний образцы подвергаются термической обработке, которая убирает остаточные напряжения и преобразует микроструктуру до равноосной с хаотической ориентацией границ зерен.

Таблица 1 – Сводная таблица публикаций экспериментальных данных при двух разных плоских напряженных состояниях

| Номер эксперимента | Ссылка на источник | Материал | Температура, °С | Тип плоского напряженного состояния |
|--------------------|--------------------|-----------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| 1 | [4] | Сталь 9Cr1MoVNb | 650 | Одновременное двухосное растяжение |
| 2 | [5] | Сталь 304 | 650 | |
| 3 | [6] | Никелевый сплав Nimonic 80A | 750 | Одновременное растяжение и сжатие |
| 4 | [7] | Сталь 2.25Cr1Mo | 565 | |
| 5 | [8] | Медь после отжига | 264 | |

5. Анализ минимальных суммарных погрешностей

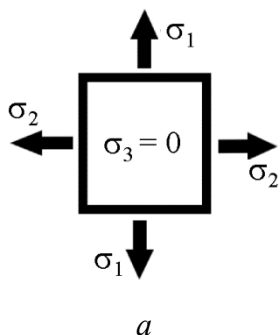
Ниже (табл. 2) приведены суммарные погрешности Δ (наименьшие погрешности подчеркнуты) и значения параметров β_1 и β_2 для сложных эквивалентных напряжений. В экспериментах 2 и 5 сложные эквивалентные напряжения оказались частным случаем базовых эквивалентных напряжений, где $\sigma_{eq}^1 = \sigma_{mises}$ в эксперименте 2 и $\sigma_{eq}^2 = \tau_{max}$ в эксперименте 5.

Таблица 2 – Минимальные суммарные погрешности параметров в сложных эквивалентных напряжениях*

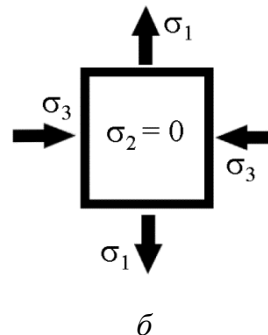
| Номер эксперимента | Суммарные погрешности | | | | | Параметры | |
|--------------------|-----------------------|------------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------|-----------|
| | σ_{max} | σ_{mises} | $2\tau_{max}$ | σ_{eq}^1 | σ_{eq}^2 | β_1 | β_2 |
| 1 | 0,9 | 0,8 | 0,9 | <u>0,6</u> | 0,9 | 0,3 | – |
| 2 | 1,5 | <u>1,3</u> | 1,5 | <u>1,3</u> | 1,5 | 0,0 | – |
| 3 | 4,3 | 4,3 | 6,6 | <u>1,6</u> | <u>1,7</u> | 0,5 | 0,6 |
| 4 | 1,6 | 2,5 | 3,2 | <u>0,7</u> | <u>0,7</u> | 0,7 | 0,8 |
| 5 | 0,6 | 0,5 | <u>0,3</u> | 0,5 | <u>0,3</u> | 0,0 | 0,0 |

* подчеркнуты наиболее благоприятные значения суммарных погрешностей.

$$\sigma_{eq}^1 = [1 - \beta_1] \sigma_{mises} + \beta_1 \sigma_{max}$$



$$\sigma_{eq}^2 = [1 - \beta_2] 2\tau_{max} + \beta_2 \sigma_{max}$$



Выбор сложного эквивалентного напряжения для описания длительной прочности в зависимости от типа плоского напряженного состояния: *a* – двухосное напряжение; *б* – одновременное напряжение (растяжение–сжатие)

В экспериментах 3 и 4 суммарные погрешности обоих сложных эквивалентных напряжений σ_{eq}^1 и σ_{eq}^2 приняли почти одинаковые значения, при этом они заметно меньше суммарных погрешностей для базовых эквивалентных напряжений. В целом, на основе анализа всех рассмотренных экспериментальных данных, можно сделать вывод, что для описания обоих типов плоского напряженного состояния не существует общего эквивалентного напряжения. Это означает, что для каждого типа плоского напряженного состояния следует использовать свое эквивалентное напряжение (рисунок).

6. Заключение

В работе сделана попытка решить вопрос о выборе эквивалентного напряжения, позволяющего описать длительную прочность для двух разных плоских напряженных состояний, различающихся знаком одного из главных напряжений. Рассмотрены три базовых и два сложных эквивалентных напряжений с параметром. В качестве критерия отбора эквивалентного напряжения принималась минимальная суммарная погрешность разности экспериментальных и теоретических значений времени в момент разрушения. Анализ значений суммарных погрешностей показал, что для каждого типа плоского напряженного состояния следует использовать конкретное сложное эквивалентное напряжения с параметром. Для описания времени в момент разрушения в условиях двухосного растяжения следует использовать сумму максимального нормального напряжения и напряжения Мизеса. Для описания длительной прочности при одновременном растяжении и сжатии элементарного плоского элемента в двух взаимно ортогональных направлениях в качестве эквивалентного напряжения следует использовать сумму максимального нормального напряжения и удвоенного максимального касательного напряжения.

Работа посвящена выбору силового критерия прочности, эмпирически наиболее точно описывающему длительную прочность в соответствии с экспериментальными данными для двух схем плоского напряженного состояния. На основе минимизации суммарной погрешности разности экспериментальных и аппроксимирующих значений времени в момент разрушения проведено обоснование выбора сложного эквивалентного напряжения, наиболее точно описывающего длительную прочность для конкретной схемы напряженного состояния изотропного материала в соответствии с экспериментальными данными. Результаты работы имеют практическую значимость и могут быть использованы при выполнении проектных расчетов соответствующих элементов конструкций и деталей машин, работающих при статистических нагрузках в условиях плоского напряженного состояния.

Благодарность

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20–08–00387).

Литература

1. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двухосном растяжении // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2005. – № 10 (26). – С. 73–79. – URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2005_10_15
2. Локощенко А. М., Назаров В. В. Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2004. – № 7 (15). – С. 124–128. – URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2004_7_27
3. Lokoshchenko A. M. Long-term strength of metals in complex stress state (a survey) // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47. – P. 357–372. – DOI: 10.3103/S0025654412030090.
4. Creep rupture behavior of circumferentially welded mod. 9Cr–1Mo steel pipe subject to internal pressure and axial load / T. Himeno, Y. Chuman, T. Tokiyoshi, T. Fukahori, T. Igari // *Materials at High Temperatures*. – 2016. – Vol. 33, iss. 6. – P. 636–643. – DOI: 10.1080/09603409.2016.1226703.
5. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 174. – P. 30–43. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.01.001.
6. Dyson B. F., Mclean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension // *Metal Science*. – 1977. – Vol. 11, iss. 2. – P. 37–45. – DOI:10.1179/msc.1977.11.2.37.
7. Cane B. J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses // *The 5th International Conference on Fracture Mechanics «Advances in Fracture Research», Cannes, France, 29 March–2 April 1981 : proceedings*. – Oxford, 1981. – Vol. 3. – P. 1285–1293.
8. Nazarov V. V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens // *Inorganic Materials*. – 2014. – Vol. 50. – P. 1514–1515. – DOI: 10.1134/S0020168514150138.
9. Kowalewski Z. L. Biaxial creep study of copper on the basis of isochronous creep surfaces // *Archives of Mechanics*. – 1996. – Vol. 48, No 1. – P. 89–109. – URL: <https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v48p89>
10. Stanzl-Tschegg S., Argon A. S., Tschegg E. K. Diffusive intergranular cavity growth in creep in tension and torsion // *Acta Metallurgica*. – 1983. – Vol. 31, iss. 6. – P. 833–843. – DOI: 10.1016/0001-6160(83)90111-6.
11. Назаров В. В. Критерий длительной прочности при растяжении и кручении трубчатых образцов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2014. – Т. 80, № 12. – С. 57–59.
12. Lebedev A. A. The theory of equivalent stresses as a problem of mechanics of materials // *Strength of Materials*. – 1996. – Vol. 28, No. 2. – P. 94–108. – DOI: 10.1007/BF02215833.
13. Nazarov V. V. Analysis of two creep rupture models // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2019. – Iss. 5. – P. 73–80. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_5_2019_Nazarov_V.V._073_080.pdf
14. Назаров В. В. Описание установившейся ползучести при растяжении и кручении трубчатых образцов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2015. – Т. 81, № 7. – С. 60–61.
15. Norton F. N. *Creep of Steel at High Temperatures*. – New York : Mc. Graw–Hill Book Company, 1929. – 67 p.
16. Bailey R. W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant // *Transactions of World Power Conference, Tokyo, Oct–Nov 1929*. – Vol. 3.
17. Lasdon L. S., Fox R. L., Ratner M. W. Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method // *Operations Research*. – 1974. – Vol. 8, No. V3. – P. 73–103. – Available at: http://www.numdam.org/item/RO_1974__8_3_73_0/
18. Available at: <https://www.solver.com/excel-solver-algorithms-and-methods-used>