





http://dream-journal.org





ISSN 2410-9908

Editor-in-Chief: Eduard S. Gorkunov, RAS Academician (Russia) Deputy Editors-in-Chief: Sergey V. Smirnov, Sergey V. Gladkovsky

Editorial Council

Chairman: Eduard S. Gorkunov, RAS Academician (Russia)

http://dream-journal.org

Anatoly A. Burenin (Russia) Irina G. Goryacheva (Russia) Janez Grum (Slovenia) Mikhail P. Lebedev (Russia) Leopold I. Leontiev (Russia) Evgeny V. Lomakin (Russia) Valery P. Matveenko (Russia) Nikolay A. Makhutov (Russia) Mitko M. Mihovski (Bulgaria) Nikita F. Morozov (Russia) Vladimir V. Moskvichev (Russia) Sergey V. Panin (Russia) Vasily M. Fomin (Russia) Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow) Vladimir A. Bataev (Novosibirsk) Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg) Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg) Sergey V. Burov (Ekaterinburg) Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg) Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg) Mladen N. Georgiev (Sofia, Bulgaria) Vladimir G. Degtyar (Miass) Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg) Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg) Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg) Anatoly V. Konovalov (Ekaterinburg) Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg) Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg) Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg) Radik R. Mulyukov (Ufa) Vitaly V. Muravyov (Izhevsk) Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg) Oleg A. Plekhov (Perm) Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg) Evgenii Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg) Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg) Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk) Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg) Roman A. Savray (Ekaterinburg) Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg) Yury V. Subachev (Ekaterinburg) Alexander I. Ulyanov (Izhevsk) Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts Anna V. Garieva, maker-up Galina V. Torlopova, associate editor Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation phone: +7 (343) 375-35-83, fax: +7 (343) 374-53-30 e-mail: dream-journal@mail.ru http://dream-journal.org





Главный редактор: Горкунов Эдуард Степанович – академик РАН, д.т.н.

Заместители главного редактора: Сергей Витальевич Смирнов, д.т.н.; Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.

Редакционный совет:

Председатель совета – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Россия)

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения) Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия) Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия) Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Матвеенко Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия) Матвеенко Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия) Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия) Миховски Митко Минков, д.т.н. (Республика Болгария) Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия) Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия) Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Главный редактор – Горкунов Эдуард Степанович, академик РАН, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н. (Екатеринбург)

Зам. главного редактора – Гладковский Сергей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург)

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва) Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск) Беляев Александр Константинович, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург) Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург) Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург) Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург) Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург) Георгиев Младен Николов, д.т.н. (София, Республика Болгария) Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс) Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург) Задворкин Сергей Михайлович, к.ф-м.н. (Екатеринбург) Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург) Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург) Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург) Макаров Алексей Викторович, д.т.н. (Екатеринбург) Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург) Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа) Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск) Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург) Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь) Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург) Просвиряков Евгений Юрьевич, д.ф-м.н. (Екатеринбург) Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург) Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск) Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф-м.н. (Екатеринбург) Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург) Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург) Субачев Юрий Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург) Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск) Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык Циклина Ирина Михайловна – редактор текста Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции: Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30 e-mail: dream-journal@mail.ru http://dream-journal.org





ISSN 2410-9908

CONTENTS

Frolova K. P., Vilchevskaya E. N. Comparison of the yield functions for micropolar media using a cylindrical sample model	6
Burmasheva N. V. and Prosviryakov E. Yu. An exact solution to the description of a unidirectional marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. velocity field investigation	23
Kornilova Z. G. and Ammosov G. S. Design and process description of welded joints in general-purpose structural steels	40
Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \varepsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels	48
Volkov S. S. The effect of damage at an ensemble of microstructure points on the margin of safety in structurally heterogeneous materials	60
Nazarov V. V. Analysis of two creep rupture strength models	73





СОДЕРЖАНИЕ

Фролова К. П., Вильчевская Е. Н. Сравнение условий пластичности для микрополярных сред на примере модели цилиндрического образца	6
Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение для описания однонаправленного течения марангони вязкой несжимаемой жидкости с граничным условием Навье. Исследование поля скорости	23
Корнилова З. Г., Аммосов Г. С. Конструктивно-технологическое оформление сварных соединений конструкционных сталей массового назначения	40
Коршунов Л. Г., Черненко Н. Л. влияние мартенситного ү→ε-превращения на трибо- логические свойства хромомарганцевых аустенитных сталей	48
Волков С. С. Влияние поврежденности ансамбля точек микроструктуры на запас прочности структурно-неоднородных материалов	60
Назаров В. В. Анализ двух моделей длительной прочности	73





ISSN 2410-9908

Received: 29.08.2019 Revised: 18.10.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.006-022

http://dream-journal.org

COMPARISON OF THE YIELD FUNCTIONS FOR MICROPOLAR MEDIA USING A CYLINDRICAL SAMPLE MODEL

K. P. Frolova^{*a)}, E. N. Vilchevskaya^{b)}

Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS 61 Bolshoy Ave., V.O., St. Petersburg, Russian Federation

^{a)} b https://orcid.org/0000-0003-0376-4463 Skspfrolova@gmail.com; ^{b)} b https://orcid.org/0000-0002-5173-3218 vilchevska@gmail.com

*Corresponding author: E-mail: kspfrolova@gmail.com Address for correspondence: V.O., Bolshoy pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation Tel.: +7 981 803 37 56; fax: +7 812 321 47 71

The article discusses different yield functions extended to the case of micropolar media in order to investigate the effect of local plasticity in metals. The paper is concerned with the inhomogeneous stress-strain state obtained within the frame of the micropolar continuum approach for a cylindrical specimen under distributed couple stress on its lateral surface. The case corresponding to specimen tension is considered. Plastic strains prove to arise near the border of the specimen, while the material continues to behave elastically. According to the results, it is necessary to take into account couple stresses to clarify what happens in the area near the border when the size of this area is comparable to the size of the structure inhomogeneity.

Keywords: yield function for a micropolar medium, size effects, pseudo-Cosserat continuum, couple stress.

References

1. *Fizicheskaya mezomekhanika i kompyuternoe konstruirovaniye* [Panin V.E., ed., Physical Mesomechanics and the Computer Design of Materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995. (In Russian).

2. Panin V.E., Grinyaev Yu.V., Psakhye S.G. Two decades of developments in physical mesomechanics: achievements, problems and prospects. *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 2004, vol. 7, no. 4, pp. 93–113. (In Russian).

3. Tyumentsev A.N., Korotayev A.D., Pinzhin Yu.P. Highly Defective Structural States, Fields of Local Internal Stresses and Cooperative Mesoscopic Mechanisms of Crystal Deformation and Reorientation in Nanostructured Metal Materials. *Phys. Mesomech.*, 2004, vol. 7, nos. 3–4, pp. 31–46.

4. Panin V.E., Panin A.V. Effect of the Surface Layer in a Solid under. *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 2005, vol. 8, nos. 5–6, pp. 7–14. (In Russian).

5. Kuznetsov P.V. and Panin V.E., Direct Observation of Flows of Defects and of nm-Range Localization of Deformation on Duralumin Surface with the Aid of Scanning Tunnel and Atom Force Microscopes. *Phys. Mesomech.*, 2000, vol. 3, no. 2, pp. 85–91.

6. Panin V.E., Yelsukova T.F., Popkova Yu.F., Pochivalov Yu.I. Role of curvature of the surface layer of titanium polycrystals in generation and development of fatigue fracture. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2015, vol. 96, no. 2, pp. 148–153. (In Russian).

7. Panin V.E., Egorushkin V.E., Panin A.V., Moiseenko D.D. On the nature of plastic strain localization in solids. *Technical Physics*, 2017, vol. 52, iss. 8, pp 1024–1030. DOI: 10.1134/S1063784207080105.



8. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*, Springer Science & Business Media, 2012.

9. Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity. In: *Microcontinuum Field Theories*, Springer, New York, NY, 1999, pp. 101–248. DOI: 10.1007/978-1-4612-0555-5_5.

10. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, no. 1, pp. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.

11. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and analysis*, 1962, vol. 11, no. 1, pp. 415–448.

12. Kozlov E.V., Koneva N.A., and Zhdanov A.N. Structure and Strain Resistance of FCC Ultrafine-Grained Metals and Alloys. *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 2004, vol. 7, no. 4, pp. 93–113. (In Russian).

13. Forest S., Sievert R. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 2003, vol. 160, nos. 1–2, pp. 71–111. DOI: 10.1007/s00707-002-0975-0.

14. Smolin I.Yu. The use of the micropolar models for the description of the plastic deformations at the mesoscale level. *Vestnik Permskogo natsyonalnogo issledovatelskogo politekhnicheskogo universiteta: Mekhanika*, 2006, no. 14, pp. 189–205. (In Russian).

15. Lippmann H. Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mechanica*, 1969, vol. 8, nos. 3–4, pp. 255–284. DOI: 10.1007/BF01182264.

16. Sawczuk A. On the yielding of Cosserat continua. *Archives of Mechanics*, 1967, vol. 19, no. 3, pp. 471–480.

17. Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums. *Acta Mechanica*, 1974, vol. 20, nos. 1–2, pp. 105–131. DOI: 10.1007/BF01374965.

18. Mühlhaus H.B., Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique*, 1987, vol. 37, no. 3, pp. 271–283. DOI: 10.1680/geot.1987.37.3.271.

19. De Borst R. Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, 1991, vol. 8, no. 4, pp. 317–332. DOI: 10.1108/eb023842.

20. De Borst R. A generalisation of J2-flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, vol. 103, no. 3, pp. 347–362. DOI: 10.1016/0045-7825(93)90127-J.

21. Lippmann H. Cosserat Plasticity and Plastic Spin. *Appl. Mech. Rev.*, 1995, vol. 48, no. 11. DOI: 10.1115/1.3005091.

22. Altenbach H., Eremeyev V.A. Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials. *International Journal of Plasticity*, 2014, vol. 63, pp. 3–17. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.05.009.

23. Dietsche A., Steinmann P., Willam K. Micropolar elastoplasticity and its role in localization. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, no. 7, pp. 813–831. DOI: 10.1016/0749-6419(93)90053-S.

24. Steinmann P. A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, vol. 31, no. 8, pp. 1063–1084. DOI: 10.1016/0020-7683(94)90164-3.

25. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of Plasticity Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 420 p. (In Russian).

26. Mase G.E. *Theory and Problems of Continuum*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

27. Vardoulakis I. Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory. *Ingenieur-Archiv.*, 1989, vol. 59, no. 2, pp. 106–113. DOI: 10.1007/BF00538364.

28. Salehi S.H., Salehi M. Numerical investigation of nanoindentation size effect using micropolar theory. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 12, pp. 3365–3376. DOI: 10.1007/s00707-014-1116-2.

29. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Kurper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.



30. Groen A.E., Schellekens J.C.J., De Borst R. Three-dimensional finite element studies of failure in soil bodies using a Cosserat continuum. In: *Computer Methods and Advances in Geomechanics*: Proceedings of the 8th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Morgantown, West Virginia, USA, 22–28 May 1994, Balkema, 1994, pp. 581–586.

31. Frolova K., Vilchevskaya E., Polyanskiy V., Alekseeva E. Modelling of a Hydrogen Saturated Layer Within the Micropolar Approach. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Springer, Cham, 2019, pp. 117–128. DOI: 10.1007/978-3-030-13307-8_9.

32. Adomeit G. Determination of elastic constants of a structured material. In: *Mechanics of Generalized Continua*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1968, pp. 80–82. DOI: 10.1007/978-3-662-30257-6_8.

33. Lakes R.S. Size effects and micromechanics of a porous solid. *Journal of Materials Science*, 1983, vol. 18, no. 9, pp. 2572–2580. DOI: 10.1007/BF00547573.

34. Yang J.F.C., Lakes R.S. Transient study of couple stress effects in compact bone: torsion. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1981, vol. 103, no. 4, pp. 275–279.

35. Alekseeva E., Belyaev A., Zegzhda A., Polyanskiy A., Polyanskiy V., Frolova K., Yakovlev Y. Boundary layer influence on the distribution of hydrogen concentrations during hydrogen-induced cracking test of steels. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 3, pp. 43–57. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.3.043-057.

36. Belyaev A.K., Polyanskiy V.A., Yakovlev Y.A., Mansyrev D.E., Polyanskiy A.M. Surface effect of the waves of plastic deformation and hydrogen distribution in metals. In: *Days on Diffraction: IEEE*, 2017, pp. 45–50. DOI: 10.1109/DD.2017.8167993.

37. Polyanskiy V.A., Belyaev A.K. Alekseeva E.L., Polyanskiy A.M., Tretyakov D.A., Yakovlev Yu.A. Phenomenon of skin effect in metals due to hydrogen absorption. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2019, vol. 31, iss. 6, pp. 1–15. DOI: 10.1007/s00161-019-00839-2.

38. Martinsson A., Sandstrom R. Hydrogen depth profile in phosphorus-doped, oxygen-free copper after cathodic charging. *Journal of Materials Science*, 2012, vol. 47, no. 19, pp. 6768–6776. DOI: 10.1007/s10853-012-6592-y.



Подана в журнал: 29.08.2019 УДК 539.3 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.006-022

СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

К. П. Фролова^{а)*}, Е. Н. Вильчевская^{б)}

Институт проблем машиноведения РАН, о. Васильевский, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург, Российская Федерация

a) b https://orcid.org/0000-0003-0376-4463 kspfrolova@gmail.com; b) b https://orcid.org/0000-0002-5173-3218 vilchevska@gmail.com

*Ответственный автор. Электронная почта: kspfrolova@gmail.com Адрес для переписки: о. Васильевский, Большой проспект, 61, 199178, Санкт-Петербург, Российская Федерация Тел.: +7–981–803–37–56; факс: +7–812–321–47–71

В статье рассматриваются условия пластичности, обобщенные различными способами на случай микрополярных сред, с целью исследования эффекта локализации пластических деформаций в металлах. В качестве примера в статье рассматрено полученное в рамках микрополярной теории сплошных сред неоднородное напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца, на боковой поверхности которого задан распределенный момент и к торцам которого приложено растягивающее усилие. Оказывается, что пластическое течение инициируется непосредственно у границы образца, в то время как материал в целом продолжает вести себя упруго. Результаты свидетельствуют о необходимости учета моментных взаимодействий между частицами среды при рассмотрении приграничной области, размеры которой сопоставимы с характерным размером структурной неоднородности материала.

Ключевые слова: критерий текучести для микрополярной среды, размерный эффект, псевдоконтинуум Коссера, моментное взаимодействие.

1. Введение

Согласно имеющимся в литературе данным, реакция материала на нагружение определяется прежде всего процессами, происходящими на мезоуровне, являющимся промежуточным между микро- и макромасштабным [1, 2]. При этом может наблюдаться локализация пластических деформаций, возникающих в малых по сравнению с объемом тела областях. Так, согласно [3], некоррелированное движение индивидуальных дислокаций в высокопрочных металлах приводит к возникновению локальных зон пластического течения, размеры которых сопоставимы с размерами ядер дислокаций. В работах [4–6] отмечается, что именно в поверхностном слое материала наблюдается широкий спектр атомных конфигураций и большое количество вакансий, приводящих к ослаблению межатомных взаимодействий и развитию интенсивной пластической деформации. В [4, 7] подчеркивается, что поверхностный слой в материале является самостоятельной подсистемой, играющей принципиально важную роль в развитии пластических деформаций.

Для учета структурной неоднородности материала, проявляющейся на мезоуровне, представляется обоснованным применение микрополярной теории, учитывающей, в общем случае, помимо трансляционных вращательные степени свободы элементов среды и вводящей моментные взаимодействия между ними наряду с силовыми [8–11]. Действительно, согласно [12], в материалах с большими градиентами напряжений и наличием высокодефектных субструктур в ходе деформации возможно развитие поворотов отдельных областей, вызванных миграцией границ зерен. Применение микрополярной теории приводит



к возрастанию вклада моментных напряжений и существенному отличию результата от полученного в рамках классической теории для области концентрации напряжений, сопоставимой с характерным размером структурной неоднородности материала [13, 14]. При этом вне данной области моментные взаимодействия можно считать малыми второго порядка по сравнению с силовыми. Как следствие, микрополярная теория позволяет описать начало пластического течения, локализованного в области концентрации напряжений, определяемой характерными длинами для деформации изгиба и кручения – параметрами материала, отражающими так называемый «размерный эффект» и сопоставимыми с размерами элементов структуры материала. Сам эффект заключается в том, что в рамках обобщенных сред жесткости на изгиб и кручение у стержней и пластинок при уменьшении их размеров возрастают, в отличие от постоянных значений, предсказываемых классической теорией сплошных сред [13, 14].

Основы микрополярной теории пластичности были заложены в [15–20]. Обзор развития теории можно найти в [14, 21–22]. Определение условия пластичности классической теории течения может быть обобщено на случай микрополярных сред двумя способами [13, 14, 21]. Используется либо один общий критерий пластичности, в который входят и силовые, и моментные напряжения [13, 18, 20, 23, 24], либо два отдельных критерия для силовых и моментных напряжений соответственно [13, 21]. Само условие пластичности в обоих случаях заключается в том, что функция текучести становится неотрицательной. Данная функция зависит только от обобщенной интенсивности напряжений, которая в свою очередь может определяться различными способами, как в случае единого критерия, так и в случае двух различных критериев. Наиболее известные формулировки представлены в следующем разделе. Различие состоит в том, каким образом задается набор материальных параметров, фигурирующих в выражении для интенсивности. Часть из них может обнуляться, а часть – приравниваться друг другу.

Интерес представляет сравнение интенсивностей напряжений, определяемых в рамках классической и микрополярной теорий сплошных сред, для понимания степени влияния моментного взаимодействия между частицами среды на поведение материала. В работе в качестве примера будет представлено сравнение интенсивностей напряжений, возникающих при растяжении металлического образца, описываемого классической моделью и моделью псевдоконтинуума Коссера, являющейся частным случаем микрополярной среды. Модель псевдоконтинуума Коссера основана на предположении о том, что взаимодействие между частицами среды осуществляется как за счет силовых, так и за счет моментных напряжений, но при этом дополнительная вращательная степень свободы частиц среды отсутствует, а их повороты определяются через ротор векторного поля перемещений [11]. Помимо этого для модели псевдоконтинуума Коссера в работе будет предложено сравнение интенсивностей напряжений, полученных при использовании различных критериев пластичности, представленных в литературе.

2. Постановка задачи и методы решения

2.1. Критерии пластичности для микрополярных сред

Из классической теории сплошных сред известно, что, во-первых, для изотропного материала условие пластичности не должно зависеть от выбора направления и может быть выражено в виде функции главных инвариантов тензора напряжений. Во-вторых, как правило, всестороннее сжатие не приводит к пластическим деформациям, а потому данная функция зависит от инвариантов девиаторной части тензора напряжений. Наиболее приемлемыми и широко используемыми критериями в классической теории являются критерии Треска и Мизеса [25, 26].



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Критерий Мизеса может быть обобщен на микрополярные среды с помощью одного или двух условий пластичности. В общем виде единый критерий, учитывающий влияние как силовых, так и моментных напряжений, вводится следующим образом [13, 14]:

$$Y(\mathbf{T}, \mathbf{M}) \equiv J_2(\mathbf{T}, \mathbf{M}) - Y_p = 0,$$
⁽¹⁾

$$J_2(\mathbf{T}, \mathbf{M}) = \sqrt{a_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + a_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + b_1 \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} + b_2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}},$$
(2)

где $\mathbf{S} = \mathbf{T} - 1/3$ tr $\mathbf{T}\mathbf{E}$ – девиатор тензора силовых напряжений \mathbf{T} ; \mathbf{E} – единичный тензор, \mathbf{M} – тензор моментных напряжений; a_1 , a_2 , b_1 , b_2 – материальные параметры; Y_p – предел текучести. Двойные скалярные произведения вводятся по следующим правилам: $\mathbf{ab}: \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}); \mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$

Другой возможный способ обобщения критерия Мизеса заключается в постановке двух условий пластичности, представляющих собой две функции, каждая из которых зависит только от одного тензора напряжений (силового или моментного). Соответствующие формулы для функций текучести и интенсивностей напряжений примут вид [13, 14]:

$$Y_{\sigma}(\mathbf{T}) \equiv J_{2}(\mathbf{T}) - Y_{p}^{\sigma} = 0, \ Y_{M}(\mathbf{M}) \equiv J_{2}(\mathbf{M}) - Y_{p}^{M} = 0;$$
⁽³⁾

$$J_{2}(\mathbf{T}) = \sqrt{a_{1}\mathbf{S}:\mathbf{S} + a_{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}}, \ J_{2}(\mathbf{M}) = \sqrt{b_{1}\mathbf{M}:\mathbf{M} + b_{2}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}}.$$
(4)

В этом случае для силовых и моментных напряжений вводятся два различных предела текучести: Y_n^{σ} и Y_n^{M} соответственно.

Введенные формулами (1) и (3) критерии должны совпадать с классическим при переходе к безмоментной среде ($\mathbf{M} = 0$; $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, где верхний индекс T означает транспонирование), что накладывает ограничение на материальные параметры a_1 , è a_2 , а именно: $a_1 + a_2 = 1/2$. Это единственное ограничение не дает однозначного определения дополнительных материальных констант, входящих в выражения для интенсивностей, описываемых формулами (2) и (4). Стоит отметить, что определение данных констант является одной из основных задач при применении неклассических сплошных сред [13, 14, 19]. Не останавливаясь на способах получения того или иного набора значений данных параметров, приведем наиболее широко известные из них.

Авторы [18–20, 27–28] вводят следующий единый критерий текучести, в котором $b_2 = 0$:

$$J_2(\mathbf{T}, \mathbf{M}) = \sqrt{a_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + a_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + b_1 \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}}.$$
(5)

Остальные параметры определяются различными способами. Под «стандартным» набором предполагаются значения $a_1 = a_2 = 1/4$, $b_1 = 1/(2l^2)$, где l – характерный параметр материала размерности длины, существенно влияющий на размер области локализации концентрации напряжений [13, 20, 24]. В [18, 27] при решении статической задачи используются значения $a_1 = 3/4$, $a_2 = -1/4$, $b_1 = 1/(8l^2)$. В [20] показано, что выбор данных значений не оказывает существенного влияния на переход в пластическое состояние.

Авторы [17, 21] вводят интенсивность для случая единого критерия текучести как





ISSN 2410-9908

$$J_{2}(\mathbf{T},\mathbf{M}) = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S} + \frac{1}{2}(\beta^{2}-1)\mathbf{\sigma}^{A}:\mathbf{\sigma}^{A} + b_{1}\mathbf{M}:\mathbf{M}}.$$
(6)

Для случая двух различных критериев для силовых и моментных напряжений автор [21] предлагает следующие выражения для определения соответствующих им интенсивностей:

$$J_{2}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S} + \frac{1}{2}(\beta^{2} - 1)\boldsymbol{\sigma}^{A}:\boldsymbol{\sigma}^{A}}, \ J_{2}(\mathbf{M}) = \sqrt{b_{1}\mathbf{M}:\mathbf{M}}.$$
(7)

В выражениях (6) и (7) принимается, что $b_1 = (\alpha/L)^2$, α , $\beta \ge 0$ – безразмерные материальные параметры материала; L – масштабный параметр размерности длины.

При $\beta = 0$ интенсивность, определяемая формулой (6), совпадает с введенной в [22, 29, 30]. Тогда выражение (6) совпадает с выражением (2), а выражение (7) – с выражением (4) при следующих значениях материальных параметров: $a_2 = b_2 = 0$; $a_1 = 1/2$; $b_1 = (\alpha/L)^2$.

Заметим, что при растяжении образца интенсивность напряжений для всех выше перечисленных случаев определяется как

$$\tilde{J}_2 = \sqrt{3}J_2. \tag{8}$$

При определении интенсивности напряжений будем использовать в выражениях (2) и (4) наборы параметров, представленные в таблице. При этом в качестве масштабного параметра *l* размерности длины будем использовать характерную длину для деформации изгиба, как это предложено например в [28].

Таблица – Наборы параметров в выражениях для интенсивности напряжений

№	Значения параметров
1	$a_1 = a_2 = \frac{1}{4}; b_1 = \frac{1}{2l_b^2}; b_2 = 0$
2	$a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = -\frac{1}{4}; b_1 = \frac{1}{8l_b^2}; b_2 = 0$
3	$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 0; b_1 = \frac{1}{2l_b^2}; b_2 = 0$
4	$a_1 = a_2 = \frac{1}{4}; \ b_1 = b_2 = \frac{1}{2l_b^2}$
5	$a_1 = a_2 = \frac{1}{4}; \ b_1 = b_2 = \frac{1}{4l_b^2}$

2.2. Задача о растяжении цилиндрического образца

В качестве примера определим по приведенным в предыдущем подразделе формулам интенсивность напряжений при растяжении металлического образца цилиндрической формы радиуса r_0 , на боковой поверхности которого задан распределенный момент $-M_0 \mathbf{e}_{\varphi}$. Напряженно-деформированное состояние образца получено в [31] в рамках теории упругости

Frolova K. P., Vilchevskaya E. N. Comparison of the yield functions for micropolar media using a cylindrical sample model. – 2019. – Iss. 5. – P. 6–22. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.006-022.



ISSN 2410-9908

псевдоконтинуума Коссера при решении задачи в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с помощью асимптотического метода. Полученные силовые и моментные напряжения имеют вид:

$$\mathbf{T} = \frac{F}{S} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + 2\sqrt{\frac{\mu}{\beta_3}} M_0 e^{-2\sqrt{\frac{\mu}{\beta_3}}(r_0 - r)} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r;$$
(9)

$$\mathbf{M} = -M_0 e^{-2\sqrt{\frac{\mu}{\beta_3}}(r_0 - r)} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \mathbf{e}_{\varphi} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_{\varphi}\right),\tag{10}$$

где *F* – растягивающая сила, приложенная к торцам цилиндра; $S = \pi r_0^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра; μ – модуль сдвига; β_2 , β_3 – неклассические упругие модули, отражающие вклад моментных взаимодействий между частицами среды.

Определение значений неклассических модулей, фигурирующих в выражениях (9) и (10), сопряжено с техническими сложностями, поскольку измерить данные параметры напрямую подобно классическим упругим модулям невозможно. Для оценки данных модулей используются методы размерных эффектов, при которых значения модулей определяются на основании сопоставления результатов измерений с полученными расчетными зависимостями жесткостей на изгиб и кручение от размеров образца [14]. Несмотря на значительный прогресс в области микрополярной теории сплошных сред, неклассические упругие модули на данный момент определены лишь для некоторых материалов [32–34].

Таким образом, в модель микрополярной среды можно ввести характерные длины для деформации изгиба l_b и кручения l_t , которые связаны с упругими модулями следующим образом [9]:

$$l_{b} = \sqrt{\frac{\beta_{3}}{4\mu}}; \ l_{t} = \sqrt{\frac{\beta_{2} + \beta_{3}}{2\mu}}.$$
 (11)

При этом значения неклассических упругих модулей ограничены условием: $-\beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_3$, что накладывает аналогичное ограничение и на значения характерных длин, а именно: $0 \leq l_t \leq 2l_b$.

Из приведенного в формулах (9) и (10) решения видно, что напряженно-деформированное состояние образца у его боковой поверхности может быть уточнено с помощью модели, предложенной в рамках микрополярной теории упругости, тогда как при удалении от поверхности эффект, связанный с наличием распределенного момента на границе, исчезает. Таким образом, в приграничной области возникает концентрация напряжений, что может инициировать локальное пластическое течение.

3. Результаты и обсуждение

Выпишем все двойные скалярные произведения, фигурирующие в выражениях для интенсивности напряжений, представленных формулами (2) и (4):

$$\mathbf{S}:\mathbf{S} = \frac{2}{3}\frac{F^2}{S^2} + \frac{M_0^2}{l_b^2}e^{-2\frac{(r_0 - r)}{l_b}};$$
(12)





ISSN 2410-9908

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \frac{2}{3} \frac{F^2}{S^2}; \tag{13}$$

$$\mathbf{M}: \mathbf{M} = \frac{\left(l_t^2 - 2l_b^2\right)^2 + 4l_b^4}{4l_b^4} M_0^2 e^{-2\frac{(r_0 - r)}{l_b}};$$
(14)

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \frac{l_t^2 - 2l_b^2}{l_b^2} M_0^2 e^{-2\frac{(r_0 - r)}{l_b}}.$$
(15)

При решении задачи в рамках классической теории сплошных сред моментные напряжения равны нулю, а в выражении для силовых напряжений отсутствует компонента, содержащая экспоненциальную функцию. Тогда классическая интенсивность напряжений при растяжении будет определяться формулой (16):

$$\tilde{J}_{2}^{cl} = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}}}.$$
 (16)

Для получения численных результатов рассмотрим цилиндрический образец радиуса $r_0 = 0,004$ і и длины L = 0,04 і, выполненный из атмосферостойкой стали с модулем сдвига $\mu = 80\ 000$ І Ї а. Примем для определенности, что распределенный момент на границе $M_0 = 64\ 000$ Ї а. Предел текучести при растяжении находится в диапазоне $Y_p = 465-640\ M\Pi a$. Примем, что растягивающее усилие $F = 20\ 000$ І́. Тогда, согласно выражению (16), интенсивность напряжений окажется равной $\tilde{J}_2^{cl} \approx 400\ M\Pi a$, что не превышает значения предела текучести при растяжении. Таким образом, при моделировании поведения материала в рамках безмоментной теории оно является чисто упругим.

В работе [31] предложен метод определения материальной константы l_b , основанный на сравнении экспериментальных и аналитических данных. При этом предполагается, что модель объясняет существенно неоднородное распределение водорода, проникающего в металл из внешней среды. Так, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что водород практически весь аккумулируется в тонком поверхностном слое [35–38]. Экспериментально измеренная толщина пограничного слоя r_* , содержащего избыток водорода, сравнивается с аналитически полученной шириной области с дополнительными продольными смещениями частиц континуума. Тогда имеет место следующее соотношение: $l_b = r_0 (1 - r_*/r_0)/\ln k$, где k показывает степень затухания продольных перемещений при удалении от боковой поверхности образца на толщину пограничного слоя. При k = 100 получаем $l_b = 13$ µм.

3.1. Единый критерий пластичности

При использовании стандартного набора параметров (таблицы № 1) в выражении для интенсивности напряжений, обобщенной на случай микрополярного материала формулой (2), получаем следующее равенство:

$$\tilde{J}_{2_{1}} = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{8} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{6}} \left(\left(l_{t}^{2} - 2l_{b}^{2} \right)^{2} + 6l_{b}^{4} \right) e^{-2\frac{(r_{0} - r)}{l_{b}}}.$$
(17)

110 0008



ISSN 2410-9908

При использовании набора параметров, предложенного в [18, 27] для статической модели (таблица № 2), интенсивность напряжений, вычисленная по формуле (2), оказывается равной

$$\tilde{J}_{2_{2}} = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{32} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{6}} \left(\left(l_{t}^{2} - 2l_{b}^{2} \right)^{2} + 28l_{b}^{4} \right) e^{-2\frac{(r_{0} - r)}{l_{b}}}.$$
(18)

При использовании набора параметров № 3 (таблица) общая интенсивность определяется выражением

$$\tilde{J}_{2_3} = \sqrt{\frac{F^2}{S^2} + \frac{3M_0^2}{8l_b^6} \left(\left(l_t^2 - 2l_b^2 \right)^2 + 8l_b^4 \right) e^{-2\frac{(r_0 - r)}{l_b}}}.$$
(19)

Найдем функции интенсивности, определяемые формулами (17)–(19), для следующих трех значений характерной длины для деформации кручения: $l_t = 0$ ($\beta_2 = -\beta_3$); $l_t = \sqrt{2}l_b$ ($\beta_2 = 0$); $l_t = 2l_b$ ($\beta_2 = \beta_3$). При сравнении выражений (17)–(19) видно, что имеют место следующие равенства: $J_{2_1}|_{l_t=0} = J_{2_1}|_{l_t=2l_b}$; $J_{2_2}|_{l_t=0} = J_{2_2}|_{l_t=2l_b}$; $J_{2_3}|_{l_t=0} = J_{2_3}|_{l_t=2l_b}$. Интенсивность напряжений на боковой поверхности образца принимает значения $\tilde{J}_{2_1}(r_0) = 9,5$ А́І à; $\tilde{J}_{2_2}(r_0) = 8,5$ А́І à; $\tilde{J}_{2_3}(r_0) = 10,5$ А́І à – при $l_t = 0, l_t = 2l_b$ и значения $\tilde{J}_{2_1}(r_0) = 7,4$ А́І à; $\tilde{J}_{2_2}(r_0) = 7,9$ А́І à; $\tilde{J}_{2_3}(r_0) = 8,5$ А́І à – при $l_t = \sqrt{2}l_b$. Графики зависимости интенсивностей от безразмерной радиальной координаты ($x = 1 - r/r_0$) для разных значений характерной длины для деформации кручения представлены на рис. 1.

При анализе результата, представленного на рис. 1, видно, что учет моментных взаимодействий между частицами микрополярной среды приводит к возникновению пластического течения непосредственно у боковой поверхности образца, поскольку интенсивность напряжений в этой области значительно превышает предел текучести при растяжении. При удалении от границы интенсивность стремительно убывает и стремится к полученной в рамках классической теории. Следовательно, уточненное с помощью микрополярной теории решение играет роль только в тонком поверхностном слое, толщина которого сопоставима с размерами структурной неоднородности материала. При выходе же за пределы данной области моментные взаимодействия можно считать малыми второго порядка по сравнению с силовыми.

Как видно из представленных на рис. 1 графиков, значение характерной длины для деформации кручения влияет на значение интенсивности у боковой поверхности образца. Характер же убывания интенсивности до значения, получаемого в рамках классической теории, равно как и ширина зоны локализации концентрации напряжений, не меняются существенно при изменении данного параметра.

Заметим, что качественно результаты, полученные для разных наборов параметров в выражении для интенсивности, не отличаются друг друга. Тем не менее имеются количественные отличия, во-первых, в максимальном значении интенсивности, а во-вторых, в ширине зоны локализации пластического течения (рис. 2).



Рис. 1. Зависимости интенсивности напряжений от безразмерной радиальной координаты при разных значениях $l_t: a - \tilde{J}_{2_1}(x); \ \delta - \tilde{J}_{2_2}(x); \ e - \tilde{J}_{2_3}(x)$



Рис. 2. Сравнение интенсивностей напряжений, полученных для разных наборов параметров (таблица № 1–3): $a - l_t = 0$, $l_t = 2l_b$; $\delta - l_t = \sqrt{2}l_b$

Рассмотрим теперь общее выражение для интенсивности, в котором фигурируют все двойные скалярные произведения, представленные формулами (12)–(15). Остановимся



ISSN 2410-9908

на двух последних наборах параметров, представленных в таблице. В первом случае (таблица № 4) имеем следующее выражение для обобщенной интенсивности:

$$\tilde{J}_{2_4} = \sqrt{\frac{F^2}{S^2} + \frac{3M_0^2}{16l_b^6} \left(l_t^4 + 4l_b^4\right) e^{-2\frac{(r_0 - r)}{l_b}}};$$
(20)

во втором случае:

$$\tilde{J}_{2_{5}} = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3M_{0}^{2}}{8l_{b}^{6}} \left(l_{t}^{4} + 2l_{b}^{4}\right) e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}.$$
(21)

При сравнении выражений (20) и (21) видно, что при $l_t = 0$ значения интенсивностей совпадают. Сравнение значений интенсивностей, вычисленных по формулам (20) и (21), для $l_t = 0$; $l_t = \sqrt{2}l_b$ и $l_t = 2l_b$ представлено на рис. 3.



Рис. 3. Сравнение интенсивностей напряжений, учитывающих все двойные скалярные произведения между тензорами силовых и моментных напряжений: $a - l_t = 0; \ 6 - l_t = \sqrt{2}l_b; \ e - l_t = 2l_b$

Frolova K. P., Vilchevskaya E. N. Comparison of the yield functions for micropolar media using a cylindrical sample model. – 2019. – Iss. 5. – P. 6–22. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.006-022.



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

При анализе результатов, представленных на рис. 3, и сравнении их с полученными выше можно заметить, что качественного изменения картины не наблюдается при использовании большего или меньше числа ненулевых параметров, фигурирующих в выражении для обобщенной интенсивности. Основное различие заключается в величине, определяющей интенсивность напряжений в области их концентрации. При этом очевидно, что все предложенные значения существенно превышают предел текучести материала при растяжении. Таким образом, принципиально важно учитывать моментное взаимодействие при определении поведения материала в области, соразмерной с масштабом структурной неоднородности.

3.2. Два критерия пластичности. Сравнение с единым критерием

Использование наборов параметров, перечисленных в таблице, даст следующие выражения для интенсивностей силовых и моментных напряжений соответственно:

$$\tilde{J}_{2_{1}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{4} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{2}} e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \tilde{J}_{2_{1}}(\mathbf{M}) = \sqrt{\frac{3M_{0}^{2}}{8l_{b}^{6}} \left(\left(l_{t}^{2} - 2l_{b}^{2}\right)^{2} + 4l_{b}^{4} \right) e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}};$$
(22)

$$\tilde{J}_{2_{2}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{9}{4} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{2}} e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad \tilde{J}_{2_{2}}(\mathbf{M}) = \sqrt{\frac{3M_{0}^{2}}{32l_{b}^{6}} \left(\left(l_{t}^{2} - 2l_{b}^{2}\right)^{2} + 4l_{b}^{4} \right) e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad (23)$$

$$\tilde{J}_{2_{3}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{2} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{2}} e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad \tilde{J}_{2_{3}}(\mathbf{M}) = \sqrt{\frac{3M_{0}^{2}}{8l_{b}^{6}} \left(\left(l_{t}^{2} - 2l_{b}^{2}\right)^{2} + 4l_{b}^{4}\right) e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad (24)$$

$$\tilde{J}_{2_{4}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{4} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{2}} e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad \tilde{J}_{2_{4}}(\mathbf{M}) = \frac{\sqrt{3}M_{0}l_{t}^{2}}{2\sqrt{2}l_{b}^{3}} e^{-\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}; \quad (25)$$

$$\tilde{J}_{2_{5}}\left(\mathbf{T}\right) = \sqrt{\frac{F^{2}}{S^{2}} + \frac{3}{4} \frac{M_{0}^{2}}{l_{b}^{2}} e^{-2\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}}; \quad \tilde{J}_{2_{5}}\left(\mathbf{M}\right) = \frac{\sqrt{3}M_{0}l_{t}^{2}}{4l_{b}^{3}} e^{-\frac{(r_{0}-r)}{l_{b}}}.$$
(26)

При сравнении выражений (22)–(26) отметим, что в некоторых случаях для разных наборов параметров совпадают либо интенсивности силовых ((22), (25) и (26)), либо интенсивности моментных напряжений ((22) и (24)). Интерес представляет сравнение данных интенсивностей с соответствующими интенсивностями, полученными при использовании единого условия пластичности.

Поскольку влияние значения параметра характерной длины для деформации кручения на величину интенсивности было обсуждено в предыдущем пункте, при рассмотрении критериев пластичности в данном разделе примем для определенности, что $l_t = \sqrt{2}l_b$.

Графики зависимостей интенсивностей от безразмерной радиальной координаты для случая одного и двух критериев пластичности представлены на рис. 4.





Из представленных на рис. 4 графиков видно, что общая интенсивность напряжений, зависящая одновременно и от силовых, и от моментных напряжений, выше значений интенсивностей, зависящих только от одного из типа напряжений. При этом интенсивность моментных напряжений, как и следовало ожидать, быстро убывает при удалении от зоны концентрации напряжений.



4. Заключение

В работе представлен анализ неоднородного напряженно-деформированного состояния растягиваемого цилиндрического образца, на боковой поверхности которого задан распределенный момент. В результате учета моментных взаимодействий между частицами среды в рамках микрополярной теории оказывается, что интенсивность напряжений в приграничной зоне значительно превышает предел текучести при растяжении. При этом функция интенсивности резко убывает при удалении от боковой поверхности цилиндрического образца до значения, прогнозируемого классической теорией сплошных сред. Таким образом, при общем упругом поведении материала может наблюдаться локализованное пластическое течение в приграничной области, размеры которой сопоставимы с размерами структурной неоднородности материала.

Литература

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / отв. ред. В. Е. Панин. – Новосибирск, «Наука», 1995.

2. Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Псахье С. Г. Физическая мезомеханика: достижения за два десятилетия развития, проблемы и перспективы // Физическая мезомеханика. – 2004. – Vol. 7, no. 4. – С. 93–113.

3. Tyumentsev A. N., Korotayev A. D., Pinzhin Yu. P. Highly Defective Structural States, Fields of Local Internal Stresses and Cooperative Mesoscopic Mechanisms of Crystal Deformation and Reorientation in Nanostructured Metal Materials // Phys. Mesomech. – 2004. – Vol. 7, nos. 3–4. – P. 31–46.

4. Панин В. Е., Панин А. В. Эффект поверхностного слоя в деформируемом твердом теле // Физическая мезомеханика. – 2005. – Vol. 8, по. 5. – С. 7–15.

5. Kuznetsov P. V. and Panin V. E. Direct Observation of Flows of Defects and of nm-Range Localization of Deformation on Duralumin Surface with the Aid of Scanning Tunnel and Atom Force Microscopes // Phys. Mesomech. -2000. - Vol. 3, no. 2. - P. 85–91.

6. Роль локальной кривизны поверхностного слоя поликристаллов титана в зарождении и развитии усталостного разрушения / В. Е. Панин, Т. Φ. Елсукова, Ю. Ф. Попкова, Ю. И. Почивалов // Вопросы атомной науки и техники. – 2015. – Vol. 96, no. 2. – С. 148–153.

7. On the nature of plastic strain localization in solids. / V. E. Panin, V. E. Egorushkin, A. V. Panin, D. D. Moiseenko // Technical Physics. – 2017. – Vol. 52, iss. 8. – P. 1024–1030. – DOI: 10.1134/S1063784207080105.

8. Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of Micropolar Mechanics. – Springer Science & Business Media, 2012.

9. Eringen A. C. Theory of micropolar elasticity // Microcontinuum field theories. – Springer, New York, NY, 1999. – P. 101–248. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0555-5_5.

10. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1964. – Vol. 16, no. 1. – P. 51–78. – DOI: 10.1007/BF00248490.

11. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and analysis. – 1962. – Vol. 11, no. 1. – P. 415–448.

12. Структура и сопротивление деформированию ГЦК ультрамелкозернистых металлов и сплавов / Э. В. Козлов, Н. А. Конева, А. Н. Жданов, Н. А. Попова, Ю. Ф. Иванов // Физическая мезомеханика. – 2004. – Vol. 7, по. 4. – Р. 93–113.

13. Forest S., Sievert R. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua // Acta Mechanica. – 2003. – Vol. 160, nos. 1–2. – P. 71–111. – DOI: 10.1007/s00707-002-0975-0.

14. Смолин И. Ю. Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2006. – № 14. – С. 189–205.



15. Lippmann H. Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens // Acta Mechanica. – 1969. – Vol. 8, nos. 3–4. – P. 255–284. – DOI: 10.1007/BF01182264.

16. Sawczuk A. On the yielding of Cosserat continua // Archives of Mechanics. -1967. - Vol. 19, no. 3. - P. 471-480.

17. Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. – 1974. – Vol. 20, nos. 1–2. – P. 105–131. – DOI: 10.1007/BF01374965.

18. Mühlhaus H. B., Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials // Geotechnique. – 1987. – Vol. 37, no. 3. – P. 271–283. – DOI: 10.1680/geot.1987.37.3.271.

19. De Borst R. Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum // Engineering computations. – 1991. – Vol. 8, no. 4. – P. 317–332. – DOI: 10.1108/eb023842.

20. De Borst R. A generalisation of J2-flow theory for polar continua // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1993. – Vol. 103, no. 3. – P. 347–362. – DOI: 10.1016/0045-7825(93)90127-J.

21. Lippmann H. Cosserat Plasticity and Plastic Spin // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48, no. 11. – DOI: 10.1115/1.3005091.

22. Altenbach H., Eremeyev V. A. Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol. 63. – P. 3–17. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.05.009.

23. Dietsche A., Steinmann P., Willam K. Micropolar elastoplasticity and its role in localization // International Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9, no. 7. – P. 813–831. – DOI: 10.1016/0749-6419(93)90053-S.

24. Steinmann P. A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity // International Journal of Solids and Structures. – 1994. – Vol. 31, no. 8. – P. 1063–1084. – DOI: 10.1016/0020-7683(94)90164-3.

25. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М : Наука, 1969. – 420 с.

26. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред : учебник. – М. : Мир, 1974. – 319 с.

27. Vardoulakis I. Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory // Ingenieur-Archiv. – 1989. – Vol. 59, no. 2. – P. 106–113. – DOI: 10.1007/BF00538364.

28. Salehi S. H., Salehi M. Numerical investigation of nanoindentation size effect using micropolar theory // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225, no. 12. – P. 3365–3376. – DOI: 10.1007/s00707-014-1116-2.

29. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Kurper // Acta Mechanica. – 1966. – Vol. 2, no. 1. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.

30. Groen A. E., Schellekens J. C. J., De Borst R. Three-dimensional finite element studies of failure in soil bodies using a Cosserat continuum // Computer Methods and Advances in Geomechanics : Proceedings of the 8th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Morgantown, West Virginia, USA, 22–28 May 1994. – Balkema, 1994. – P. 581–586.

31. Modelling of a Hydrogen Saturated Layer Within the Micropolar Approach / K. Frolova, E. Vilchevskaya, V. Polyanskiy, E. Alekseeva // New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. – Springer, Cham, 2019. – P. 117–128. – DOI: 10.1007/978-3-030-13307-8 9.

32. Adomeit G. Determination of elastic constants of a structured material // Mechanics of Generalized Continua. – 1968. – P. 80–82. – DOI: 10.1007/978-3-662-30257-6_8.

33. Lakes R. S. Size effects and micromechanics of a porous solid // Journal of Materials Science. – 1983. – Vol. 18, no. 9. – P. 2572–2580. – DOI: 10.1007/BF00547573.

34. Yang J. F. C., Lakes R. S. Transient study of couple stress effects in compact bone: torsion // Journal of biomechanical engineering. – 1981. – Vol. 103, no. 4. – P. 275–279.

35. Boundary layer influence on the distribution of hydrogen concentrations during hydrogeninduced cracking test of steels / E. Alekseeva, A. Belyaev, A. Zegzhda, A. Polyanskiy,



V. Polyanskiy, K. Frolova, Y. Yakovlev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 3. – P. 43–57. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.3.043-057.

36. Surface effect of the waves of plastic deformation and hydrogen distribution in metals / A. K. Belyaev, V. A. Polyanskiy, Y. A. Yakovlev, D. E. Mansyrev, A. M. Polyanskiy // Days on Diffraction : IEEE, 2017. – P. 45–50. – DOI: 10.1109/DD.2017.8167993.

37. Phenomenon of skin effect in metals due to hydrogen absorption / V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev, E. L. Alekseeva, A. M. Polyanskiy, D. A. Tretyakov, Yu. A. Yakovlev // Continuum Mech. Thermodyn. – 2019. – Vol. 31, iss. 6. – P. 1–15. – DOI: 10.1007/s00161-019-00839-2.

38. Martinsson A., Sandstrom R. Hydrogen depth profile in phosphorus-doped, oxygen-free copper after cathodic charging // Journal of Materials Science. – 2012. – Vol. 47, no. 19. – P. 6768–6776. – DOI: 10.1007/s10853-012-6592-y.





http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 09.08.2019 Revised: 15.10.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039

AN EXACT SOLUTION TO THE DESCRIPTION OF A UNIDIRECTIONAL MARAN-GONI FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITH THE NAVIER BOUNDARY CONDITION. VELOCITY FIELD INVESTIGATION

N. V. Burmasheva^{a)*} and E. Yu. Prosviryakov^{b)}

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

^{a)} **b** https://orcid.org/0000-0003-4711-1894 **a** nat_burm@mail.ru; ^{b)} **b** https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 **a** evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: nat_burm@mail.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: +7 (343) 374 53 30

The article considers the unidirectional flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer of a given thickness, which is induced by the thermocapillary effect specified at the upper boundary of the layer and taking into account the condition of fluid slipping at the lower boundary. An exact solution to the Oberbeck-Boussinesq equation system is obtained. A detailed analysis of the velocity field was carried out for various slip length values. It is shown that counterflows may occur in a fluid. Their number is analyzed, the conditions for the appearance of velocity field stratification are written.

Keywords: layered flow, Oberbeck-Boussinesq equation system, exact solution, unidirectional flow, counterflows, Marangoni convection, Navier condition.

References

1. Marangoni C. Sull espansione delle goccie di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid, Pavia, Tipografia dei fratelli Fusi, 1865.

2. Goldstein S.V. Modern Developments in Fluid Mechanics, Oxford, Oxford Univ. Press, 1938.

3. Prandtl L., Tietjens O. *Hydro- und aeromechanic* (2 vols.), Berlin, Verlag von Julius Springer, 1931. DOI: 10.1017/S0368393100115366.

4. Borzenko E.I., Shrager G.R. The structure of viscoplastic fluid flow during filling of a circular pipe/plane channel. *Computational continuum mechanics*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 129–136. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.11. (In Russian).

5. Neto C., Evans D., Bonaccurso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, vol. 68, no. 12, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.

6. Pelenko V.V., Aret V.A., Gusev B.K., Pelenko F.V. The flow of viscoplastic nonlinear media with boundary slip. In: The Bulletin of KrasGAU: Interuniversity Collection of Scientific Papers, Krasnoyarsk, KrasGAU, 2008, no. 2, pp. 54–57. (In Russian).

7. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les lois du mouvement des fluids. *M'em. Acad. Sci. Inst. de France*, 1823, vol. 2, no. 6. pp. 389–440.

8. Lauga E., Brenner M., Stone H. Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition. In: C. Tropea, A.L. Yarin, J.F. Foss, ed., *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*,



http://dream-journal.org

Springer, Berlin, Heidelberg, Springer Handbooks, 2007.

9. Hoffmann J., Johnson C. *Computational Turbulent Incompressible Flow*, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 2007, 397 p.

10. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 2 (28), pp. 35–44. (In Russian).

11. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Computational continuum mechanics*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20. (In Russian).

12. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 pp.

13. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*, Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.

14. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, p. 43.

15. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, iss. 2, pp 197–203, 1989, no. 2, pp. 34–40. (In Russian).

16. Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*, Berlin–Boston, De Gryuter Publ., 2012. xv+ + 417 p.

17. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.

18. Aristov S.N., Frik P.G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194. DOI: 10.1007/BF00858033.

19. Ingel L.Kh., Aristov S.N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere. *Tr. In-ta Eksperim. Meteorol.*, 1996, no. 27 (162), pp. 142–157. (In Russian).

20. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogues of the Birikh solution. *Izvestiya AltGU*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69. (In Russian).

21. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004. (In Russian).

22. Andreev V.K. Resheniya Birikha uravneniy konvektsii i nekotorye ego obobshcheniya: preprint [Birikh Solutions of Convection Equations and Some of its Generalizations: preprint]. Krasnoyarsk, 2010, N 1–10. (In Russian).

23. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in the convection problems. In: *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, M.D. Todorov and C.I. Christov, eds., American Institute of Physics, CP 1404, Melwille, NY, 2011, pp. 31–42.

24. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.

25. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Unsteady-state Bănard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 2, pp. 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.

26. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces



at a free boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 1, pp. 6–42. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042. Available at: http://dream-journal.org/DREAM_Issue_1_2019_Burmasheva_N.V._et_al._006_042.pdf

27. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Layered Benard–Marangoni convection during heat transfer according to the Newton's law of cooling. *Comp. Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940. (In Russian).

28. Goncharova O.N., Kabov O.A. Gravitational-thermocapillary convection of fluid in the horizontal layer in co-current gas flow. *Dokl. Phys.*, 2009, vol. 54, no. 5, pp. 242–247. DOI: 10.1134/S1028335809050061.

29. Bekezhanova V.B. Convective instability of Marangoni-Poiseuille flow under a longitudinal temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 1, pp. 74–81. DOI: 10.1134/S0021894411010111.

30. Gordeeva V.Y., Lyushnin A.V. Influence of the thermocapillary effect on the dynamics and stability of motion of a thin evaporating film. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 351–357. DOI: 10.1134/S1063784213030092.

31. Aktershev S.P. Thermocapillary effect and periodic structures on the surface of a heated viscous liquid film. In: Proceedings of the Institute of Mechanics of Ural Branch of RAS, 2007, no. 5, pp. 79–84. DOI: 10.21662/uim2007.1.005. (In Russian).

32. Schlunder E.U. *Heat Exchanger Design Handbook*, Hemisphere Publishing Corporation, 1983.

33. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 581–587. DOI: 10.1134/S001546281605001X.

34. Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions of the Navier – Stokes equations with a power-law dependence of velocities on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 112–120. DOI: 10.1134/S0040357118060118. (In Russian).

35. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527. (In Russian).

36. Knutova N.S., Shvarts K.G. A study of behavior and stability of an advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity. *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 340–350. DOI: 10.1134/S0015462815030047.

37. Couette M. Études sur le frottement des liquids. Ann. Chim. Phys. Ser. 6, 1890, vol. 21, pp. 433–510.



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 09.08.2019 УДК 539 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ТЕЧЕНИЯ МАРАНГОНИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НАВЬЕ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ

Н. В. Бурмашева^{а)*}, Е. Ю. Просвиряков^{б)}

Институт машиноведения УрО РАН, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

^{a)} **b** https://orcid.org/0000-0003-4711-1894 **a** nat_burm@mail.ru; ⁶⁾ **b** https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 **a** evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: nat_burm@mail.ru Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

В статье рассматривается однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое заданной толщины, индуцированное заданным на верхней границе слоя термокапиллярным эффектом и учетом на нижней границе условия проскальзывания жидкости. Получено точное решение системы уравнений Обербека-Буссинеска. Проведен подробный анализ поля скорости для различных значений длины проскальзывания. Показано, что в жидкости могут возникать противотечения. Проанализировано их число, выписаны условия появления стратификации поля скорости.

Ключевые слова: слоистое течение, система уравнений Обербека-Буссинеска, точное решение, однонаправленное течение, противотечения, конвекция Марангони, условие Навье.

1. Введение

Основой многих технологических процессов является движение жидкости в различного рода системах. Причем особенности переноса энергии, импульса и вещества в ходе этих процессов зависят от множества факторов, к числу которых относятся задаваемые на границах области течения краевые условия. Тип краевого условия определяется видом контактирующих поверхностей. На границе раздела двух сред достаточно часто используется условие, описывающее термокапиллярный эффект Марангони-Гиббса [1]. На границе жидкости с твердой поверхностью наиболее распространено использование условия прилипания [2–4]. Однако экспериментальные работы [5] показывают, что это условие выполняется не всегда. Тогда в качестве альтернативы берется условие проскальзывания. Существует несколько типов условий проскальзывания [6–11]. Выбор конкретного вида граничного условия оказывает существенное влияние на решение краевой задачи.

Изучение конвективных движений в жидкости основывается на анализе свойств точных решений уравнений тепловой конвекции [12]. В работах [13–31] построены обобщенные классы точных решений, в том числе и для конвективных термокапиллярных течений [25–31]. Предложенные точные решения описывают неодномерные течения жидкости. Тем не менее в некоторых случаях при проектировании аппаратов, использующих жидкость с низкой температурой плавления или высокой вязкостью, сама технология диктует применение однонаправленного течения теплоносителей. Однонаправленное течение обеспечивает наиболее однородную температуру стенок между входом и выходом аппарата, сводя тем самым к минимуму температурные напряжения. [32].



ISSN 2410-9908

В предложенной работе построено точное решение, описывающее однонаправленное течение Марангони вязкой несжимаемой жидкости с учетом условия проскальзывания Навье [7] на твердой границе горизонтального бесконечного слоя. Построенное решение для поля температуры и поля давления оказывается двумерным по координатам. Основное внимание в статье уделено анализу поля скоростей течения. Показано, что решение допускает появление расслоений. Выписано условие на граничные параметры, удовлетворение которого означает наличие точек расслоения поля скорости.

2. Постановка задачи и методы решения

Рассматривается установившееся конвективное слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном бесконечном слое толщины h. Действующее на жидкость поле силы тяжести характеризуется ускорением свободного падения g, направленного вертикально вниз. Полагаем, что справедливо приближение Обербека-Буссинеска о зависимости плотности жидкости ρ от ее температуры T $\rho = \rho_0 (1 - \beta T)$, где β – коэффициент теплового расширения жидкости, ρ_0 – среднее значение плотности [12].

Для описания конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости введем систему координат таким образом, чтобы ось *Oz* была направлена вертикально вверх, а оси *Ox*, *Oy* лежали в горизонтальной плоскости.

Полная система уравнений тепловой конвекции, используемая для описания слоистых течений (компонента V_z вектора скорости V полагается равной нулю) вязкой несжимаемой жидкости, имеет вид [12]:

$$V_{x} \frac{\partial V_{x}}{\partial x} + V_{y} \frac{\partial V_{x}}{\partial y} = v\Delta V_{x} - \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$V_{x} \frac{\partial V_{y}}{\partial x} + V_{y} \frac{\partial V_{y}}{\partial y} = v\Delta V_{y} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta\Delta T;$$

$$V_{x} \frac{\partial T}{\partial x} + V_{y} \frac{\partial T}{\partial y} = \chi\Delta T;$$

$$\frac{\partial V_{x}}{\partial x} + \frac{\partial V_{y}}{\partial y} = 0.$$
(1)

В системе (1) приняты обозначения: P(x, y, z) – нормированное на плотность отклонение давления от гидростатического; T(x, y, z) – отклонение температуры от отсчетного значения $v; \chi$ – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости и ее температуропроводность; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Первые три уравнения системы (1) есть запись векторного уравнения Навье-Стокса в проекциях на координатные оси, четвертое уравнение – уравнение теплопроводности, последнее – уравнение несжимаемости.

В случае рассмотрения однонаправленных течений вдоль оси Ox (рис. 1) полагаем скорость $V_y = 0$. Тогда система (1) значительно упрощается:





ISSN 2410-9908

$$V_{x} \frac{\partial V_{x}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^{2} V_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} V_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} V_{x}}{\partial z^{2}} \right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T;$$

$$V_{x} \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} T}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} T}{\partial z^{2}} \right);$$

$$\frac{\partial V_{x}}{\partial x} = 0.$$
(2)

Стоит отметить, что системы (1) и (2) являются переопределенными, так как в них число уравнений превосходит число неизвестных функций, в роли которых выступают компоненты вектора скорости, давление и температура. Разрешимость системы вида (1) и точные решения для нее обсуждались в [17, 21, 24–27, 33–35].



Рис. 1. Геометрия слоя

Из последнего уравнения системы (2) следует, что скорость жидкости зависит только от двух координат:

$$V_x = V_x(y, z). \tag{3}$$

Принимая во внимание соотношение (3), систему (2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = v \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g \beta T;$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$
(4)

при этом P = P(x, z).



Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

Далее будем рассматривать течения вязкой несжимаемой жидкости, у которых профиль скорости зависит только от одной (поперечной) координаты [35, 36]:

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures

$$V_x = U(z). \tag{5}$$

Формула (5) для течений жидкости при постоянной температуре описывает профиль Куэтта [37], а для конвективных течений – профиль Остроумова–Бириха [13–14].

Подстановка выражения (5) в систему (4) приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T;$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$
(6)

Кроме того, использование семейства решений (5) в силу системы (6) позволяет определить структуру решения для гидродинамических полей температуры T и давления P. Несложно убедиться, что поле давления и поле температуры оказываются линейными формами введенных выше координат:

$$T = T_0(z) + T_1(z)x; \ P = P_0(z) + P_1(z)x.$$
(7)

Подставляя соотношения (5) и (7) в систему (6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной z (дифференцирование по этой переменной обозначено штрихом):

$$T_1'' = 0; P_1' = g\beta T_1; vU'' = P_1;$$

$$\chi T_0'' = UT_1, P_0' = g\beta T_0.$$
(8)

Общее решение системы (8) имеет вид:

$$T_{1} = C_{1}z + C_{2}; P_{1} = \frac{1}{2}gz^{2}\beta C_{1} + gz\beta C_{2} + C_{3};$$

$$U = \frac{gz^{4}\beta C_{1}}{24\nu} + \frac{gz^{3}\beta C_{2}}{6\nu} + \frac{z^{2}C_{3}}{2\nu} + zC_{4} + C_{5};$$

$$T_{0} = \frac{1}{7}gz^{7}\beta C_{1}^{2} + gz^{6}\beta C_{1}C_{2} + z^{5}\left[\frac{6}{5}g\beta C_{2}^{2} + \frac{18}{5}C_{1}C_{3}\right] + 6z^{4}\left[C_{2}C_{3} + 2\nu C_{1}C_{4}\right] + 24z^{3}\nu\left(C_{2}C_{4} + C_{1}C_{5}\right) + 72z^{2}\nu C_{2}C_{5} + 144z\nu\chi C_{6} + C_{7};$$

$$P_{0} = \frac{g^{2}z^{8}\beta^{2}C_{1}^{2}}{8064\nu\chi} + \frac{g^{2}z^{7}\beta^{2}C_{1}C_{2}}{1008\nu\chi} + \frac{gz^{6}\beta\left[g\beta C_{2}^{2} + 3C_{1}C_{3}\right]}{720\nu\chi} + \frac{gz^{5}\beta\left[C_{2}C_{3} + 2\nu C_{1}C_{4}\right]}{120\nu\chi} + \frac{gz^{4}\beta\left(C_{2}C_{4} + C_{1}C_{5}\right)}{24\chi} + \frac{gz^{3}\beta C_{2}C_{5}}{6\chi} + \frac{1}{2}gz^{2}\beta C_{6} + gz\beta C_{7} + C_{8}.$$

$$(9)$$



ISSN 2410-9908

Будем полагать, что задана температура нагрева верхней границы z = h, а температура на нижней границе z = 0 принята за отсчетный уровень:

$$T(0) = 0; T(h) = Ax.$$
 (10)

Условия (10) в силу представления (7) равносильны следующим условиям:

$$T_0(0) = T_1(0) = 0; \ T_0(h) = 0; \ T_1(h) = A.$$
(11)

Также полагаем, что на нижней границе выполняется условие скольжения Навье [7], а на верхней – задано постоянное давление S_0 , соответствующее атмосферному давлению, и поле касательных напряжений, вызванное термокапиллярным эффектом [1]:

$$\alpha \frac{\partial V_x}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{z=0} = V_x(0); \ P(h) = S_0; \ \eta \frac{\partial V_x}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{z=h}.$$
 (12)

Здесь **n** – вектор нормали, направленный от нижней границы слоя жидкости внутрь слоя жидкости [7]. С помощью класса (5) и (7) граничные условия (12) записываются в виде:

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0} = U(0); \ P_0(h) = S_0; \ P_1(h) = 0; \ \eta \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=h} = -\sigma T_1(h).$$
(13)

Здесь σ и η– коэффициенты температурного поверхностного натяжения и динамической вязкости соответственно; α – длина проскальзывания.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Точное решение краевой задачи

Решение краевой задачи (8), (11), (13) является полиномиальным:

$$T_{1} = \frac{Az}{h}; P_{1} = \frac{Ag\beta}{2h} (z^{2} - h^{2});$$

$$U = A \left\{ \frac{g\beta}{24\nu h} \left[z^{4} - 6h^{2}z^{2} + 8h^{3}(z + \alpha) \right] - \frac{\sigma}{\eta} (z + \alpha) \right\};$$

$$T_{0} = A^{2} \left\{ \frac{\sigma}{12h\chi\eta} (h - z)z \left[h^{2} + (h + z)(z + 2\alpha) \right] + \frac{g\beta}{5040h^{2}\nu\chi} \left[5z^{7} - 63h^{2}z^{5} + 140h^{3}z^{4} + 280h^{3}z^{3}\alpha - 2h^{5}z(41h + 140\alpha) \right] \right\};$$

$$P_{0} = S_{0} - \frac{A^{2}g\beta\sigma}{120h\eta\chi} (z - h)^{2} (3h^{3} + 2hz(2z + 5\alpha) + z^{2}(2z + 5\alpha) + h^{2}(6z + 5\alpha)) + \frac{A^{2}g^{2}\beta^{2}}{40320h^{2}\nu\chi} (z - h)^{2} \left[183h^{6} - 69h^{2}z^{4} + 10hz^{5} + 5z^{6} + \frac{10}{2}h^{2} + 10hz^{5} + 5z^{6} + \frac{10}{2}h^{2} + 10hz^{5} + 5z^{6} + \frac{10}{2}h^{2} + \frac{10}{2}$$



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

 $+h^{4}z(221z+1120\alpha)+h^{5}(366z+560\alpha)+4h^{3}z^{2}(19z+140\alpha)].$

Легко видеть, что наименьшую степень имеет полином, описывающий свойства продольного градиента температуры T_1 , а наибольшую – полином, отвечающий фоновому давлению P_0 .

Заметим, что точное решение (14) обладает тем свойством, что нулевые точки всех компонент полей (за исключением фонового давления P_0) не зависят от величины значения горизонтального температурного градиента A. Влияние этого градиента на фоновое давление P_0 можно нивелировать произволом выбора значения S_0 .

Далее в статье будем обсуждать только поле скорости течения.

3.2. Исследование скорости течения в случае прилипания жидкости и граничного условия для проскальзывания жидкости

Проанализируем поле скорости, представляемое компонентой U. Очевидно, что в случае теплоизолированных границ (A = 0) жидкость будет находиться в покое относительной выбранной системы координатных осей. Если температурный градиент A отличен от нуля, то скорость U определяется нелинейным взаимодействием двух потоков – термогравитационного $\frac{Ag\beta}{24\nu h} \left[z^4 - 6h^2 z^2 + 8h^3 (z + \alpha) \right]$ и термокапиллярного $\frac{A\sigma}{\eta} (z + \alpha)$. Вклад каждого

потока зависит от величин коэффициентов $\frac{Ag\beta}{24\nu h}$ и $\frac{A\sigma}{\eta}$. Представим тогда выражение скорости (14) в следующем виде:

$$U = Ah \left\{ \frac{g\beta h^2}{24\nu} \left[Z^4 - 6Z^2 + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^2}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\}.$$
 (15)

В формуле (15) введены обозначения: $Z = \frac{z}{h} \in [0,1]$ – безразмерная координата, $a = \frac{\alpha}{l}$

; $\delta = \frac{h}{l}$; l – характерный горизонтальный размер рассматриваемого слоя жидкости.

Отметим, что полиномы $f_1 = Z^4 - 6Z^2 + 8Z$ и $f_2 = Z$ являются строго монотонными на отрезке [0,1] (рис. 2), линейно независимыми и принимают положительные значения на (0,1). Поэтому в виду неотрицательности параметра $\frac{a}{\delta}$ по отдельности ни термогравитационный, ни термокапиллярный потоки не могут привести к появлению застойной точки скорости U.

Заметим, что если a = 0, то условие Навье на нижней границе слоя вырождается в условие прилипания. В этом случае скорость (15) может иметь застойную (нулевую точку) только для ньютоновских жидкостей. Действительно, если жидкость аномальная ($\sigma < 0$), то коэффициент $-\frac{A\sigma}{\eta} > 0$, значит скорость U описывается суммой двух неотрицательных строго возрастающих функций, обращающихся в нуль только на нижней границе слоя жидкости. Сумма таких функций также будет неотрицательной строго возрастающей функцией,



ISSN 2410-9908

следовательно, всюду внутри слоя скорость U будет отлична от нуля, при этом ее направление будет определяться только знаком продольного градиента температуры A.



Рис. 2. Профили вспомогательных функций f₁ (сплошная линия) и f₂ (пунктирная линия)

Вернемся к случаю положительной безразмерной длины скольжения (a > 0). Если некоторая точка Z_1 является нулем многочлена (15) на отрезке [0,1], то выражение

$$0 = U(Z_{1}) = Ah\left\{\frac{g\beta h^{2}}{24\nu}\left[Z_{1}^{4} - 6Z_{1}^{2} + 8Z_{1}\right] - \frac{\sigma}{\eta}Z_{1} + \frac{a}{\delta}\left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta}\right)\right\}$$

можно рассматривать как однородное линейное уравнение относительно коэффициентов $\frac{g\beta h^2}{24\nu}$, $\frac{\sigma}{\eta}$ и $\frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^2}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right)$, которому должны удовлетворять параметры краевой задачи, чтобы скорость U обратилась в нуль в точке Z_1 . Если наряду с Z_1 на интервале (0,1) существуют еще нули полинома (15), то получим систему однородных линейных уравнений относительно тех же коэффициентов $\frac{g\beta h^2}{24\nu}$, $\frac{\sigma}{\eta}$ и $\frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^2}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right)$. Известно, что такая система имеет нетривиальное решение только если ранг ее матрицы меньше числа неизвестных системы, т.е. если число нулей полинома (15) меньше трех. Другими словами, полином вида (15) может иметь не более двух корней внутри отрезка [0,1].

Однако анализ свойств многочлена (9) с учетом условия a > 0 показал, что скорость *U* может иметь не более одной нулевой точки внутри слоя (рис. 3) при наложении потоков друг на друга. Именно эта точка является точкой стратификации поля скорости. Положение точки стратификации можно менять, варьируя значение длины проскальзывания α , геометрических параметров слоя (h, l) и физических параметров жидкости (β , ν и других).

При течении жидкости в ней возникает касательное напряжение

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial U}{\partial Z} = A \left\{ \frac{g\beta h^2}{6\nu} \left[Z^3 - 3Z + 2 \right] - \frac{\sigma}{\eta} \right\},$$
(16)



ISSN 2410-9908

которое также может один раз обратиться в нуль внутри слоя (рис. 4) при выполнении условия

 $(g\beta h^2\eta - 3\nu\sigma)\sigma > 0$.



Рис. 4. Профиль касательного напряжения τ_{xz}

Тип напряжения на верхней границе зависит от знака продольного градиента температуры A и знака температурного коэффициента поверхностного натяжения σ . При этом величина касательного напряжения τ_{xz} (16) не зависит от безразмерной длины скольжения a, так как этот параметр входит в выражение для скорости U (15) в виде аддитивного однородного слагаемого.

Заметим, что в случае прилипания жидкости или граничного условия для проскальзывания жидкости расход жидкости в рассматриваемом слое в общем случае будет ненулевым:

$$Q = \int_{0}^{h} U(z) dz = h \int_{0}^{1} U(Z) dZ = A h^{2} \int_{0}^{1} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \right\} dZ = h^{2} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{g\beta h^{2}}{24\nu} \left[Z^{4} - 6Z^{2} + 8Z \right] - \frac{\sigma}{\eta} Z + \frac{a}{\delta} \left[\frac{g\beta h^{2}}{24\nu} - \frac{\sigma}{\eta} \right] \right\} dZ$$



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

$$=Ah^{2}\left[\frac{g\beta h^{2}}{24\nu}\left(\frac{1}{5}Z^{5}-\frac{6}{3}Z^{3}+\frac{8}{2}Z^{2}\right)-\frac{\sigma}{2\eta}Z^{2}+\frac{a}{\delta}\left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu}-\frac{\sigma}{\eta}\right)Z\right]_{0}^{1}=$$
$$=Ah^{2}\left[\frac{11g\beta h^{2}}{120\nu}-\frac{\sigma}{2\eta}+\frac{a}{\delta}\left(\frac{g\beta h^{2}}{24\nu}-\frac{\sigma}{\eta}\right)\right].$$

Заметим, что с учетом соотношения $v = \frac{\eta}{\rho}$, если справедливо равенство

$$h^2 \frac{11h + 5\alpha}{h + 2\alpha} = \frac{60\sigma}{g\beta\rho},$$

связывающее геометрические параметры, характеризующие область течения и граничные условия, и физические параметры жидкости, то расход жидкости Q для скольжения будет нулевым.

3.3. Исследование скорости течения в случае идеального скольжения

Условие Навье при бесконечном значении параметра α сводится к условию идеального скольжения. Если подставить $\alpha = \infty$ в приведенное выше точное решение (14), то получим, что все гидродинамические поля становятся бесконечными в любой точке исследуемого слоя. Все дело в том, что в предельном случае $\alpha = \infty$ меняется тип некоторых граничных условий, а именно, краевое условие третьего рода

$$\left. \alpha \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = U(0)$$

преобразуется к условию второго рода

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=0\,,$$

которое естественным образом следует из условия Навье (12) при $\alpha \to \infty$. В этом случае для получения частного решения необходимо апеллировать к общему решению (9) системы дифференциальных уравнений (8).

Подставим граничные условия (11) в точное решение (9) для продольного градиента температуры T_1 и получим:

$$0 = T_1(0) = C_1 \cdot 0 + C_2; A = T_1(h) = C_1 \cdot h + C_2.$$

Из этой системы условий легко находим значения неизвестных констант: $C_2 = 0$; $C_1 = A/h$. Далее используем граничные условия для градиента давления P_1 :

$$0 = P_1(h) = \frac{1}{2}g\beta h^2 \cdot \frac{A}{h} + g\beta h \cdot 0 + C_3,$$



ISSN 2410-9908

откуда следует, что $C_3 = -Ag\beta h/2$. Наконец, находим значения констант интегрирования в общем решении (9) для скорости U:

$$\begin{split} 0 &= \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0} = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g\beta z^4 C_1}{24\nu} + \frac{g\beta z^3 C_2}{6\nu} + \frac{z^2 C_3}{2\nu} + zC_4 + C_5\right)\right]\Big|_{z=0} = \\ &= \left[\frac{4g\beta z^3}{24\nu} \cdot \frac{A}{h} + \frac{3g\beta z^3}{6\nu} \cdot 0 - \frac{2z^2}{2\nu} \cdot \frac{Ag\beta h}{2} + C_4\right]\Big|_{z=0} = C_4 \,. \end{split}$$

А значит, выражение для определения скорости U примет вид:

$$U(z) = \frac{Ag\beta}{24\nu h} \left[z^4 - 6h^2 z^2 \right] + C_5 = \frac{Ag\beta h^3}{24\nu} \left[Z^4 - 6Z^2 \right] + C_5.$$
(17)

Для определения константы C₅ в выражении (17) необходимо использовать дополнительное условие. Мы будем брать условие нулевого расхода жидкости:

$$\int_{0}^{1} U dZ = 0,$$
 (18)

позволяющее асимптотически описывать течение в замкнутом слое. Учет условия (18) в решении (17) позволяет получить окончательный вид скорости U:

$$U = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} f_3(Z) = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} \Big[5Z^4 - 30Z^2 + 9 \Big].$$
(19)

График вспомогательной функции $f_3(Z)$ приведен на рис. 5.



Рис. 5. График функции $f_3(Z)$



http://dream-journal.org

Рис. 5 иллюстрирует, что скорость U, определяемая выражением (19) имеет только одну нулевую точку, положение которой никак не зависит от значений параметров, задаваемых на границах слоя жидкости.

Однако следует помнить, что решение (19) должно удовлетворять еще и условию существования термокапиллярного эффекта:

$$\left.\eta\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=h}=-\sigma T_1(h).$$

Это равносильно следующему условию:

$$-\sigma A = \eta \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=h} = \eta \left[\frac{4g\beta z^3}{24\nu} \cdot \frac{A}{h} + \frac{3g\beta z^2}{6\nu} \cdot 0 - \frac{2z}{2\nu} \cdot \frac{Ag\beta h}{2}\right]\Big|_{z=h} = \\ = \eta \left(\frac{Ag\beta h^2}{6\nu} - \frac{Ag\beta h^2}{2\nu}\right) = -\frac{Ag\beta h^2\eta}{3\nu}.$$

Удовлетворение равенства

$$g\beta h^2\eta - 3\nu\sigma = 0 \tag{20}$$

обеспечивает непротиворечивость граничных условий, т.е. существование термокапиллярного эффекта на верхней границе при учете условия идеального скольжения на нижней границе исследуемого слоя жидкости.

Величина соответствующего касательного напряжения τ_{xz} в случае идеального скольжения может быть найдена по следующей формуле:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Ag\beta h^3}{120\nu} \left[5Z^4 - 30Z^2 + 9 \right] \right) =$$

$$= \frac{Ag\beta h^2 \eta}{6\nu} Z \left(Z^2 - 3 \right).$$
(21)

Из выражения (21) легко видеть, что в отличие от случая $\alpha \in [0,\infty)$ напряжение τ_{xz} всюду в слое сохраняет знак. Тип напряжения (растягивающее или сжимающее) определяется знаком продольного градиента температуры A.

Посчитаем также, как это было проделано для случая выполнения условия проскальзывания, расход жидкости. Несложно убедиться, что в случае идеального скольжения он будет равен нулю:

$$Q = h \int_{0}^{1} U(Z) dZ = \frac{Ag\beta h^{4}}{120\nu} \left[Z^{5} - 10Z^{3} + 9Z \right]_{0}^{1} = \frac{Ag\beta h^{4}}{120\nu} \cdot \left[1 - 10 + 9 \right] = 0,$$

что согласуется с условием (19), выбранным для определения необходимых констант в точном решении для поля скорости.


4. Заключение

В статье получено новое точное решение, описывающее влияние термокапиллярного эффекта и условия проскальзывания на однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости. Внимание в статье уделено анализу свойств поля скоростей течения. Показано, что полученное решение способно описывать возникновение стратификаций, при чем независимо от величины длины проскальзывания, скорость может иметь не более одной нулевой точки. Также было показано, что величина длины проскальзывания влияет на число нулевых точек компонент поля касательных напряжений.

Литература

1. Marangoni C. Sull espansione delle goccie di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid. – Pavia : Tipografia dei fratelli Fusi, 1865.

 Goldstein S. V. Modern Developments in Fluid Mechanics. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1938.

3. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Т.2. Движение жидкостей с трением и технические приложения. – М.–Л. : ОНТИ, 1935. – 283 с.

4. Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р. Структура течения вязкопластичной жидкости при заполнении круглой трубы плоского канала // Вычисл. мех. сплошн. сред. – 2019. – Т. 12, вып. 2. – С. 129–136. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.11.

5. Neto C., Evans D., Bonaccurso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68, no. 12 – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.

6. Течение вязкопластических нелинейных сред с пограничным проскальзыванием / В. В. Пеленко, В. А. Арет, Б. К. Гусев, Φ. В. Пеленко // Вестн. Красноярск. гос. аграрн. ун-та : межвуз. сб. науч. тр. – 2008. – № 2. – С. 54–57.

7. Navier C. L. M. H. M'emoire sur les lois du mouvement des fluides // M'em. Acad. Sci. Inst. de France. – 1823. – Vol. 2, no. 6. – P. 389–440.

8. Lauga E., Brenner M., Stone H. Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition // Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics / ed by C. Tropea, A. L. Yarin, J. F. Foss. – Berlin, Heidelberg : Springer Handbooks, 2007.

9. Hoffmann J., Johnson C. Computational Turbulent Incompressible Flow. – Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 2007. – 397 p.

10. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2014. – Т. 2, вып. 28. – С. 35–44.

11. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычисл. мех. сплошн. сред. – 2019. – Т. 12, вып. 2. – С. 230–242. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.

12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 532 с.

13. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М. : Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1952.

14. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости / Р. В. Бирих // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 3. – С. 69–72.

15. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. – 1989 – №. 2 – С. 34–40.

16. Mathematical Models of Convection / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin-Boston : De Gryuter Publ., 2012. – xv+ + 417 p.



17. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теор. осн. хим. технолог. – 2016. – Т. 50, вып. 3. – Р. 294. – DOI: 10.7868/S0040357116030027.

18. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of largescale eddies in shallow water // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1991. – Vol. 32, no. 2. – P. 189–194. – DOI: 10.1007/BF00858033.

19. Ингель Л. Х., Аристов С. Н. Класс точных решений нелинейных задач о термических циркуляциях, связанных с объемным тепловыделением в атмосфере // Тр. ин-та эксперим. метеорол. – 1991. – Вып. 27 (162). – С. 142–157.

20. Пухначев В. В. Нестационарные аналогии решения Бириха // Известия АлтГУ. – 2011. – Вып. 69 (1/2). – С. 62–69.

21. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелин. динам. – 2013. – Т. 9, вып. 4. – С. 651–657. – DOI: 10.20537/nd1304004.

22. Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения // Красноярск : Ин-т вычисл. мех. СО РАН, препринт №. 1–10, 2010. – 68 с.

23. Pukhnachev V. V. Group-theoretical methods in the convection problems // In: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, edited by M. D. Todorov and C. I. Christov. – 2011. – American Institute of Physics, CP 1404, Melwille, NY. – P. 31–42

24. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, вып. 2. – С. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670

25. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная конвекция Бенара-Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // Теор. основы хим. технолог. – 2016. – Т. 50, вып. 2. – С. 137–146. – DOI: 10.7868/S0040357116020019.

26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 1. – P. 6–42. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.1.006-042. – URL: http://dream-journal.org/DREAM_Issue_1_2019_Burmasheva_N.V._et_al._006_042.pdf

27. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана // Комп. исслед. моделир. – 2016. – Т. 8, вып. 6. – С. 927–940.

28. Гончарова О. Н., Кабов О. А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 54, вып. 5. – С. 183–188.

29. Бекежанова В. Б. Конвективная неустойчивость течения Марангони–Пуазейля при наличии продольного градиента температуры // Прикл. мех. техн. физ. – 2011. – Т. 52, вып. 1. – С. 92–100.

30. Гордеева В. Ю., Люшнин А. В. Влияние термокапиллярного эффекта на динамику и устойчивость движения испаряющейся тонкой пленки // Журн. техн. физ. – 2013. – Т. 83, вып. 3. – С. 41–47.

31. Актершев С. П. Термокапиллярный эффект и периодические структуры на поверхности нагреваемой пленки вязкой жидкости // Тр. инст. мех. УНЦ РАН. – 2007. – Т. 5, вып. 1. – С. 79–84. – DOI: 10.21662/uim2007.1.005.

32. Справочник по теплообменникам : в 2 т. / пер. с англ. под ред. Б. С. Петухова, В. К. Шикова. – М. : Энергоатомиздат, 1987.

33. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, no. 5. – P. 581–587. – DOI: 10.1134/S001546281605001X.

Burmasheva N. V. and Prosviryakov E. Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 23–39. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039.



34. Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теор. осн. хим. техн. – 2019. – Т. 53, вып. 1. – С. 112–120. – DOI: 10.1134/S0040357118060118.

35. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2017. – Т. 21, вып. 1. – С. 180–196. – DOI: 10.14498/vsgtu1527.

36. Knutova N. S., Shvarts K. G. A study of behavior and stability of an advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity // Fluid Dyn. – 2015. – Vol. 50, no. 3. – P. 340–350. – DOI: 10.1134/S0015462815030047.

37. Couette M. Études sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. Ser. 6. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 16.10.2018 Revised: 26.08.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.040-047

DESIGN AND PROCESS DESCRIPTION OF WELDED JOINTS IN GENERAL-PURPOSE STRUCTURAL STEELS

Z. G. Kornilova^{a)} and G. S. Ammosov^{b)*}

V. P. Larionov Institute of Physical-Technical Problems of the North, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Oktyabrskaya St., Yakutsk, 677980, Russian Federation

^{a)} **(b)** https://orcid.org/0000-0001-8516-3076 **(a)** zoya_korn@mail.ru; ^{b)} **(b)** https://orcid.org/0000-0002-1098-6024 **(a)** ammosov.g@mail.ru

*Corresponding author: E-mail: ammosov.g@mail.ru Address for correspondence: ul. Oktyabrskaya, 1, Yakutsk, 677980, Russian Federation Tel.: +7 (4112) 39 05 87; 8 914 226 89 91

Ensuring the durability and longevity of welded joints in metallic structures is an important problem of life support, especially in the conditions of the North. Welded joints are the crucial areas reducing resistance to brittle failure, and heat-affected zones (HAZ) are their weakest sites in terms of cold resistance. Thermokinetic diagrams and diagrams of anisothermal decay of austenite (ADA) are used for the determination of the structure composition and mechanical characteristics of the HAZ metal in the welding of many structural steels for various purposes. To choose optimum rates of cooling by preheating of products to be welded, the structure composition and mechanical characteristics of the HAZ metal, we use a carbon equivalent C_e. Besides, in terms of the effect of design and process factors on the formation of welded joints, the paper shows the necessity of controlling welding consumables when welding general-purpose steels.

Keywords: welded joint, brittle failure, defect, crack, heat-affected zone, deposit rate factor, heat input.

References

1. Antonov A.A, Yakovlev Yu.A., Ammosov A.P. Estimation of the corrosion damageability of the metal of a steam pipeline that has worked its design life. In: *Welding and Safety*: Materials of the Scientific Research and Production Association, October 11–12, 2012, vol. 1. Yakutsk, Offset Publ., 2012, pp. 264–66. (In Russian).

2. Andriyashin V.A., Kostyuchenko A.A., Komarov A.I., Vorob'ev V.V., Andriyashin V.A. Long-Term Inside Corrosion Attack of an Oil Main Operation. *Protection of Metals*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 46–50. DOI: 10.1134/S0033173206010085.

3. Ammosov A.P., Ammosov G.S., Aminov T.Sh., Ilin G.Yu., Antonov A.A. Corrosive damageability of the reservoir welded joints. *Svarochnoe Proizvodstvo*, 2008, no. 7, pp. 24–28. (In Russian).

4. Vasiliev V.G., Dovzhenko V.A., Malevsky Yu.B. Residual austenite in welded joints of low-carbon low-alloy structural steels. *Avtomaticheskaya Svarka*, 1978, no. 8, pp. 5–8. (In Russian).

5. Seyffarth P., Kuscher G. *Schweiss-ZTV-Schaubilder*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1982.

6. *Marochnik staley i splavov* [Register of Steels and Alloys, ed. by A.S. Zubchenko]. Moscow, "Mashinoctroenie" Publ., 2001. (In Russian).

Kornilova Z. G. and Ammosov G. S. Design and process description of welded joints in general-purpose structural steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 40–47. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.040-047.



7. Ammosov A.P., Kornilova Z.G. Controlling the consumption of welding consumables in welding low-alloy pipe steels. *Welding production*, 2006, vol. 20, iss. 8, pp. 665–668. DOI: 10.1533/wint.2006.3673.

8. Zakharova I.V., Chichkarev E.A., Vasiliev V.G., Trotsan A.I., Dejneka A.Ya., and Kiryukhin O.S. Structure and properties of HAZ metal of low-alloyed pipe steels modified with calcium. *The Paton Welding Journal*, 2001, no. 8, pp. 14–17. (In Russian).

9. Ammosov A.P., Kornilov Z.G. Consumption of electrodes in manual arc welding of metal structures. *Welding International*, 2004, vol. 18, iss. 6, pp. 478–479. DOI: 10.1533/wint.2004.3306.

10. Panashchenko N.I., Masur A.A., Parnau A.K., Beynish A.M. The methods of calculating the consumption of coated electrodes and electric energy in the manufacture of welded structures. *Avt. Svarka*, 1995, no. 8, pp. 39–46. (In Russian).

11. Fedotova M.A., Larionov V.P. et al. *Structural Transformations and Properties of Materials in Welding*. YaNTs SO AN SSSR, Yakutsk, 1991, 25 p. (In Russian).

12. Tararychkin I.A. Optimisation of the shape of edge preparation in narrow-gap arc welding Optimization of a form of cutting of edges at arc welding in a narrow gap. *Svar. Proiz.*, 2001, no. 10, pp. 21–23. (In Russian).



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 16.10.2018 УДК (621.791:669.14):624.014 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.040-047

http://dream-journal.org

КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОФОРМЛЕНИЕ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ МАССОВОГО НАЗНАЧЕНИЯ

3. Г. Корнилова^{а)}, Г. С. Аммосов^{б)*}

Институт физико-технических проблем Севера им. В.П. Ларионова СО РАН, д. 1, ул. Октябрьская, г. Якутск, Российская Федерация

^{a)} b https://orcid.org/0000-0001-8516-3076 s zoya_korn@mail.ru; ^{b)} b https://orcid.org/0000-0002-1098-6024 ammosov.g@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: ammosov.g@mail.ru Адрес для переписки: ул. Октябрьская, д. 1, 677980, г. Якутск, Российская Федерация Тел.: +7 (4112) 39–05–87; 8–914–226–89–91

Обеспечение прочности и долговечности сварных соединений металлоконструкций является одной из важных задач жизнеобеспечения, особенно в условиях Севера. Ответственными участками, снижающими сопротивляемость хрупкому разрушению, являются сварные соединения, а наиболее слабыми местами сварных соединений с позиции хладостойкости – зона термического влияния (ЗТВ). Термокинетические диаграммы, диаграммы анизотермического распада аустенита (АРА) используются для определения состава структуры и механических свойств в металле ЗТВ при сварке многих конструкционных сталей различного назначения. Для выбора оптимальных скоростей охлаждения предварительным подогревом свариваемых изделий, состава структуры и механических свойств в металле ЗТВ используются эквивалент углерода C_3 . Также в работе показана необходимость регулирования расхода сварочных материалов при сварке сталей массового назначения с позиции влияния конструктивно-технологических факторов на процессы формирования сварных швов.

Ключевые слова: сварные соединения, хрупкие разрушения, дефекты, трещина, зона термического влияния, коэффициент наплавки, погонная энергия.

1. Введение

Одним из распространенных факторов обеспечения надежности сварных металлоконструкций, элементов горной техники и линейных сооружений, эксплуатирующихся в условиях Крайнего Севера, является минимизация возникновения хрупких разрушений.

При хрупких разрушениях различных сооружений судов, напорных труб, высотных сооружений, емкостей и резервуаров для хранения нефти, нефтепродуктов и газа, сосудов высокого давления, трубопроводных систем, мостовых переходов через малые и крупные реки и т. д. наиболее часто очагами возникновения и распространения трещин являются сварные соединения, являющиеся конструктивно неоднородными участками и формирующиеся при монтаже многих крупноразмерных металлоконструкций, элементов техники, а также протяженных линейных сооружений.

Во многих случаях основными очагами возникновения трещин служат различные технологические и эксплуатационные микро- и макро- дефекты – непровары, подрезы, скопления пор, шлаковые включения, риски, трещины и другие дефекты. Возникновению разрушения способствуют низкие температуры, высокий уровень остаточных напряжений (OH) в зонах шва (ЗШ), наличие дефектов (трещин) в сварных соединениях, связанных с технологией сварки и накоплением усталости.



Особенность металлических конструкций состоит в том, что наступление предельного состояния и разрушения хотя бы одного конструктивного элемента вызывает аварию всего сложного сооружения.

Характерным является и тот факт, что для многих металлоконструкций и линейных сооружений частота разрушений повышается при начальной стадии эксплуатации и при приближении к проектным срокам их эксплуатации. Такая статистика объясняется тем, что разрушения в начальной стадии эксплуатации ответственных объектов, скорее всего, связаны с некоторыми технологическими упущениями при строительстве и проектировании сооружений, а на конечной стадии эксплуатации увеличение частоты разрушений объясняется накоплением эксплуатационных и коррозионных повреждений.

Цель исследования – изучение конструктивно-технологических факторов на процессы формирования сварных швов.

2. Материал и методика

Одна из особенностей коррозионных повреждений – наиболее интенсивное протекание коррозионных повреждений в металле зоны термического влияния (ЗТВ) сварных соединений паропроводов, магистральных и технологических нефтепроводов, резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов [1, 2, 3]. Измерение коррозионного износа проводилось методом ультразвуковой толщинометрии с применением ультразвукового толщиномера «Булат 1м» по нормативно технической документации для каждого объекта.

Возникновение сквозных трещин во многих случаях связано с увеличением размера пор, раковин и подрезов, обнаруженных методом визуально-измерительного контроля нормируемым РД 03-606-03, в результате развития коррозионных повреждений под напряжением (рис. 1). Постепенно из скоплений пор и включений вырастают несквозные свищи и при дальнейшей эксплуатации резервуара в таких местах сварного соединения возникают поверхностные или сквозные трещины в результате слияния свищей.



Рис. 1. Глубина дефектов сварного соединения уторного узла резервуара из стали ВСт3сп от срока эксплуатации: *a* – раковины; *б* – подрезы

В качестве примера приведем разрушение днища резервуара по монтажным швам (рис. 2 *a*) длиной 665 мм и более. Аналогичное возникновение трещины произошло в кратере (рис. 2 *б*). Возникновение таких трещин в сварных соединениях листов днища резервуаров обусловлено низким качеством сварных швов, климатическими условиями Севера, особенностями промерзания и протаивания грунтов оснований резервуаров и другими технологическими и конструктивными недоработками, а также накоплением коррозионных повреждений.

Kornilova Z. G. and Ammosov G. S. Design and process description of welded joints in general-purpose structural steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 40–47. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.040-047.



ISSN 2410-9908



а



Рис. 2. Трещины в монтажном шве листов днища (a) и в перекрестиях швов днища (δ)

При этом размеры большинства сварных соединений соответствуют или превышают требования ГОСТ 5264-80, ГОСТ 14771-76. Здесь, на наш взгляд, высокой коррозионной повреждаемости способствуют наличие остаточных сварочных напряжений, конструктивно-технологических концентраторов, а также возникших в процессе сварки допустимых технологических дефектов, таких как непровары, поры, шлаковые включения, микротрещины, которые вследствие эксплуатации развиваются под воздействием коррозионно-агрессивных сред.

В таких соединениях твердость металла ЗТВ бывает ниже твердости основного металла. Это, скорее всего, связано с тем, что сварка производится при высоких погонных энергиях и в единицу длины шва наплавляется большое количество электродного металла.

Известно, что наиболее распространенным подходом определения состава структуры и механических свойств в металле ЗТВ при сварке многих конструкционных сталей различного назначения являются термокинетические диаграммы, а также диаграммы анизотермического распада аустенита (APA), полученные в лабораторных условиях на специальных скоростных дилатометрах имитацией термических циклов сварки малоразмерных образцов. Для выбора оптимальных скоростей охлаждения предварительным подогревом свариваемых изделий, состава структуры и механических свойств в металле ЗТВ, используется эквивалент углерода C_3 , вычисляемый по химическому составу свариваемых сталей. Для сталей большинства марок построены термокинетические диаграммы или диаграммы АРА и определены допустимые скорости охлаждения металла в ЗТВ, обеспечивающие оптимальные структуры и механические свойства (4–6).

По оптимизации конструктивно-технологического оформления сварных швов ответственных сооружений, эксплуатирующихся в сложных природно-климатических условиях, проводятся систематические работы.

Наиболее применяемым технологическим процессом ремонтно-восстановительных работ локальных повреждений резервуаров является сварка. С учетом этого после завершения натурных обследований и технической диагностики резервуаров в зависимости от степени и места локальной коррозионной поврежденности их элементов разрабатывается технологическая карта ремонтно-восстановительных работ, где предусматривается тщательная зачистка, подготовка разделки кромок и конструктивно-технологическое оформление ремонтных сварных швов и облицовочных наплавок. При этом учитываются выбор и расход сварочных материалов, режимы сварки и наплавки. Нормирование расхода сварочных материалов, режимы сварки и наплавки. В работе [7] рассмотрена возможность регулирования расхода сварочных материалов на основе определения площади поперечного сечения шва при сварке низколегированных сталей 13Г1СУ, 09Г2ФБ, 10Г2ФБ, модифицированных кальцием. С использованием данных работы [8]



полученные результаты приведены в сравнении с нормативными требованиями стандартов к поперечному сечению наплавленного с учетом формы разделки кромок свариваемых изделий. В таблице приведены полученные расчетные данные и нормативные значения поперечных сечений сварных швов (*S_i*) при различных видах сварки.

Технологический процесс	Толщина пластины б, мм	Тип шва	ГОСТ	Площадь поперечного сечения шва <i>S_i</i> , мм ²
Автоматическая сварка сплошной проволокой под флюсом (АСФ)	12,0 20,0	С10-Аф или С10-Ам С15-Апк	8713–70	85,76 274,6
Механизированная сварка в углекислом газе (MC)	12,0 20,0	С17-УП	14771– 69	63,03 ^{***} 159,32 ^{***}
Ручная дуговая сварка (РДС)	12,0 20,0	C15*	5264–69	86,228** 232,673**
*~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~				

Значения площади поперечных сечений сварных швов с учетом видов сварки

*Соответствует С17 по ГОСТ 5264-80

**Соответствует предельным размерам по ГОСТ 5264 – 80 п.16

***Соответствует С17-УП по ГОСТ 14771 – 76

Изменение количества наплавленного металла в шве, в частности его поперечное сечение *S_i*, рассчитанное в [9]:

$$S_i = \frac{a_n q_{\Pi}}{\eta U \gamma},\tag{1}$$

где: a_n – коэффициент наплавки; q_{Π} – погонная энергия, кДж/см; η – эффективный коэффициент передачи тепла; U – напряжение дуги, В; γ – плотность металла шва.



Рис. 3. Зависимость поперечного сечения наплавленного металла от погонной энергии сварки при U = 22 D, a_n , равном 9,5 (1) и 15 (2) г/(А·ч), и U = 22 B; a_n , равном 9,5 (3) и 15 (4) г/(А·ч)

Kornilova Z. G. and Ammosov G. S. Design and process description of welded joints in general-purpose structural steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 40–47. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.040-047.

ISSN 2410-9908

При $q_{\Pi} = 8,9 \div 39,2$ кДж/см; a_{μ} (коэффициент наплавки), равном 9,5 и 15 г/(А·ч); U, равном 22 и 24 В; $\gamma = 7,85$ г/см³ представлено на рис. 3. Увеличение погонной энергии сварки и коэффициента наплавки повышает площадь поперечного сечения наплавленного металла, повышение напряжения дуги снижает ее.

Сопоставление расчетных данных (рис. 3) и нормативных требований показывает, что при $\delta = 12$ мм и $a_n = 9,5$ г/(А·ч) полное заполнение шва при АСФ и РДС за один проход не достигается. Количество проходов определяется погонной энергией сварки q_{Π} . Например, при МС в углекислом газе полное заполнение шва за один проход достигается при значениях a_n , равных 15,0 и 9,5 г/(А·ч), $\delta = 12$ мм и погонной энергии 1980–2160 и 3120–3500 кДж/см соответственно.

Связывая погонную энергию сварки q_{Π} со скоростью охлаждения $W_{6/5}$ получаем (2) из [9]

$$S_i = \frac{a_{_{H}}k_1}{W_{_{6/5}}U\gamma\eta},\tag{2}$$

где: a_{μ} – коэффициент наплавки; k_1 – коэффициент, зависящий от начальной температуры и толщины (размера) свариваемого изделия; U – напряжение дуги, В; γ – плотность металла шва; $W_{6/5}$ – скорость охлаждения, °С/с; η – эффективный коэффициент передачи тепла.

3. Результаты и обсуждение

Установили, что площадь сечения наплавленного металла шва за проход и скорость охлаждения являются взаимозависимыми величинами. Диапазон рекомендуемых оптимальных скоростей охлаждения для каждой стали различен, а для допустимых площадей наплавленного металла за проход его можно выбрать исходя из обеспечиваемых физикомеханических свойств металла перегрева.

Таким образом, допустимые размеры разделок кромок свариваемых изделий и методы расчета расхода, покрытых электродов [9] могут быть скорректированы в определенных пределах при выборе технологии сварки с учетом термодеформационного цикла сварки. Прочностные характеристики зоны перегрева сварного соединения получаются оптимальными, что позволяет значительно продлить остаточный ресурс сварных конструкций, проработавших на Севере в течение 30 и более лет. Это подтверждается результатами исследований [11] и технологией сварки различных сталей в узкую разделку или без разделки кромок [12].

4. Заключение

Следовательно, на основе изучения и анализа закономерностей термокинетических процессов в углеродистых и низколегированных сталях при сварке, особенностей формирования структуры в металле ЗТВ сварного соединения, существующих допусков в нормативных документах обоснована необходимость регулирования расхода сварочных материалов при сварке сталей массового назначения с позиции влияния конструктивно-технологических факторов на процессы формирования сварных швов. Обобщение физико-химических и технологических процессов наплавки в разделку при электродуговой сварке позволило выработать расчетные зависимости, связывающие количество наплавленного металла в шов с погонной энергией, скоростью охлаждения металла ЗТВ, коэффициентом наплавки, толщиной и начальной температурой свариваемого изделия, а также количеством проходов [9]. Эти научнообоснованные, производственно-направленные результаты непосредственно исполь-



зуются для разработки технологии ремонтно-восстановительной сварки, а также технологии монтажной сварки при строительстве ответственных крупноразмерных металлоконструкций и линейных сооружений, работающих в экстремальных условиях Севера.

Литература

1. Антонов А. А., Яковлев Ю. А., Аммосов А. П. Оценка коррозионной повреждаемости металла паропровода, отработавшего расчетный срок эксплуатации // «Сварка и безопасность», 11–12 октября 2012, Якутск. Том 1 : материалы ВРНПК. – Якутск : ООО РИЦ «Офсет», 2012. – С. 264–266.

2. Long-Term Inside Corrosion Attack of an Oil Main Operation / V. A. Andriyashin, A. A. Kostyuchenko, A. I. Komarov, V. V. Vorob'ev, V. A. Andriyashin // Protection of Metals. – 2006. – Vol. 42, no. 1. – P. 46–50. – DOI: 10.1134/S0033173206010085.

3. Коррозионная поврежденность сварных соединений резервуаров / А. П. Аммосов, Г. С. Аммосов, Т. Ш. Аминов, Г. Ю. Ильин, А. А. Антонов // Сварочное производство. – 2008. – № 7. – С. 24–28.

4. Васильев В. Г., Довженко В. А., Малевский Ю. Б. Остаточный аустенит в сварных соединениях низкоуглеродистых низколегированных конструкционных сталей // Автоматическая сварка. – 1978. – № 8. – С. 5–8.

5. Seyffarth P., Kuscher G. Schweiss-ZTV-Schaubilder. – Berlin : VEB Verlag Technik, 1982. – 236 p.

6. Марочник сталей и сплавов / под ред. А. С. Зубченко. – М. : Машиностроение, 2001. – 672 с.

7. Ammosov A. P., Kornilova Z. G. Controlling the consumption of welding consumables in welding low-alloy pipe steels // Welding production. – 2006. – Vol. 20, iss. 8. – P. 665–668. – DOI: 10.1533/wint.2006.3673.

8. Zakharova I. V., Chichkarev E. A., Vasiliev V. G., Trotsan A. I., Dejneka A. Ya., and Kiryukhin O. S. Structure and properties of HAZ metal of low-alloyed pipe steels modified with calcium // The Paton Welding Journal. – 2001. – No. 8. – P. 14–17.

9. Ammosov A. P., Kornilov Z. G. Consumption of electrodes in manual arc welding of metal structures // Welding International. – 2004. – Vol. 18, iss. 6. – P. 478–479. – DOI: 10.1533/wint.2004.3306.

10. Методы расчета расхода покрытых электродов и электроэнергии при изготовлении сварных конструкций / Н. И. Панащенко, А. А. Мазур, А. К. Парнау, А. М. Бейниш // Автоматическая сварка. – 1995. – № 10. – С. 39–47.

11. Структурные превращения и свойства материалов при сварке / М. А. Федотова, А. П. Аммосов, В. П. Ларионов, П. И. Зайффарт, Х.-Г. Гросс, Л. Фишер, Л. Мраз // Якутск : ЯНЦ СО АН СССР, препринт, 1991. – 25 с.

12. Тарарычкин И. А. Оптимизация формы разделки кромок при дуговой сварке в узкий зазор // Сварочное производство. – 2001. – № 10. – С. 21–23.





ISSN 2410-9908

Received: 02.09.2019 Revised: 23.10.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059

http://dream-journal.org

EFFECT OF $\gamma \rightarrow \epsilon$ MARTENSITIC TRANSFORMATION ON THE TRIBOLOGICAL PROPERTIES OF CHROMIUM–MANGANESE AUSTENITIC STEELS

L. G. Korshunov^{a)*} and N. L. Chernenko^{b)}

M. N. Miheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 18 S. Kovalevskoi St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation

a) (b) https://orcid.org/0000-0002-1829-5658 (c) korshunov@imp.uran.ru; b) (b) https://orcid.org/0000-0002-5666-3247 (c) chernenko@imp.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: korshunov@imp.uran.ru Address for correspondence: 18 S. Kovalevskoi St., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation Tel.: +7 (343) 378 37 38; fax: +7 (343) 374 52 44

The paper studies the effect of ε (hcp) martensite on the structure and tribological properties of chromium-manganese metastable austenitic steels. The effect of TiC carbide particles on the friction coefficient and wear resistance of Cr–Mn austenitic steels is considered. Structural transformations occurring in the surface layers of the steel in the course of frictional processing are studied via methods of metallography, X-ray diffraction and electron microscopy analysis. It has been found that the formation of nanocrystalline hcp martensite in the steels under study decreases considerably their friction coefficient and increases their resistance to adhesive wear in comparison with the cases of the 40Kh25N20 stable austenitic stainless steel and the 12Kh18N9 austenitic stainless steel, the latter being metastable to $\gamma \rightarrow \alpha$ martensitic transformation. The presence of 1–4.5 wt % of TiC carbide particles in the structure of the steels increases the friction coefficient of the materials and decreased their wear resistance. The ε phase in chromium-manganese austenitic steels is more capable of strain-induced hardening under friction than the ε phase in iron-manganese alloys. Accumulation of fine TiC particles of in the surface layer of the titanium-alloyed chromiummanganese austenitic steels has been detected.

Keywords: chromium-manganese metastable austenitic steels, friction effect, ϵ (hcp) martensite.

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment on the theme Structure, No. AAAA-A18-118020190116-6, and project 18-10-2-39 of the UB RAS Complex Program; we used the equipment installed at the Testing Center of Nanotechnologies and Advanced Materials collective use center affiliated to IMP UB RAS.

References

1. Korshunov L.G., Chernenko N.L. Structural transformatios during friction and the wear resistance of alloys of the Fe-Mn system containing ε-martensite. *Fizika Metallov i Metallovedenie*, 1987, vol. 63, no. 2, pp. 319–328. (In Russian).

2. Korshunov L.G. Structural transformatios during friction and the wear resistance of austenitic steel. *Fizika Metallov i Metallovedenie*, 1992, no. 8, pp. 3–21. (In Russian).

3. Buckley Donald H. *Surface Effects in Adhesion, Friction, Wear, and Lubrication*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.

4. Antony K.C. Wear-resistant cobalt-base alloys. *Journal of Metals*, 1983, vol. 35, no. 2, pp. 52–60. DOI: 10.1007/BF03338205.

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \epsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



5. Makarov A.V., Skorynina P.A., Volkova E.G., Osintseva A.L. Effect of Heating on the Structure, Phase Composition, and Micromechanical Properties of the Metastable Austenitic Steel Strengthened by Nanostructuring Frictional Treatment. *Physics of Metals and Metallography*, 2018, vol. 119, no. 12, pp. 1196–1203. DOI: 10.1134/S0015323018120112.

6. Saltykov S.A. *Stereometricheskaya metallografiya* [Stereometric Metallography]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1976, 271 p. (In Russian).

7. Moiseev V.F. The composition of steel and the percentage of carbide phase Steel composition and amount of carbide phase. *Metal Science and Heat Treatment*, 1970, vol. 12, no. 8, pp. 700–702. DOI: 10.1007/BF00654801.

8. Makarov A.V., Korshunov L.G., Osintseva A.L. Effect of tempering and friction heating on wear resistance of steel U8 hardened by laser. *Friction and Wear*, 1991, vol. 12, no. 5, pp. 870–878. (In Russian).

9. Bogachev I.N. and Egolaev V.F. Struktura i svoistva zhelezomargantsevykh splavov [The Structure and Properties of Ferrum-Manganese Alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1973, 295 p. (In Russian).

10. Korshunov L.G., Sagaradze V.V., Chernenko N.L., Pecherkina N.L., Kalinin G.Yu., Mushnikova S.Yu., Kharkov O.A. Structure and tribological properties of nitrogen-containing stainless austenitic steels. *Scientific and technical journal "Voprosy Materialovedeniya"*, 2012, no. 3 (71), pp. 136–145. (In Russian).

11. Korshunov L.G., Makarov A.V., Chernenko N.L. Nanocrystalline friction structures in steels and alloys, their mechanical and tribological properties. In: Razvitie idey akademika V.D. Sadovskogo [Developing the Ideas of Academician V.D. Sadovsky]. Ekaterinburg, Institute of Metal Physics, UB RAS Publ., 2008, 409 p. (In Russian).

12. Heilmann P., Clark W.A., Rigney D.A. Orientation determination of subsurfase cells generated by sliding. *Acta Metallurgica*, 1983, vol. 31, no. 8, pp. 1293–1305. DOI: 10.1016/0001-6160(83)90191-8.

13. Golego, N.L. Skhvatyvanie v mashinakh i metody ego ustraneniya [Grip in Machines and Methods of its Removal]. Kiev, Tekhnika Publ., 1965.

14. Korshunov L.G., Sagaradze V.V., Tereshhenko N.A., Chernenko N.L. Influence of epsilonmartensite on friction and wear off of high-manganese alloys. *Fizika Metallov i Metallovedenie*, 1983, vol. 55, no. 2, pp. 341–348. (In Russian).



Подана в журнал: 02.09.2019 УДК 669.15-194.56 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059

ВЛИЯНИЕ МАРТЕНСИТНОГО γ→ε-ПРЕВРАЩЕНИЯ НА ТРИБОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ХРОМОМАРГАНЦЕВЫХ АУСТЕНИТНЫХ СТАЛЕЙ

Л. Г. Коршунов^{а)*}, Н. Л. Черненко^{б)}

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, Российская Федерация

> a) thtps://orcid.org/0000-0002-1829-5658 korshunov@imp.uran.ru; 6) thtps://orcid.org/0000-0002-5666-3247 chernenko@imp.uran.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: korshunov@imp.uran.ru Адрес для переписки: ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 378 37 38; факс: +7 (343) 374 52 44

Изучено влияние є(ГПУ)-мартенсита на структуру и трибологические свойства хромомарганцевых метастабильных аустенитных сталей. Рассмотрено влияние карбидных частиц TiC на сопротивление изнашиванию и коэффициент трения хромомарганцевых аустенитных сталей. Методами металлографии, рентгеновского и электронно-микроскопического анализа изучены структурные превращения, происходящие в поверхностных слоях сталей при фрикционном воздействии. Установлено, что образование в исследуемых сталях нанокристаллического ГПУ-мартенсита обеспечивает им значительно меньший коэффициент трения и большее сопротивление адгезионному изнашиванию по сравнению с нержавеющими стабильной аустенитной сталью 40X25H20 и метастабильной к $\gamma \rightarrow \alpha$ -мартенситному превращению аустенитной сталью 12Х18Н9. Присутствие в структуре исследуемых сталей карбидных частиц TiC в количестве 1,0-4,5 об. % повышает коэффициент трения и снижает сопротивление изнашиванию данных материалов. Эпсилон-фаза хромомарганцевых аустенитных сталей обладает большей способностью к деформационному упрочнению при трении, чем є-фаза железомарганцевых сплавов. Обнаружено накопление дисперсных карбидных частиц TiC в поверхностном слое хромомарганцевых аустенитных сталей, легированных титаном.

Ключевые слова: хромомарганцевые метастабильные аустенитные стали, фрикционное воздействие, є(ГПУ)-мартенсит.

1. Введение

Показано ранее, что присутствие ε-мартенсита в структуре железомарганцевых сплавов с 15–36 мас. % марганца обусловливает значительное снижение коэффициента трения и интенсивности адгезионного изнашивания данных материалов [1]. Этот эффект имел место в условиях трения скольжения при температуре в поверхностных слоях сплавов не выше 100 °C, когда ε-фаза сохраняла стабильность [2]. Положительное влияние ε-мартенсита на трибологические свойства железомарганцевых сплавов обусловлено наличием у рассматриваемой фазы ГПУ кристаллической решетки, изоморфной α-кобальту. Развитие базисного скольжения в кристаллах ε-фазы при деформации обеспечивает железомарганцевым сплавам низкий коэффициент трения и повышенное сопротивление адгезионному изнашиванию подобно тому, как это наблюдается у ряда других ГПУ-металлов (Со, La) и их сплавов [3, 4]. Поскольку ε-фаза присутствует также в структуре сплавов системы Fe-Cr-Mn и в хромомарганцевых метастабильных аустенитных сталях, то существенный научный и практический

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \varepsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



ISSN 2410-9908

интерес представляет вопрос влияния $\varepsilon(\Gamma\Pi Y)$ -мартенсита на трибологические свойства данных технически важных материалов, обладающих высоким комплексом физико-механических свойств [5]. В литературе указанный вопрос не получил достаточного внимания. В настоящей работе исследуется влияние мартенситного $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращения на микроструктуру поверхностного слоя, износостойкость и коэффициент трения хромомарганцевых аустенитных сталей, содержащих 16–20 мас. % марганца и 7–11 мас. % хрома. Анализируется также влияние частиц высокопрочной карбидной фазы TiC на поведение рассматриваемых аустенитных сталей при трении и абразивном воздействии.

2. Материал и методика

Химический состав исследуемых сталей приведен в табл. 1. Параллельно с хромомарганцевыми аустенитными сталями испытывали железомарганцевый сплав Г21, содержащий в структуре до 35 об. % є-мартенсита, а также промышленную нержавеющую сталь 12Х18Н9, метастабильную к γ→α-мартенситному превращению при пластической деформации, и нержавеющую аустенитную стабильную сталь 40Х25Н20. Хромомарганцевые стали и сталь 40X25H20 выплавляли на воздухе в индукционной электропечи емкостью 10 кг. Сплав Г21 выплавляли в вакуумной электропечи емкостью 10 кг. Слитки всех сталей гомогенизировали при 1100 °C в течение 8 ч и ковали в прутки сечением 10×10 мм². Прутки всех сталей закаливали от 1100 °C в воде. Из термообработанных прутков сталей изготавливали образцы для трибологичсских и структурных исследований размером 7×7×20 мм. После закалки структура стали 02Г16Х11Н состояла из аустенита и заметного количества (до 15 об. %) є-фазы у остальных хромомарганцевых аустенитных сталей, кроме аустенита, в структуре присутствовали карбидные частицы ТіС. В сталях 20Г20Х7Т, 30Г17Х10Т1 и 40Г19Х11Т2 присутствовали около 1,0; 3,0 и 4,5 об. % ТiC. Количество карбидной фазы в сталях определяли методом стереометрического микроанализа (точечный метод) [6], а также по методике, описанной в работе [7]. Результаты, полученные по указанным методикам, затем усредняли. Средний размер частиц ТіС составлял около 3 мкм.

Марка стали	С	Mn	Si	Сг	Ni	Ti
02Г16Х11Н	0,02	16,40	0,27	11,40	0,70	0,06
20Г2ОХ7Т	0,25	20,50	0,31	7,50	—	0,36
30Г17Х10Т1	0,27	17,50	0,30	9,80	_	1,37
40Γ19X11T2	0,42	19,20	0,25	10,80	_	1,88
Г21	0,03	20,80	0,25	_	_	-
12X18H9	0,12	_	0,32	17,50	9,20	0,30
40X25H20	0,44	_	0,30	26,0	20,0	_

Таблица 1 – Химический состав сталей*

*Содержание серы и фосфора во всех сталях не превышало 0,025 мас. %.

Трибологические испытания сталей проводили на лабораторных установках в условиях трения скольжения пар сталь–абразив и сталь–сталь. Испытания на абразивное изнашивание осуществляли при скольжении (возвратно-поступательное движение) образцов (7×7×20 мм) по закрепленному абразиву – шлифовальной бумаге 14А16HM (электрокорунд зернистостью 160 мкм) в соответствии с методикой, описанной в работе [7]. Абразивную относительную износостойкость материалов *є* определяли как отношение потери массы эта-

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \epsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



лона – образца армко-железа ΔM_3 к потере массы образца испытуемой стали ΔM_M : $\varepsilon = \Delta M_3 / \Delta M_M$. Относительную износостойкость сталей устанавливали по результатам 2–4 параллельных испытаний. Испытания пар сталь–сталь проводили на воздухе по схемам палец (образец) – пластина (сталь 45, HRC = 50) и палец–диск (сталь X12M, HRC = 63–65). Методика данных испытаний описана в работах [1, 8]. Интенсивность изнашивания образцов сталей *Ih* определяли по формуле: $Ih = \frac{\Delta M}{\rho LS}$, где ΔM_3 – потери массы образца, г; ρ – плотность материала образца, г/см³; L – путь трения, см; S – геометрическая площадь контакта, см². В процессе испытания измеряли силу трения и среднюю объемную температуру в поверхностном слое образца толщиной 0,5 мм. Структуру сталей исследовали металлографическим, рентгеновским и электронно-микроскопическим методами [1, 2].

3. Результаты и обсуждение

Результаты испытаний аустенитных сталей на абразивное и адгезионное изнашивание приведены в табл. 2. Видно, что при испытаниях по закрепленному абразиву исследуемые хромомарганцевые стали характеризуются приблизительно одинаковым уровнем абразивной износостойкости ($\varepsilon = 1,7-1,8$), который превышает уровень износостойкости сплава Г21 и стабильной аустенитной стали 40X25H20 ($\varepsilon = 1,5$), но несколько ниже такового стали 12X18H9 ($\varepsilon = 1,9$). Наличие в структуре сталей 20Г20X7T, ЗОГ17X10T1 и 40Г19X11T2 1,0; 3,0 и 4,5 об. % высокопрочной карбидной фазы TiC существенно повышает исходную микротвердость данных сталей, но почти не влияет на их абразивную износостойкость.

Марка стали є Іһ>		$H_{\rm ev} 10^7$	IC.	Н, МПа		Количество мартенсита в сталях после трения, об. %	
	<i>In</i> ×10	K	Закалка	Трение	Слой ~5 мкм	Продукты изнашивания	
02Г16Х11Н	1,7	3,5	0,25	2600	6230	90 % ε	$80\% \epsilon + 20\% \alpha$
20Г20Х7Т	1,8	4,0	0,30	2800	6770	75 % ε	$70\% \epsilon + 20\% \alpha$
30Г17Х10Т1	1,8	4,1	0,27	3260	6550	90 % ε	75 % ϵ + 20 % α
40Γ19X11T2	1,8	3,2	0,35	3700	6770	$60\% \epsilon + 10\% \alpha$	$40\% \epsilon + 40\% \alpha$
Г21	1,5	3,1	0,28	3300	5500	90%ε	>90 % a
12X18H9	1,9	10,0	0,40	1600	7100	90 % α	>90 % a
40X25H20	1,5	50,0	0,42	2100	6200	_	_

Таблица 2 – Абразивная износостойкость ε, интенсивность адгезионного изнашивания *Ih*, коэффициент трения *K*, микротвердость *H* и количество мартенсита (ε, α)в аустенитных сталях

Испытания в условиях сухого трения скольжения осуществляли по схеме палецпластина (сталь 45) без смазки при средней скорости скольжения 0,07 м/с и нагрузке 294 Н. В этих условиях трения средняя объемная температура в поверхностном слое образцов не превышала 50 °C. Из табл. 2 видно, что наиболее интенсивное адгезионное изнашивание ($Ih = 5 \times 10^{-6}$) и максимальный коэффициент трения (K = 0,42) наблюдается у стабильной аустенитной стали 40X25H20. У метастабильной аустенитной стали 12X18H9 сопротивление адгезионному изнашиванию в 5 раз выше, чем у стали 40X25H20. Однако по своим трибологическим параметрам (K, Ih) сталь 12X18H9 существенно уступает хромомарганцевым метастабильным аустенитным сталям и сплаву Г21 (см. табл. 2). Хромомарганцевая аустенитная сталь 02Г16Х11H и сплав Г21 характеризуются близкими малыми значениями коэффициента трения и интенсивности адгезионного изнашивания. Рентгеновский фазовый

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \varepsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



ISSN 2410-9908

анализ показал, что на поверхности трения данных материалов формируется структура (ГПУ)-фазы, которая обеспечивает рассматриваемым материалам значительно более высокие трибологические свойства, чем у метастабильной аустенитной стали 12Х18Н9. Так, у стали 02Г16Х11Н коэффициент трения в 1,6 раза, а интенсивность изнашивания почти в 3 раза ниже, чем у стали 12X18H9, которая имеет более высокий уровень микротвердости на поверхности трения вследствие образования до 90 % (в слое толщиной 5 мкм) α-мартенсита деформации (табл. 2). Наличие в продуктах изнашивания стали 02Г16Х11Н значительного количества α-фазы свидетельствует о протекании в стали мартенситного $\varepsilon \rightarrow \alpha$ -превращения, которое реализуется на стадии разрушения поверхности и отделения частиц износа [1]. Однако интенсивность протекания мартенситного є→α-превращения в стали 02Г16Х11Н в данном случае значительно ниже, чем в железомарганцевом сплаве Г21 (табл. 2). Таким образом, согласно данным табл. 2 образующаяся в хромомарганцевой аустенитной стали 02Г16Х11Н є-фаза по характеру своего влияния на трибологические свойства стали не отличается от є-фазы железомарганцевых сплавов. Следует, однако, отметить, что микротвердость є-фазы, возникающей на поверхности трения стали 02Г16Х11Н, заметно выше микротвердости є-фазы, образующейся в сплаве Г21 при рассматриваемых условиях нагружения. Этот факт можно объяснить положительным влиянием хрома на способность є-мартенсита к деформационному упрочнению. Дополнительное легирование сплава Г21 хромом существенно повышает предел прочности рассматриваемого сплава [9]. Положительным влиянием хрома на прочностные свойства є-фазы можно, по-видимому, объяснить более высокую абразивную износостойкость стали 02Г16Х11Н по сравнению со сплавом Г21 (табл. 2). Однако в общем случае влияние у→ε-превращения на абразивную износостойкость метастабильного аустенита относительно невелико [10] сравнении с влиянием данного превращения на параметры адгезионного изнашивания анализируемых материалов.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

На рис. 1 представлены электронные микрофотографии структуры стали 02Г16Х11Н. Как видно из рис. 1 а. Структура закаленной стали состоит из аустенита и некоторого количества є-мартенсита. В аустените присутствуют дефекты упаковки, что характеризует низкую ЭДУ матрицы стали. Воздействие трения приводит к формированию в поверхностном слое стали (толщиной несколько мкм) ультрадисперсной нанокристаллической (НКСТ) структуры трения (НКСТ), состоящей в основном из кристаллов є-фазы размером 0,01–0,10 мкм (рис. 1 б и 1 в) [11]. Кроме є-фазы НКСТ содержит небольшое количество аустенита. Показано, что в сплаве Г21 при аналогичных условиях трения также образуется ультрадисперсная структура є-фазы [1]. Однако размер кристаллов є-фазы в этом случае был заметно больше (0,1–0,5 мкм), чем на микрофотографиях рис. 1 б и в. С увеличением расстояния от поверхности трения до -10 мкм размеры фрагментов НКСТ стали 02Г16Х11Н существенно возрастают, что обусловлено уменьшением интенсивности пластической деформации по глубине активного слоя образца. На расстоянии 10–20 мкм от поверхности трения кристаллы є-фазы становятся еще больше и уже имеют вид деформированных пластин (рис. 1 г). Из табл. 2 следует, что метастабильные к $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращению стали 20Г20Х7Т, 30Г17Х10Т1 и 40Г19Х11Т2, содержащие в структуре карбидные частицы TiC, не имеют преимущества в сопротивлении адгезионному изнашиванию перед сталью 02Г16Х11Н. Микротвердость на поверхности трения хромомарганцевых сталей, легированных титаном, также не увеличивается по мере роста количества карбидной фазы в их структуре и сохраняется на уровне 6600-6800 МПа, близоком к величине микротвердости на поверхности трения стали 02Г16Х11Н (6200 МПа). Рост количества карбидной фазы в структуре хромомарганцевых аустенитных сталей сопровождается увеличением их коэффициента трения. У стали 40Г19Х11Т2, содержащей наибольшее количество карбидной фазы, коэффициент трения почти столь же высок, как и коэффициент трения хромоникелевой аустенитной стали 12X18Н9. При этом полнота реализации у→ε-превращения на поверхности трения у стали 40Г19Х11Т2 существенно ниже, чем у других исследуемых сталей (табл. 2).

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \epsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



ISSN 2410-9908



Рис. 1. Микроструктура стали 02Г16Х11Н, подвергнутой закалке от 1100 °С в поле (*a*) и фрикционному нагружению при скорости скольжения 0,07 м/с и нагрузке 294 Н (*б*-*г*): *a* – светлопольное изображение; *б* – на расстоянии нескольких мкм от поверхности трения, светлопольное изображение; *в* – темнопольное изображение в рефлексе (участке кольца Дебая) (101) ε-фазы; *г* – на расстоянии 10–20 мкм от поверхности трения, светлопольное изображение

На рис. 2 представлены электронные микрофотографии структуры стали $30\Gamma17X10T1$. В закаленной стали, кроме аустенита, присутствуют частицы TiC (рис. 2 *a*). В аустените наблюдаются дефекты упаковки, возникающие преимущественно вблизи карбидных частиц – в микрообъемах матрицы, обедненных углеродом. Фрикционное нагружение формирует в поверхностном слое сталей толщиной несколько мкм ультрадисперсную структуру, основу которой составляют кристаллы ε -фазы и TiC (рис. 2 *б* и 2 *в*).

Кроме того, в нанокристаллической структуре присутствует небольшое количество кристаллов α - и γ -фаз. Размеры фрагментов составляют 0,005–0,05 мкм (рис. 2 ϵ). В УДСструктуре стали 30Г17Х10Т1 наблюдаются отдельные относительно крупные (нераздробленные) карбидные частицы размером около 0,5 мкм (рис. 2 ϵ). С увеличением расстояния от поверхности трения до 5–10 мкм размер фрагментов УДС существенно возрастает. При этом значительно снижается количество карбидной фазы в УДС. Наблюдаемое вблизи поверхности трения стали 30Г17Х10Т1 скопление карбидных частиц (рис. 2 ϵ и 2 ϵ), очевидно, является результатом интенсивной пластической деформации поверхностного слоя стали,

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \varepsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

происходящей по ротационному механизму [2, 12], а также воздействия высоких контактных напряжений. Ротации фрагментов ультрадисперсной структуры, происходящие в поле высоких сжимающих контактных напряжений, могут, по-видимому, приводить к вытеснению карбидных частиц, имеющих пониженную плотность ($\rho = 4,5$ г/см³), на поверхность трения стали. Повышенное количество карбидной фазы вблизи контактной поверхности стали 30Г17Х10Т1 может быть также следствием преимущественного локального удаления материала матрицы стали при ее адгезионном взаимодействии с контртелом. Подобный факт накопления карбидных частиц на поверхности изнашивания сталей был зафиксирован при трении высокомарганцовистой аустенитной стали, содержащей частицы карбида VC [2]. Следует отметить, что возникновение на поверхности трения стали 30Г17Х10Т1 тонкого слоя с повышенной концентрацией высокодисперсных карбидных частиц не обеспечивает рассматриваемой стали преимущества в трибологических свойствах перед сталью 02Г16Х11Н, не содержащей карбидной фазы (табл. 2).



а





в

Рис. 2. Микроструктура стали ЗОГ17Х10Т1, подвергнутой закалке от 1100 °С в воде (*a*) и фрикционному нагружению при скорости скольжения 0,07 м/с и нагрузке 294 Н (*б*-*в*): *a* – светлопольное изображение; *б* – на расстоянии нескольких мкм от поверхности трения, светлопольное; *в* – темнопольное изображение в рефлексе (участке кольца Дебая) (111) карбида TiC

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \epsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.

ISSN 2410-9908

http://dream-journal.org

В табл. 3 приведены результаты испытаний аустенитных сталей при трении со смазкой И-20. Испытания осуществляли по схеме палец–пластина при средней скорости скольжения 0,07 м/с, нагрузке 1760 Н в паре со сталью 45 (пластина).

Марка стали	$Ih \times 10^6$	K	t,℃
02Г16Х11Н	1,1	0,09	50
20Г20Х7Т	1,7	0,18	60
30Г17Х10Т1	2,8	0,18	60
40Г19Х11T2	24,0	0,20	75
Г21	2,5	0,10	50
12X18H9	1,9	0,17	60
40X25H20	42,0	0,28	80

Таблица 3 – Интенсивность изнашивания *Ih*, коэффициент трения *K* и средняя объемная температура в поверхностном слое *t* аустенитных сталей при трении со смазкой по стали 45

В данных условиях нагружения, как и при сухом трении (табл. 2 и 3), самыми низкими трибологическими свойствами обладает стабильная аустенитная нержавеющая сталь 40Х25Н20. Наиболее высокими трибологическими свойствами характеризуется сталь 02Г16Х11Н. Коэффициент трения данной стали почти в 2 раза, а интенсивность изнашивания в 1,7 раза ниже, чем у стали 12X18Н9. Рентгеновское исследование показало, что в поверхностном слое (толщиной около 10 мкм) стали 02Г16Х11Н образуется (как и при сухом трении) структура є-мартенсита. Кроме є-фазы, в данном слое присутствует небольшое количество α-мартенсита. Сплав Г21, претерпевающий в рассматриваемых условиях трения практически полное $\gamma \rightarrow \epsilon$ -превращение (в слое толщиной <10 мкм), характеризуется столь же низким коэффициентом трения, как и сталь $02\Gamma 16X11H$ (K = 0,1). Присутствие в структуре хромомарганцевых аустенитных сталей карбидных частиц ТіС в общем случае приводит к росту коэффициента трения и интенсивности изнашивания данных материалов. Особенно ярко это проявляется у стали 40Г19Х11Т2, интенсивность изнашивания которой более чем в 20 раз, а коэффициент трения в 2 раза выше, чем у стали 02Г16Х11Н. В поверхностном слое стали 40Г19ХНТ2 наблюдается повышенное, по сравнению со сталью 02Г16Х11Н, тепловыделение, о котором свидетельствует увеличение средней объемной температуры в поверхностном слое стали до 75 °С (табл. 3). Усиление тепловыделения в данном случае характеризует ухудшение условий смазки и активизацию деформационных процессов в зоне трения стали 40Г19Х11Т2. Рентгеновский фазовый анализ рассматриваемой стали не обнаружил наличия є-фазы в ее поверхностном слое (толщиной 5 мкм), что свидетельствует о полной термической стабилизации стали к у→ε-превращению. Значительная термическая стабилизация аустенита к у→ε-превращению имела место и у сталей 20Г20Х7Т, 30Г17Х10Т1. В их поверхностном слое после испытания фиксируется лишь небольшое (<10 %) количество є-фазы. Таким образом, наличие в структуре исследуемых аустенитных сталей карбидных частиц TiC значительно снижает активность протекания $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращения в их поверхностном слое при испытании со смазкой, когда имеет место заметный фрикционный нагрев (~50-75 °C). Это оказывает отрицательное влияние на трибологические свойства рассматриваемых материалов при трении со смазкой.

Таблица 4 иллюстрирует влияние скорости скольжения на параметры трения и изнашивания хромомарганцевых аустенитных сталей

Марка стали	Параметр	Скорость скольжения V, м/с					
		0,14	0,75	1,50	3,00		
02Г16Х11Н	$Ih \times 10^7$	1,7	0,53	1,0	120,0		
	К	0,34	0,55	0,50	0,80		
	t, °C	30	80	130	325		
3 0Г17Х10Т1	$Ih \times 10^7$	1,7	0,8	5,6	110,0		
	К	0,37	0,66	0,50	0,73		
	t, °C	30	80	160	500		
40Γ19X11T2	$Ih \times 10^7$	1,3	0,9	18,0	120,0		
	K	0,43	0,56	0,52	0,75		
	t, °C	30	130	200	500		

Таблица 4 – Влияние скорости скольжения V на интенсивность адгезионного изнашивания Ih, коэффициент трения K и температуру в поверхностном слое t аустенитных сталей

Испытания осуществляли по схеме палец-диск в паре со сталью Х12М без смазки при нагрузке 98 Н. При повышении скорости скольжения от 0,14 до 3,0 м/с температура в поверхностном слое сталей увеличивается от 30 до 325-500 °C. Это обусловливает рост интенсивности изнашивания исследуемых сталей в результате активизации процессов термического разупрочнения в их поверхностном слое. При скоростях скольжения 0,75 и 1,5 м/с стали 30Г17Х10Т1 и 40Г19Х11Т2 характеризуются значительно большими интенсивностью изнашивания и температурой в зоне трения, чем сталь 02Г16Х11Н. При скорости скольжения 3,0 м/с интенсивность изнашивания рассматриваемых сталей возрастает на 1-2 порядка, достигая уровня *Ih*×10⁻⁵ (табл. 4). Изнашивание всех сталей в данном случае носит характер катастрофического теплового схватывания [13]. Рентгеновский фазовый анализ показал, что при скорости скольжения 0.14 м/с, когда температура в зоне трения образца не превышает 30 °C, в поверхностном слое исследуемых хромомарганцевых аустенитных сталей активно происходит ү→ε-превращение (табл. 4). Это обеспечивает рассматриваемым материалам минимальные значения коэффициента трения и невысокую интенсивность адгезионного изнашивания. В стали 02Г16Х11Н кроме є-фазы образуется заметное (~15 об. %) количество α-мартенсита, что свидетельствует об активизации мартенситного є→α-превращения на поверхности трения данного материала. С vвеличением скорости скольжения до 0,75 м/с, вызывающим рост температуры в поверхностном слое образцов до 80 °C, имеет место резкое уменьшение количества є-фазы, возникающей вблизи поверхности трения хромомарганцевых аустенитных сталей. Это обусловлено термической стабилизацией сталей по отношению к $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращению, а также протеканием в них є→у-мартенситного превращения [2, 14]. После испытаний со скоростью 1,5 м/с в структуре сталей 30Г17Х10Т1 и 40Г19Х11Т2 є-фаза не была обнаружена, а в поверхностном слое стали 02Г16Х11Н присутствовали 25 об. % ε-фазы и 30 об. % α-мартенсита. Полная термическая стабилизация стали 02Г16Х11Н к образованию мартенсита (ε, α) наблюдается лишь при скорости 3,0 м/с (табл. 4). Полная термическая стабилизация исследуемых метастабильных аустенитных сталей к образованию мартенсита деформации (α, ε), имеющая место при скоростях скольжения 1,5 и 3,0 м/с, резко снижает сопротивление сталей тепловому адгезионному изнашиванию. У сталей 30Г17Х10Т1 и 40Г19Х11Т2, содержащих в структуре карбидную фазу TiC, полная термическая стабилизация к образо-

Korshunov L. G. and Chernenko N. L. Effect of $\gamma \rightarrow \epsilon$ martensitic transformation on the tribological properties of chromium–manganese austenitic steels // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 48-59. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.048-059.



ванию мартенсита деформации (α и ε) имеет место при меньшей скорости скольжения (V = 1,5 м/с), чем у стали 02Г16Х11Н (V = 3,0 м/с). Это активизирует рост интенсивности теплового адгезионного изнашивания у рассматриваемых материалов при относительно невысоких средних температурах в зоне трения (t = 160-200 °C, табл. 4 и 5). Таким образом, полученные результаты показывают, что присутствие карбидных частиц TiC в структуре исследуемых метастабильных хромомарганцевых аустенитных сталей, как правило, снижает сопротивление адгезионному изнашиванию и увеличивает коэффициент трения рассматриваемых материалов (табл. 2–4). Частицы высокопрочной карбидной фазы, повидимому, существенно увеличивают сопротивление сдвигу тонкого поверхностного слоя сталей и тем самым, нейтрализуют положительное влияние легкого базисного скольжения ε -мартенсита на трибологические свойства хромомарганцевых аустенитных сталей. В данном случае увеличение сопротивления сдвигу поверхностного слоя рассматриваемых материалов, очевидно, препятствует локализации пластической деформации металла непосредственно вблизи поверхности трения сталей и тем самым создает условия для активизации процессов схватывания.

4. Заключение

Образующаяся в хромомарганцевых аустенитных сталях $\varepsilon(\Gamma\Pi Y)$ -фаза подобна ε -фазе железомарганцевых сплавов по влиянию на трибологические свойства исследованных материалов. Данная мартенситная фаза обеспечивает аустенитным хромомаргаицевым сталям значительно меньший коэффициент трения (K = 0,25) и большее сопротивление адгезионному изнашиванию по сравнению с хромоникелевыми стабильной аустенитной сталью 40X25H20 и аустенитной сталью 12X18H9, метастабильной к $\gamma \rightarrow \alpha$ -мартенситному превращению при трении.

Эпсилон-фаза в хромомарганцевых аустенитных сталях обладает заметно большими абразивной износостойкостью и деформационным упрочнением при изнашивании, чем є-фаза в железомарганцевых сплавах.

В поверхностном слое хромомарганцевых аустенитных сталей, метастабильных к γ→ε-превращению, возникает ультрадисперсная и нанокристаллическая структура *ε*-фазы, кристаллы которой имеют размеры 0,01–0,10 мкм.

Термическая стабилизация метастабильного аустенита к $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращению, а также протекание $\varepsilon \rightarrow \gamma$ -превращения в условиях фрикционного нагрева (до 200 °C) поверхностного слоя сталей приводит к резкому росту интенсивности их изнашивания.

Присутствие в структуре хромомарганцевых аустенитных сталей, метастабильных к $\gamma \rightarrow \varepsilon$ -превращению, частиц карбидной фазы TiC в количестве 1,0–4,5 об. % повышает как коэффициент трения, так и интенсивность изнашивания данных материалов.

Увеличение количества дисперсных частиц TiC в поверхностном (1–5 мкм) слое хромомарганцевых аустенитных сталей, легированных титаном, в процессе фрикционного нагружения является следствием интенсивной пластической деформации сталей в зоне трения, приводящей к адгезионному переносу материала матрицы с контактной поверхности.

Благодарность

Работа выполнена с использованием оборудования ЦКП «Испытательный центр нанотехнологий и перспективных материалов» ИФМ УрО РАН.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Структура» № АААА-А18-118020190116-6 и проекту № 18-10-2-39 комплексной программы УрО РАН.



ISSN 2410-9908

Литература

1. Коршунов Л. Г., Черненко Н. Л. Структурные превращения при трении и износостойкость сплавов системы Fe-Mn, содержащих -мартенсит // ФММ. – 1987. – Т. 63, вып. 2. – С. 319–328.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

2. Коршунов Л. Г. Структурные превращения при трении и износостойкость аустенитных сталей // ФММ. – 1992. – № 8. – С. 3–21.

3. Бакли Д. Поверхностные явления при адгезии и фрикционном взаимодействии. – М. : Машиностроение, 1986. – 359 с.

4. Antony K. C. Wear-resistant cobalt-base alloys // Journal of Metals. – 1983. – Vol. 35, no. 2. – P. 52–60. – DOI: 10.1007/BF03338205.

5. Effect of Heating on the Structure, Phase Composition, and Micromechanical Properties of the Metastable Austenitic Steel Strengthened by Nanostructuring Frictional Treatment / A. V. Makarov, P. A. Skorynina, E. G. Volkova, A. L. Osintseva // Physics of Metals and Metallog-raphy. – 2018. – Vol. 119, no. 12. – P. 1196–1203. – DOI: 10.1134/S0015323018120112.

6. Салтыков С. А. Стереометрическая металлография. – М. : Металлургия, 1976. – 271 с.

7. Moiseev V. F. The composition of steel and the percentage of carbide phase Steel composition and amount of carbide phase // Metal Science and Heat Treatment. – 1970. – Vol. 12, no. 8. – P. 700–702. – DOI: 10.1007/BF00654801.

8. Макаров А. В., Коршунов Л. Г, Осинцева А. Л. Влияние отпуска и фрикционного нагрева на износостойкость стали У8, закаленной лазером // Трение и износ. – 1991. – Т. 12, № 5. – С. 870–878.

9. Богачев И. Н., Еголаев В. Ф. Структура и свойства железомарганцевых сплавов. – М. : Металлургия, 1973. – 295с.

10. Структура и трибологические свойства азотсодержащих нержавеющих аустенитных сталей / Л. Г. Коршунов, В. В. Сагарадзе, Н. Л. Черненко, Н. Л. Печеркина, Г. Ю. Калинин, С. Ю. Мушникова, О. А. Харьков // Вопросы материаловедения. – 2012. – № 3 (71). – С. 136–145.

11. Коршунов Л. Г., Макаров А. В., Черненко Н. Л. Нанокристаллические структуры трения в сталях и сплавах, их прочностные и трибологические свойства // Развитие идей академика В. Д. Садовского : сб. науч. труд. – Екатеринбург, 2008. – С. 218–241.

12. Heilmann P., Clark W. A., Rigney D. A. Orientation determination of subsurfase cells generated by sliding // Acta Metallurgica – 1983. – Vol. 31, no. 8. – P. 1293–1305. – DOI: 10.1016/0001-6160(83)90191-8.

13. Голего Н. Л. Схватывание в машинах и методы его устранения. – Киев : Техника, 1965. – 231 с.

14. Влияние ε-мартенсита на трение и изнашивание высокомарганцовистых сплавов / Л. Г. Коршунов, В. В. Сагарадзе, Н. А. Терещенко, Н. Л. Черненко // ФММ. – 1983. – Т. 55, вып. 2. – С. 341–348.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019



ISSN 2410-9908

Received: 12.08.2019 Revised: 15.10.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.060-072

http://dream-journal.org

THE EFFECT OF DAMAGE AT AN ENSEMBLE OF MICROSTRUCTURE POINTS ON THE MARGIN OF SAFETY IN STRUCTURALLY HETEROGENEOUS MATERIALS

S. S. Volkov

Institute of Engineering Science, Urals Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620219, Russian Federation

D https://orcid.org/0000-0002-6481-5052 🕺 volkovss48@yandex.ru

Corresponding author. E-mail: volkovss48@yandex.ru Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian Federation Tel.: +7 (343)371 77 28

Fracture concentration regions are considered in a microstructure under loading. A mathematical model of a micro-heterogeneous medium with random properties of elements is used for the calculations. The initial data in the problem includes the characteristics of the distributions of random elastic moduli and ultimate strengths in the microstructure elements. The microstructure strength condition is a difference between stresses and ultimate strengths for a multitude of points of a given configuration. The probability of stress simultaneously exceeding the ultimate strength in a given set of elements determines the probability of fracture in this ensemble of points and relative damage at the micro level. A multidimensional normal distribution is used to calculate damage. The structure of the correlation matrix of distribution takes into account the kind of the damage concentration region. The relationship between critical microstructure damage and the margin of safety is determined. Examples of calculating the probability of fracture in two, three, and four microstructure elements are given.

Keywords: random properties, microstructure damage, multidimensional probability distribution, ultimate strength, margin of safety.

References

1. Yokobori T. *An Interdisciplinary Approach to Fracture and Strength of Solids*, Groningen, Wolters-Noordhoff Scientific LTD, 1968.

2. Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of Non Elastic Deformation and Fracture of Composite Materials]. Nauka Publ., Moscow, 1997. (In Russian).

3. Volkova T.A., Volkov S.S. Microstructure damage related to stress- strain curve for grain composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 52, iss. 2, 2009, pp. 83–90. DOI: 10.1016/j.tafmec.2008.02.004.

4. Sih G. C. Fracture mechanics in retrospect in contrast to multiscaling in prospect. In: Proceedings of *the 17-th National Conference of Italian Group of Fracture*, ed. by A. Finelli and L. Nobile, Bologna, June 16–18, 2004, pp. 15–37.

5. Trusov P.V., Volegov P.S., Yanz A.Yu. Two-scale models of polycrystals: Evaluation of validity of Ilyushin's isotropy postulate at large displacement gradients. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 21–34. DOI: 10.1134/S1029959916010033.

Volkov S. S. The effect of damage at an ensemble of microstructure points on the margin of safety in structurally heterogeneous materials // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. - 2019. - Iss. 5. - P. 60-72. - DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.060-072.



6. Surikova N.S., Panin V.E., Derevyagina L.S., Lutfullin R.Ya., Manzhina E.V., Kruglov A.A., Sarkeeva A.A. Micromechanisms of deformation and fracture in a VT6 titanium laminate under impact load. *Physical Mesomechanics*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 250–260. DOI: 10.1134/S1029959915030091.

7. Schastlivtsev V.M., Tabatchikova T.I., Yakovleva I.L., Klyueva S.Yu., Kruglova A.A., Khlusova E.I., Orlov V.V. Microstructure and properties of low-carbon weld steel after thermomechanical strengthening. *The Physics of Metals and Metallography*, 2012, vol. 113, no. 5, pp. 480– 488. DOI: 10.1134/S1029959915030091.

8. Pugacheva N.B., Bykova T.M., Trushina E.B., Malygina I.Yu. The Structural State and Properties of a Deposited Coating for an Internal Combustion Engine Valve. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures,* 2018, iss. 5, pp. 74–85. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.5.074-085. URL: http://dream-journal.org/issues/2018-5/2018-5_186.html (accessed 30.11.2019).

9. Zaitsev A.V. Second-order moment functions for the random structure of unidirectionally reinforced fibrous composites. In: *Vestnik UGTU-UPI. Mekhanika microneodnorodnykh materialov i razrushenie* [Herald of UGTU-UPI, Mechanics of Micro-Heterogeneous Materials and Fracture]. Ekaterinburg, UGTU-UPI Publ., 2006, no. 11 (82), pp. 161–167. (In Russian).

10. Smirnov S.V., Konovalov A.V., Myasnikova M.V., Khalevitsky Yu.V., Smirnov A.S., Igumnov A.S. A Computational Model of V95/sicp (7075/ Sicp) Aluminum Matrix Composite Applied to Stress-Strain State Simulation under Tensile, Compressive and Shear Loading Conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 6, pp. 16–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.016-027. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-6/2017-6_133.html (accessed 14.10.2019).

11. Panin V.E., Derevyagina L.S., Lebedev M.P., Syromyatnikova A.S., Surikova N.S., Pochivalov Yu.I., Ovechkin B.B. Scientific Basis for Cold Brittleness of Structural BCC Steels and Their Structural Degradation at Below Zero Temperatures. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 2 (2), pp. 125–133. DOI: 10.1134/S1029959917020023.

12. Panin S.V., Marushchak P.O., Vlasov I.V., Eremin A.V., Byakov A.V., Syromyatnikova A.S., Stankevich R. Structure and Fatigue Durability of 09mn2si Pipe Steel after Long-Term Operation in Far North Conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures,* 2017, iss. 4, pp. 81–85. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.081-085. Available at: http://dream-journal.org/issues/2017-4/2017-4_164.html (accessed 14.10.2019).

13. Mironov V.I., Emelyanov I.G., Vichuzhanin D.I., Kamantsev I.S., Yakovlev V.V., Ogorelkov D.A., Zamaraev L.M. A Method for Experimental Investigation of Degradation Processes in Materials. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 16–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.016-027. Available at: http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_246.html (accessed 30.11.2019).

14. Mitropolsky A.K. Tekhnika statisticheskykh vychisleniy [The technique of Statistical Computations]. Nauka Publ., Moscow, 1971. (In Russian).

15. Volkova T.A., Volkov S.S. Microstructure damage at ensemble of points for grain composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2010, vol. 54, iss. 3, pp. 149–155. DOI: 10.1016/j.tafmec.2010.10.010.

16. McLean D. Mechanical Properties of Metals, Wiley, New York, 1962.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 12.08.2019 УДК 539.3 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.060-072

http://dream-journal.org

ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ АНСАМБЛЯ ТОЧЕК МИКРОСТРУКТУРЫ НА ЗАПАС ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.С.Волков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук д. 34, ул. Комсомольская, 620049, Екатеринбург, Российская Федерация

D https://orcid.org/0000-0002-6481-5052 🕺 volkovss48@yandex.ru

Ответственный автор. Электронная почта: volkovss48@yandex.ru Адрес для переписки: ул. Комсомольская 34, Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7(343) 371–77–28

Рассматриваются зоны концентрации разрушений в элементах микроструктуры деформируемого материала. Для расчетов используется математическая модель микронеоднородной среды со случайными свойствами элементов. Исходными данными задачи являются характеристики распределения случайных модулей упругости и предела прочности в элементах микроструктуры. Микроструктурное условие прочности представляет собой разницу между напряжениями и пределом прочности для множества точек данной конфигурации. Вероятность одновременного превышения напряжением предела прочности в данном множестве элементов определяет вероятность разрушения этого ансамбля точек и относительную поврежденность на микроуровне. В расчетах поврежденности используется многомерное нормальное распределение. Структура корреляционной матрицы распределения учитывает вид зоны концентрации разрушений. Найдена зависимость между величиной критической микроструктурной поврежденности материала и запасом прочности. Проведены примеры расчетов вероятности разрушения в двух, трех и четырех элементах микроструктуры.

Ключевые слова: случайные свойства, поврежденность микроструктуры, многомерное распределение вероятностей, предел прочности, запас прочности.

1. Введение

Под действием нагрузки конструкционные материалы накапливают поврежденность элементов микроструктуры. На ранних стадиях микроразрушение имеет рассеянный характер. Затем увеличивается вероятность одновременного разрушения в близких точках. Постепенно формируются зоны повреждения, содержащие несколько элементов микроструктуры. Слияние таких зон приводит к развитию магистральной трещины и потере несущей способности конструкции. Критическая поврежденность материала определяется из эксперимента и инженерного опыта и зависит, прежде всего от степени ответственности конструкции. Необоснованное увеличение запаса прочности снижает качество конструкции, увеличивает ее вес и размеры. Изучение процесса разрушения элементов микроструктуры дает возможность обосновать величину запаса прочности материала.

В задачах механики структурно-неоднородных сред рассматриваются прочностные и деформационные свойства материала на нескольких уровнях структуры, включая микро- и нано- уровни [1–8]. Характеристики случайных свойств микроструктуры используются при моделировании вероятностного процесса деформирования и разрушения материала в конструкциях [2, 3, 9, 10]. Проводится анализ формирования зон внутреннего разрушения [10,



ISSN 2410-9908

11], в том числе для магистральных трубопроводов при длительной эксплуатации [12]. Выполняются экспериментальные исследования процессов деградации материалов с учетом их структуры [13].

При полной постановке стохастической краевой задачи механики микронеоднородных сред требуется найти многоточечные законы распределения случайных деформаций и напряжений в элементах микроструктуры. Такие законы дают исчерпывающее решение задачи в рамках теории случайных функций [2, 3, 14]. Они используются для построения статистических теорий деформирования и оценки надежности материалов и элементов конструкций. Для расчета случайных микроструктурных напряжений и деформаций используются данные о свойствах микроструктуры композита. Случайные упругие и прочностные свойства микроструктуры определяются в общем случае многоточечными моментными функциями. Эти функции находятся с помощью экспериментальных распределений, полученных при изучении химического состава, пористости, размеров и формы включений [2, 9].

В работе [3] сделано обобщение методов расчета микроструктурных напряжений для зернистых композитов с непрерывным распределением свойств микроструктуры. В частности, такими материалами являются металлы и порошковые композиты. Исследована точность метода. Показана возможность его использования для материалов с непрерывным распределением и большими вариациями свойств микроструктуры. Получены расчетные формулы *n*-точечных моментных функций моментных функций произвольного порядка для микронапряжений, а также более детальные формулы корреляционных функций напряжений в зернистых композитах.

Для расчета многоточечных условий прочности применяются многоточечные законы распределения микронапряжений. Микроструктурное условие прочности представляет собой разницу между случайным эквивалентным напряжением и случайным пределом прочности. Для оценки вероятности одновременного разрушения в нескольких точках нужно найти соответствующую многоточечную плотность распределения микроструктурного условия прочности. Это позволяет вычислить относительное содержание микроскопических зон разрушения данной конфигурации [15]. Для прогнозирования ранних стадий разрушения и оценки прочности материала исследуется вероятность многоточечного разрушения микроструктуры.

2. Корреляционные функции микроструктурных напряжений

Для макроизотропных стохастических зернистых композитов рассмотрим задачу механики микронеоднородных сред, связывающую случайные тензоры модулей упругости $\Theta(X)$, тензоры деформаций $\varepsilon(X)$ и напряжений $\sigma(X)$ в элементах микроструктуры $X = (x_1, x_2, x_3)$. Обозначим угловыми скобками математическое ожидание случайной величины. Предполагается, что макродеформации $\mathbf{e} = \langle \varepsilon(X) \rangle$ найдены при решении краевой задачи для данной конструкции. Заданы распределение случайного модуля Юнга E(X) и детерминированный коэффициент Пуассона v. Используя законы распределения случайных свойств микроструктуры, нужно найти параметры распределения случайных микроструктурных деформаций и напряжений.

Расчет моментных функций для деформаций $\varepsilon(X)$ выполняется с помощью интегрального операторного уравнения, использующего вторые производные тензора Грина [2, 3]. Это решение содержит произведения вариаций случайных тензоров модулей упругости $\Theta(X), \Theta(Y), \dots \Theta(Z)$ во всем ансамбле исследуемых точек X, Y, ... Z. Для материалов, не содержащих начальных микроразрушений, может быть принято предположение о статистической независимости свойств микроструктуры в различных точках или взаимной независимости полей деформаций на разных этапах метода приближений [3]. В более общем случае нужно использовать данные эксперимента о совместном распределении свойств среды во множестве точек. Это дает возможность учесть степень упорядоченности микроструктуры,



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

форму включений, характер микроповрежденности. Для расчета структурных напряжений σ (*X*), используется свертка тензоров по двум индексам «···»:

$$\boldsymbol{\sigma}(X) = \boldsymbol{\Theta}(X) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(X) = \boldsymbol{\Theta}(X) \cdot (\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}(X)). \tag{1}$$

Методы расчета корреляционных функций напряжений $K_{\sigma}(r)$ приведены в работе [3]. При этом используется корреляционная функция модуля Юнга $K_E(r) = \langle E^{\circ}(X)E^{\circ}(Y) \rangle$ для точек на расстоянии r = |X - Y|. В приближенном варианте корреляционная функция $K_{\sigma}(r)$ напряжений имеет вид

$$K_{\sigma}(r) = e^2 \frac{4}{9E^2(1-\nu)^2} (E^2 K_E(r) (0.8-\nu)^2 + 0.5(1.4-\nu)^2 K_E(r)^2).$$
(2)

Корреляционные функции составляющих тензора напряжений становятся основой расчета корреляционных матриц [15] при построении совместного распределения напряжений в ансамбле точек *X*, *Y*, ... *Z*.

3. Микроструктурное условие прочности

На предел прочности элементов микроструктуры существенно влияют размер зерна, распределение легирующих добавок, начальная и приобретенная пористость. Перечисленные параметры для реальных материалов на уровне микроструктуры имеют случайный характер. Следовательно, микроструктурный предел прочности S(X) является случайной величиной. Параметры его распределения можно найти по данным эксперимента, используя функции от случайных величин. Так, например, с ростом величины зерна металла предел прочность при отрыве уменьшается [16]. По анализу микрошлифов находим распределение диаметров зерен и затем вычисляем плотность распределения пределов прочности. Известны также данные о влиянии легирующих добавок на сопротивление металлов отрыву и срезу [16].

Микроструктурное условие прочности (функция прочности) w(X) в точке X представляет собой разницу между случайным эквивалентным напряжением $\sigma(X)$ и случайным пределом прочности S(X) [3]. Случайная величина $\sigma(X)$ может быть интенсивностью напряжений или одной из составляющих тензора напряжений в зависимости от вида нагрузки:

$$w(X) = \sigma(X) - S(X). \tag{3}$$

Если задан ансамбль точек микроструктуры $X_1, X_2, ..., X_n$, то микроструктурное условие прочности запишем в виде случайного вектора:

$$\mathbf{W} = \{ w (X_1), ... w (X_n) \}.$$
(4)

Если параметр $w(X_i) > 0$, то напряжение в точке X_i больше предела прочности, поэтому в элементе микроструктуры произойдет разрушение. При $w(X_i) < 0$ разрушение не происходит, так как напряжение находится в допустимой области безопасных значений. Одновременное разрушение в точках ансамбля произойдет, если все координаты вектора условия прочности **W** положительны. Вероятность такого разрушения равна многомерному интегралу от плотности распределения $f_w(t_1, t_2, ..., t_n)$ случайного вектора **W**. Областью интегрирования будут интервалы от нуля до бесконечности по всем *n*-измерениям:



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

$$q(n) = \underbrace{\int_{0}^{\infty} \dots \int_{n}^{\infty}}_{n} f_{w}(t_{1} \dots t_{n}) dt_{1} \dots dt_{n}.$$
(5)

По микроструктурному условию прочности **W** оценивается поврежденность q(n), т. е. относительное содержание микроскопических зон разрушения заданной конфигурации.

Рассмотрим условие прочности в двух точках X и Y. Если напряжения $\sigma(X)$ и предел прочности S(X) распределены нормально, то коэффициент вариации k_w и коэффициент корреляции $\rho_w(r)$ случайной величины w(X) вычисляются по следующим формулам:

$$k_{w} = \frac{\sqrt{\langle \sigma^{o}(X)^{2} \rangle + \langle S^{o}(X)^{2} \rangle}}{|\langle \sigma(X) \rangle - \langle S(X) \rangle|};$$
(6)

$$\rho_{w}(r) = \frac{\langle w^{o}(X)w^{o}(Y) \rangle}{\langle w^{o}(X)^{2} \rangle} = \frac{\langle \sigma^{o}(X)\sigma^{o}(Y) \rangle + \langle S^{o}(X)S^{o}(Y) \rangle}{\langle \sigma^{o}(X)^{2} \rangle + \langle S^{o}(X)^{2} \rangle}.$$
⁽⁷⁾

Рассмотрим нормальную *n*-мерную плотность распределения $f_w(t_1, t_2, ..., t_n)$ [14]. Параметры этой функции определяются математическим ожиданием *m*, коэффициентом вариации *k* микроструктурного условия прочности w(X) и матрицей коэффициентов корреляции **P** = $[\rho_{ij}]$ для случайных параметров $w(X_1), (X_2), ..., w(X_n)$. В расчетах используется обратная матрица коэффициентов корреляции **A**:

$$f_w(t_1...t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} \cdot k^n m^n \sqrt{\Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta} \sum_{i} \sum_{j} \Lambda_{ij} \frac{(t_i - m)(t_j - m)}{k^2 m^2}\right);$$
(8)

$$m = \langle w(X) \rangle; \ k^{2} = \frac{\langle w^{o}(X)^{2} \rangle}{m^{2}}; \ \rho_{ij} = \frac{\langle w^{o}(X_{i})w^{o}(X_{j}) \rangle}{\langle w^{o}(X)^{2} \rangle};$$
(9)

$$\mathbf{P} = [\rho_{ij}], \Delta = \det \mathbf{P}, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}.$$
(10)

Для расчета интеграла (5) выполним замену координат $\frac{t_i - m}{k |m|} = x_i$. Область интегрирования (0, ∞) перейдет при этом в область (k^{-1} , ∞). Заметим, что математическое ожидание условия прочности *m* отрицательно, так как для работающих конструкций среднее напряжение меньше предела прочности. В результате вероятность одновременного микроразрушения в *n*-точках примет вид:

$$q(l,k,P) = \int_{k^{-1}}^{\infty} \dots \int_{k^{-1}}^{\infty} f_w(t_1 \dots t_l) \, dx_1 \dots dx_l \, . \tag{11}$$

Корреляционные функции составляющих тензора напряжений и микроструктурного предела прочности становятся основой для построения совместного распределения условия прочности в исследуемых точках. Структура корреляционной матрицы $\mathbf{P} = [\rho_{ij}]$ отражает



ISSN 2410-9908

конфигурацию исследуемых ансамблей точек. Корреляция $\rho_{ij}(r) = \rho |X_i - X_j|$) зависит от близости точек X_i и X_j . Чем дальше точки, тем меньше корреляция. Рост корреляции в удаленных точках отражает также характер развития микроповрежденности. При этом прослеживается переход от стадии рассеянного и независимого разрушения отдельных элементов микроструктуры к этапу концентрации поврежденностей и подготовки условий для развития магистральной трещины. Математическое ожидание $m = \langle w(X) \rangle$ оценивает удаленность нагрузки от опасных значений. Коэффициент вариации k характеризует однородность материала на уровне микроструктуры. Чем больше коэффициент вариации, тем менее однородна микроструктура.

4. Разрушение в двух точках

Пусть точки микроструктуры X и Y расположены на расстоянии r. Для напряжений $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$ задана совместная плотность распределения вероятности $z = f_{\sigma}(x, y)$. Вектор **W** условия прочности (4) будет следующим:

$$\mathbf{W} = \{ w(X), w(Y) \} = \{ \sigma(X) - S(X), \sigma(Y) - S(Y) \}.$$
(12)

Нормальная плотность f(x,y) совместного распределения w(X), w(Y) зависит от параметров m, k, ρ .

$$m = \langle w(X) \rangle = \langle w(Y) \rangle; \ k = \frac{\sqrt{\langle w^{0}(X)^{2} \rangle}}{m}; \ \rho = \frac{\langle w^{0}(X)w^{0}(Y) \rangle}{\langle w^{0}(X)^{2} \rangle}.$$
(13)

Запишем матрицы Р и Л :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Lambda = \frac{1}{\Delta} (1 - \rho) \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta = 1 - \rho^2.$$
(14)

Перейдем к расчету вероятности разрушения $q = q(k, \rho)$ в двух точках X и Y. В соответствии с формулой (11) вероятность разрушения зависит от двух параметров условия прочности: k – коэффициента вариации и ρ – коэффициента корреляции для точек X, Y:

$$q(k,\rho) = \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dxdy \,. \tag{15}$$

5. Разрушение в трех точках

Вероятность разрушения в трех точках *X*, *Y*, *Z* определяется плотностью совместного распределения условия прочности f(x, y, z) и вычисляется по формуле (11) при l = 3.

$$q = \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz_{.}$$
(16)

Пусть точки расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами r = |X-Y| = |X-Z| = |Y-Z|. Коэффициент корреляции $\rho = \rho(r)$ зависит от расстояния между точ-ками. Корреляционная матрица **Р** и обратная к ней матрица **Л** имеют следующий вид:



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019

ISSN 2410-9908

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Lambda} = (1 - \rho) \begin{bmatrix} 1 + \rho & -\rho & -\rho \\ -\rho & 1 + \rho & -\rho \\ -\rho & -\rho & 1 + \rho \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Delta} = (1 - \rho)^2 (1 + 2\rho). \tag{17}$$

Функция f(x, y, z) будет иметь вид:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^{3}(1-\rho)\sqrt{1+2\rho}}} \exp\left(-\frac{(1+\rho)(x^{2}+y^{2}+z^{2})-2\rho(xy+xz+yz)}{2(1-\rho)(1+2\rho)}\right)$$
(18)

6. Разрушение в четырех точках

Если четыре точки находятся в вершинах тетраэдра, расстояния между ними будут одинаковыми. Это определит структуру корреляционной матрицы.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Lambda = (1-\rho)^2 \begin{bmatrix} 1+2\rho & -\rho & -\rho \\ -\rho & 1+2\rho & -\rho \\ -\rho & -\rho & 1+2\rho & -\rho \\ -\rho & -\rho & -\rho & 1+2\rho \end{bmatrix}.$$
(19)

$$\Delta = (1 - \rho)^3 (1 + 2\rho).$$
⁽²⁰⁾

В соответствии с формулами (8,11) получим следующую совместную плотность распределения условия прочности:

$$f(x, y, z, u) = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \Delta} \exp(-\frac{1}{2(1-\rho)(1+2\rho)}((1+3\rho)(x^2+y^2+z^2+u^2)-\rho(x+y+z+u)^2)).$$
(21)

Вероятность разрушения в четырех точках в вершинах тетраэдра определяется плотностью распределения f(x, y, z, u) и вычисляется по формуле (11) при l = 4:

$$q = \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} \int_{k^{-1}}^{\infty} f(x, y, z, u) dx dy dz du.$$
(22)

В работе [15] исследовано влияние параметров распределения микроструктурной функции прочности на вероятность разрушения для различной конфигурации ансамбля точек микроструктуры. Так с ростом параметров k и ρ происходит наращивание поврежденности. Если оба параметра малы, поврежденность практически нулевая. С приближением хотя бы одного из параметров к его критическому значению вероятность повреждения вначале медленно, а затем заметно возрастает. Если оба параметра k и ρ находятся в диапазоне больших значений, поврежденность развивается лавинообразно. Характер развития поврежденности близок для всех ансамблей точек. При этом существенно отличается скорость приращения поврежденности в зависимости от конфигурации точек. Быстрее всего она возрастает в одной точке, затем медленнее в двух соседних точках. Одновременное разрушение в вершинах тетраэдра происходит быстрее, чем в линии из четырех точек. С ростом нагрузки и увеличением поврежденности меняются свойства материала, возрастает зависимость уда-

Volkov S. S. The effect of damage at an ensemble of microstructure points on the margin of safety in structurally heterogeneous materials // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 60–72. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.060-072.



ISSN 2410-9908

ленных точек, увеличивается разброс свойств микроструктуры. Это приводит в свою очередь к еще более интенсивному росту поврежденности на следующих этапах нагружения конструкции.

С увеличением числа точек в зоне разрушения будет увеличиваться размерность корреляционных матриц. При этом уменьшается вероятность их одновременного разрушения. Критерием макроскопического разрушения материала служит его предельная поврежденность. Как правило, такая поврежденность возникает при переходе диаграммы деформирования к ниспадающей ветви [3].

7. Коэффициент запаса прочности

Отношение предела прочности материала σ_B к напряжению в детали конструкции σ называется коэффициентом запаса прочности: $[n] = \frac{\sigma_B}{\sigma}$. Эта величина является макроскопической характеристикой материала для данной конструкции. Рассматривается допустимое значение коэффициента запаса прочности [n]. Рекомендуемый диапазон изменения [n] зависит от степени ответственности конструкции и условий, при которых были получены экспериментальные данные о работе детали в конструкции. Если были использованы приближенные экспериментальные данные о прочности детали и режимах ее нагружения, параметр [n] должен быть больше. Если экспериментальные данные дан

Рассмотрим случайные напряжения $\sigma(X)$, случайные пределы прочности S(X) в элементах микроструктуры и их математические ожидания $\sigma = \langle \sigma(X) \rangle$; $\sigma_{\rm B} = \langle S(X) \rangle$. Пусть случайные величины $\sigma(X)$ и S(X) независимы и имеют нормальные распределения вероятностей. Вычислим коэффициент вариации k и коэффициент корреляции $\rho(r)$ случайной функции прочности w(X) через параметры распределения случайных величин $\sigma(X)$ и S(X). Введем в расчеты коэффициенты вариации k_{σ} напряжений и $k_{\rm B}$ предела прочности. Преобразуя формулу (6), найдем связь между коэффициентом запаса прочности [n], коэффициентами вариации соответствующих случайных величин w(X), $\sigma(X)$, $\sigma_{\rm B}(X)$.

$$k = \frac{\sqrt{k_{\sigma}^{2} + [n]^{2} \cdot k_{B}^{2}}}{[n] - 1}.$$
(23)

Рассмотрим также коэффициенты корреляции $\rho_{\sigma} = \rho_{\sigma}(X,Y)$ напряжений и $\rho_{B} = \rho_{B}(X,Y)$ пределов прочности. Преобразуем формулу (7):

$$\rho(r) = \rho(|X - Y|) = \frac{\frac{(\sigma^{\circ}(X)\sigma^{\circ}(Y) > < \sigma^{\circ}(X)^{2} >}{<\sigma^{\circ}(X)^{2} >} + \frac{ < S^{\circ}(X)^{2} >}{} + \frac{\sigma_{B}^{2}}{\sigma^{2}} + \frac{\sigma_{B}^{2}}{\sigma^{2}} < \frac{}{\sigma_{B}^{2}}}{\frac{<\sigma^{\circ}(X)^{2} >}{\sigma^{2}} + \frac{\sigma_{B}^{2}}{\sigma^{2}}}$$
(24)

В результате получим зависимость коэффициента корреляции функции прочности ρ(*r*) от коэффициента запаса прочности материала [*n*]:

$$\rho(r) = \frac{\rho_{\sigma}(r)k_{\sigma}^{2} + [n]^{2}\rho_{B}(r)k_{B}^{2}}{k_{\sigma}^{2} + [n]^{2}k_{B}^{2}}.$$
(25)

Volkov S. S. The effect of damage at an ensemble of microstructure points on the margin of safety in structurally heterogeneous materials // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 60–72. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.060-072.



ISSN 2410-9908

Формулы (23, 25) показывают также связь между величиной [*n*] и параметрами распределения случайных деформационных и прочностных свойств элементов микроструктуры.



Рис. 1. Зависимость коэффициента запаса прочности [*n*] и коэффициента корреляции ρ при изменяющемся соотношении коэффициентов вариации *k*_σ/*k*_w. Параметры линий 1, 2, 3, 4 указаны в тексте

На рис. 1 показана связь между коэффициентом корреляции функции прочности ρ и коэффициентом запаса прочности [*n*] при постоянных значениях параметров $\rho_{\sigma} = 0,5$; $\rho_B = 0,8$ и изменяющемся соотношении коэффициентов вариации: 1) $k_{\sigma}/k_w = 0,5$; 2) $k_{\sigma}/k_w = 0,7$; 3) $k_{\sigma}/k_w = 1, 2; 4$) $k_{\sigma}/k_w = 2$.

На рис. 2 представлено влияние параметров ρ_{σ} , ρ_B связь между коэффициентом корреляции функции прочности ρ и коэффициентом запаса прочности [*n*]. На рис. 2 *а* постоянны значения корреляции напряжений $\rho_{\sigma} = 0,6$ и соотношение $k_{\sigma}/k_w = 2$, при этом меняются значения корреляции пределов микроструктуры: 1) $\rho_B = 1$; 2) $\rho_B = 0,9$; 3) $\rho_B = 0,8$; 4) $\rho_B = 0,7$. На рис. 2 *б* постоянны значения корреляции пределов микроструктуры $\rho_B = 0,6$ и соотношение $k_{\sigma}/k_w = 1,2$, при этом меняются значения корреляции напряжений: 1) $\rho_{\sigma} = 1$; 2) $\rho_{\sigma} = 0,9$; 3) $\rho_{\sigma} = 0,8$; 4) $\rho_{\sigma} = 0,7$. Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures



Рис. 2. Зависимость коэффициента запаса прочности [n] и коэффициента корреляции р при изменяющихся значениях коэффициентов корреляции $\rho_B(a)$ и $\rho_{\sigma}(\delta)$. Параметры линий 1, 2, 3, 4 указаны в тексте

Таким образом, расчеты по формуле (25) показывают существенное влияние параметров k_{σ} , k_{w} , ρ_{σ} , ρ_{B} на вычисление плотностей распределения микроструктурных распределений случайных функций прочности (8) и расчетов повреженности (11) для различных ансамблей точек по формулам (15, 16, 18, 21).

8. Зависимость запаса прочности от поврежденности микроструктуры

Рассмотрим числовые примеры расчета критической поврежденности в двух, трех и четырех точках в зависимости от параметров распределения функции прочности микроструктуры и коэффициента запаса прочности. Пусть вычислены значения коэффициента вариации k (23) и коэффициента корреляции р (25) случайной функции прочности. Используя многомерные плотности распределений (14, 17, 21), вычисляем в каждом случае относительную микроструктурную поврежденность с помощью интегралов (15, 16, 22). На рис. 3 приведены результаты расчета поврежденности q([n]) в зависимости от запаса прочности [n] при $\rho = 0.8, k = 0.3.$

Свойства микроструктуры материала влияют на запас прочности и критическую поврежденность. Увеличение запаса прочности [n] соответствует уменьшению критической поврежденности q, допускаемой при работе конструкции. На запас прочности влияет также коррелированность характеристик микроструктуры при исследовании ансамбля точек. При одинаковом коэффициенте запаса прочности вероятность разрушения в двух точках выше, чем в трех и четырех точках. С возрастанием запаса прочности вероятность разрушения уменьшается для каждого ансамбля точек.



ISSN 2410-9908



Рис. 3. Зависимость коэффициента запаса прочности [n] и поврежденности q([n]) в двух точках (2), трех точках (3) и четырех точках (4)

9. Заключение

Разработана математическая модель для расчета запаса прочности деформируемых структурно-неоднородных материалов. Оцениваются вероятности возникновения зон разрушения для материалов со случайными свойствами элементов микроструктуры. Используется условие прочности, содержащее корреляционные функции микроструктурных напряжений. Конфигурация множества точек влияет на структуру корреляционных матриц многомерных нормальных законов распределения условия прочности. Показано влияние свойств микроструктуры и параметров распределения напряжений на уровень поврежденности и запаса прочности для одновременного разрушения в двух, трех и четырех элементах микроструктуры материала. Разработанные методы могут быть использованы для неразрушающего контроля конструкционных материалов.

Литература

1. Yokobori T. An Interdisciplinary Approach to Fracture and Strength of Solids. – Groningen : Wolters-Noordhoff Scientific LTD, 1968.

2. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композитных материалов / под ред. Ю. В. Соколкина. – М. : Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.

3. Volkova T. A., Volkov S. S. Microstructure damage related to stress- strain curve for grain composites // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2009. – Vol. 52, iss. 2. – P. 83–90. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2008.02.004.

4. Sih G. C. Fracture mechanics in retrospect in contrast to multiscaling in prospect // Proceedings of the 17-th National Conference of Italian Group of Fracture / ed. by A. Finelli and L. Nobile, Bologna, June 16–18, 2004. – P. 15–37.

5. Trusov P. V., Volegov P. S., Yanz A. Yu. Two-scale models of polycrystals: Evaluation of validity of Ilyushin's isotropy postulate at large displacement gradients // Physical Mesomechanics. – 2016. – Vol. 19, no. 1. – P. 21–34. – DOI: 10.1134/S1029959916010033.

6. Micromechanisms of Deformation and Fracture in a VT6 Titanium Laminate under Impact Load / N. S. Surikova, V. E. Panin, L. S. Derevyagina, R. Ya. Lutfullin, E. V. Manzhina, A. A. Kruglov, A. A. Sarkeeva // Phys. Mesomech. – 2015. – Vol. 18, no. 3. – P. 250–260. – DOI: 10.1134/S1029959915030091.





7. Microstructure and properties of low-carbon weld steel after thermomechanical strengthening / V. M. Schastlivtsev, T. I. Tabatchikova, I. L. Yakovleva, S. Yu. Klyueva, A. A. Kruglova, E. I. Khlusova, V. V Orlov // *The Physics of Metals and Metallography.* – 2012. – Vol. 113, no. 5. – P. 480–488. – DOI: 10.1134/S1029959915030091.

8. The Structural State and Properties of a Deposited Coating for An Internal Combustion Engine Valve / N. B. Pugacheva, T. M. Bykova, E. B. Trushina, I. Yu. Malygina // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 5. – P. 74–85. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.5.074-085. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-5/2018-5_186.html (accessed 30.11.2019).

9. Зайцев А. В. Моментные функции второго порядка случайной структуры однонаправленно армированных волокнистых композитов // Вестник УГТУ-УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение : сборник научных трудов. – Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2006. – № 11 (82). – С. 161–167.

10. A Computational Model of V95/sicp (7075/ Sicp) Aluminum Matrix Composite Applied to Stress-Strain State Simulation under Tensile, Compressive and Shear Loading Conditions / S. V. Smirnov, A. V. Konovalov, M. V. Myasnikova, Yu. V. Khalevitsky, A. S. Smirnov, A. S. Igumnov // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2017. – Iss. 6. – P. 16–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.6.016-027. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-6/2017-6_133.html (accessed 14.10.2019).

11. Scientific Basis for Cold Brittleness of Structural BCC Steels and Their Structural Degradation at Below Zero Temperatures / V. E. Panin, L. S. Derevyagina, M. P. Lebedev, A. S. Syromyatnikova, N. S. Surikova, Yu. I. Pochivalov, B. B. Ovechkin // Phys. Mesomech. – 2017. – Vol. 2 (2). – P. 125–133. – DOI: 10.1134/S1029959917020023.

12. Structure and Fatigue Durability of 09mn2si Pipe Steel after Long-Term Operation in Far North Conditions / S. V. Panin, P. O. Marushchak, I. V. Vlasov, A. V. Eremin, A. V. Byakov, A. S. Syromyatnikova, R. Stankevich // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2017. – Iss. 4. – P. 81–85. – DOI: 10.17804/2410-9908.2017.4.081-085. – URL: http://dream-journal.org/issues/2017-4/2017-4_164.html (accessed 14.10.2019).

13. A Method for Experimental Investigation of Degradation Processes in Materials [Electronic resource] / V. I. Mironov, I. G. Emelyanov, D. I. Vichuzhanin, I. S. Kamantsev, V. V. Yakovlev, D. A. Ogorelkov, L. M. Zamaraev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 2. – P. 16–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.016-027. – URL: http://dream-journal.org/issues/2019-2/2019-2_246.html (accessed 30.11.2019).

14. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.

15. Volkova T. A., Volkov S. S. Microstructure damage at ensemble of points for grain composites // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2010. – Vol. 54, iss. 3. – P. 149–155. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2010.10.010.

16. Мак Лин Д. Механические свойства металлов / пер. с англ. Л. И. Миркина ; под ред. Я. Б. Фридмана. – Москва : Металлургия, 1965. – 431 с.


Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 5, 2019



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Received: 22.01.2019 Revised: 27.09.2019 Accepted: 25.10.2019 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080

ANALYSIS OF TWO CREEP RUPTURE MODELS

V. V. Nazarov

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

D https://orcid.org/0000-0002-9234-3646; 🖾 inmec130@mail.ru

Corresponding author. E-mail: inmec130@mail.ru Address for correspondence: 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

Various invariants of the stress tensor (maximum normal stress, Mises equivalent stress, doubled maximum tangential stress) are considered, as well as their linear combinations with one material parameter, when approximating the experimental creep rupture data obtained under a complex stress state. The error of the total discrepancy between the experimental data and the approximating values is always less for linear combinations with the material parameter than for the basic invariants of the stress tensor. This determines the predominant practical use of these linear combinations with the parameter. In this paper, we consider two models for describing the creep-rupture process under a complex stress state. One is a linear combination of the Mises equivalent stress and the maximum normal stress. The other is a linear combination of the doubled maximum tangential stress and the maximum normal stress. The effect of each of the two maximum stresses on the rupture time is established from the analysis of the results of the statistical processing of experimental data obtained under tension and torsion of tubular specimens.

Keywords: creep rupture, rupture time, complex stress state, stress tensor invariant.

References

1. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V. Kinetic approach of investigation of creep-rupture for metals under biaxial tension. *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2005, no. 10 (26), pp. 73–79. (In Russian).

2. Lokoshchenko A.M. and Nazarov V.V. Choice of Long-Term Strength Criteria for Metals in Combined Stress State. *Aerospace Engineering and Technology*, 2004, no. 7 (15), pp. 124–128. (In Russian).

3. Lokoshchenko A.M. Estimation of Equivalent Stresses in the Analysis of Long-Term Strength of Metals under Combined Stress State. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 633–647. DOI: 10.3103/S0025654410040126.

4. Lebedev A.A. The theory of equivalent stresses as a problem of mechanics of materials. *Strength of Materials*, 1996, vol. 28, no. 2, pp. 94–108. DOI: 10.1007/BF02215833.

5. Dyson B.F., Mclean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension. *Metal Science*, 1977, vol. 11, iss. 2, pp. 37–45. DOI: 10.1179/msc.1977.11.2.37.

6. Cane B.J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses. In: *Proc. 5th Int. Conf. Fract.*, Cannes, 1981, vol. 3, pp. 1285–93.

7. Nazarov V.V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens. *Inorganic Materials*, 2014, vol. 50, no. 15, pp. 1514–1515. DOI: 10.1134/S0020168514150138.

8. Nazarov V.V. Description of Steady Creep under Tension and Torsion of Tubular Samples. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2015, vol. 81, no. 7, pp. 60–61. (In Russian).



ISSN 2410-9908

http://dream-journal.org

Подана в журнал: 22.01.2019 УДК 620.172.2:620.162.3:539.376 DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080

АНАЛИЗ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

В. В. Назаров

Научно-исследовательский институт механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова» Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация

D https://orcid.org/0000-0002-9234-3646; 🙆 inmec130@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: inmec130@mail.ru Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация

При аппроксимации опытных данных длительной прочности, полученных в условиях сложного напряженного состояния, рассматривают различные инварианты тензора напряжений (максимальное нормальное напряжение, интенсивность напряжений удвоенное максимальное касательное напряжение), а также их линейные комбинации с одним материальным параметром. Погрешность суммарного расхождения экспериментальных данных и аппроксимирующих значений всегда меньше для линейных комбинаций с материальным параметром, чем для базовых инвариантов тензора напряжений, что предопределяет преимущественное использование на практике этих линейных комбинаций с материальным параметром. В работе рассмотрены две модели описания процесса длительной прочности при сложном напряженном состоянии: первая (1) – линейная комбинация интенсивности напряжений и максимального нормального напряжения, вторая (2) – линейная комбинация удвоенного максимального напряжения сдвига и максимального нормального напряжения. Из анализа результатов статистической обработки экспериментальных данных, полученных при растяжении и кручении трубчатых образцов, установлено влияние каждого из двух максимальных напряжений на время разрыва, а также преимущество использования одной из двух этих моделей.

Ключевые слова: длительная прочность, время в момент разрушения, сложное напряженное состояние, инвариант тензора напряжений.

1. Введение

Для описания процесса длительной прочности при сложном напряженном состоянии используют два подхода [1, 2]. Кинетический подход [1] описывает процесс длительной прочности в условиях воздействия растягивающих главных напряжений. Главные напряжения, которые равны нулю или меньше нуля, не принимают участие в процессе накопления повреждений и не учитываются при описании процесса длительной прочности. Для главных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ абсолютная величина вектора поврежденности $\omega(t) = \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t)}$, при этом в начальный момент времени $\omega|_{t=0} = 0$ и в момент времени разрушения $\omega|_{t=t_{max}} = 1$, где t – время процесса ползучести. Скорости накопления вектора компонент повреждений пропорциональны соответствующим главным напряжениям: $d\omega_1/dt \sim \sigma_1$; $d\omega_2/dt \sim \sigma_2$; $d\omega_3/dt \sim \sigma_3$. При двухосном растяжении главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ и абсолютная величина вектора накопления повреждений принимает значение $\omega(t) = \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}$. Тем не менее кинетический подход [1] бесполезен для описания процесса длительной прочности при растяжении и кручении трубчатых образцов, при котором главные напряжения $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$. Между тем, критериальный подход [2, 3] описывает процесс длительной прочности при таком сложном напряженном состоянии ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$). Суть подхода [2, 3] заключается в том, что для аппроксимации времени разрушения используются различные инварианты тензора напряжений: максимальное нормальное напряжение σ_{max} , интенсивность напряжений σ_{mises} , удвоенное максимальное касательное напряжение $2\tau_{\text{max}}$, а также их линейные комбинации с параметром. Все эти инварианты тензора напряжений при одноосном растяжении оказываются равными максимальному нормальному напряжению, что означает $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{mises}} = 2\tau_{\text{max}}$. При сложнонапряженном состоянии инварианты тензора напряжений различные значения, при этом линейные комбинации инвариантов тензора напряжений с параметром позволяют лучше описать процесс длительной прочности, чем базовые инварианты тензора напряжений [2, 3].

2. Две рассматриваемые модели

Из анализа [2, 3] погрешностей суммарного расхождения опытных данных, полученных в условиях совместного растяжения и кручения трубчатых образцов относительно аппроксимирующих значений, установлено, что из числа рассмотренных инвариантов тензора

напряжений минимальная погрешность соответствует линейной комбинации σ_{inv}^{1} [4]

$$\sigma_{\text{inv}}^{1} = [1 - \beta_{1}]\sigma_{\text{mises}} + \beta_{1}\sigma_{\text{max}}, \quad 0 \le \beta_{1} \le 1,$$
(1)

где β_1 – параметр, учитывающий влияние интенсивности напряжений и максимального нормального напряжения на время в момент разрушения. В силу того, что интенсивность напряжений – только математическая характеристика тензора напряжений, а максимальное напряжение сдвига – реальная физическая величина, то взамен интенсивности напряжений аналогично (1) рассмотрим удвоенное максимальное напряжение сдвига

$$\sigma_{\rm inv}^2 = [1 - \beta_2] [2\tau_{\rm max}] + \beta_2 \sigma_{\rm max}, \quad 0 \le \beta_2 \le 1,$$
(2)

где β_2 – параметр, учитывающий влияние удвоенного максимального напряжения сдвига и максимального нормального напряжения на время в момент разрушения. Влияние инвариантов тензора напряжений на время в момент разрушения определяется значениями параметров β_1 и β_2 (табл. 1).

Параметры напряжений	$\sigma_{ m max}$	$2 au_{ m max}$	$\sigma_{ m mises}$
$0\leq\beta_1<0,5$	Слабое влияние	-	Сильное влияние
$0,5 < \beta_1 \le 1$	Сильное влияние	—	Слабое влияние
$0\leq\beta_2<0,5$	Слабое влияние	Сильное влияние	_
$0,5 < \beta_2 \le 1$	Сильное влияние	Слабое влияние	_

Таблица 1 – влияние различных инвариантов тензора напряжений на время в момент разрушения

Nazarov V.V. Analysis of two creep rupture models // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 73–80. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080.



ISSN 2410-9908

3. Экспериментальные данные и методика статистической обработки

Определим значения параметров β_1 и β_2 вместе с погрешностями Δ_1 и Δ_2 для выражений (1) и (2). Из анализа погрешностей можно определить преимущество одной из двух линейных комбинаций (1) и (2). С этой целью проведем статистическую обработку экспериментальных данных (табл. 2), полученных при растяжении и кручении трубчатых образцов. Между временем разрыва t_{rupt}^{approx} и инвариантом σ_{inv} тензора напряжений примем степенную связь с двумя материальными параметрами:

$$\frac{t_{\text{rupt}}^{\text{approx}}}{t_{\text{dim}}} = B \left[\frac{\sigma_{\text{inv}}}{\sigma_{\text{dim}}} \right]^{-m}, \quad B > 0, \quad m > 0,$$
(3)

где $\sigma_{inv} - \sigma_{inv}^1$ или σ_{inv}^2 ; $t_{dim} = 1$ ч и $\sigma_{dim} = 1$ МПа – произвольные размерные величины, *B*; *m* – материальные параметры.

Автор	Металлический материал	Высокая температура, <i>t</i> , °С	Количество опытов для различных типов стационарного нагружения		
			Чистое растяжение	Чистое кручение	Совместное растяжение и кручение
Dyson [5]	Никелевый				
	сплав	750	8	9	—
	Nimonic 80a				
Cane [6]	Сталь 2,25Cr-1Mo	565	6	4	_
Назаров [7]	Отожженная медь	264	2	_	3

Таблица 2 – Экспериментальные данные для статистической обработки

Базовые инвариантные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \sigma_{\min} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2}, \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{4}$$

Главные напряжения [8] при растяжении и кручении трубчатых образцов

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma}{2}\right]^2 + \tau^2}, \tag{5}$$

где σ – нормальное напряжение; τ – касательное напряжение. Неизвестные параметры аппроксимации процесса длительной прочности определяются минимальной погрешностью, равной сумме расстояний экспериментальных точек относительно отрезка аппроксимирующей прямой в логарифмических осях

$$\Delta = \min\left(\sum_{1}^{N} \left| lg \frac{t_{\text{rupt}}^{\text{approx}}(\sigma_{\text{inv}})}{t_{\text{rupt}}^{\text{approx}}(\sigma_{\text{inv}})} \right| \right), \tag{6}$$

Nazarov V.V. Analysis of two creep rupture models // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. - 2019. - Iss. 5. - P. 73-80. - DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080.



где N – количество опытных точек; t_{rupt}^{exper} – время разрушения из эксперимента. Вычисления проводились методом Generalized Reduced Gradient (Microsoft Excel), при этом погрешности Δ_1 и Δ_2 использовались в качестве целевых условий минимального суммарного расхождения между экспериментальными данными и аппроксимирующими значениями.

4. Анализ результатов

Из анализа вычисленных параметров (табл. 3–4) следует, что для одной и той же серии испытаний они незначительно отличаются друг от друга. Разные значения параметра β_2 указывают на различное влияние максимальных напряжений на время в момент разрушения.

Металлический материал	Высокая температура <i>t</i> , °С	$\lg B_1$	<i>m</i> ₁	eta_1
Никелевый	750	13,844	4,9	0,5
сплав				
Nimonic 80a				
Сталь	565	11,262	3,8	0,7
2,25Cr-1Mo				
Отожженная	264	7,712	3,0	0,0
медь				

Таблица 3 – вычисленные параметры линейной комбинации σ_{inv}^1

Таблица 4 – Вычисленные параметры линейной комбинации σ_{inv}^2

Металлический материал	Высокая температура, <i>t</i> , °C	$\lg B_2$	<i>m</i> ₂	β_2
Никелевый	750	13,505	4,7	0,6
сплав				
Nimonic 80a				
Сталь	565	11,179	3,8	0,8
2,25Cr-1Mo				
Отожженная	264	7,812	3,0	0,0
медь				

Этот эффект, скорее всего, не зависит от вклада нормального σ и касательного τ напряжений в максимальное нормальное напряжение σ_{max} и удвоенное максимальное касательное напряжение $2\tau_{\text{max}}$. Это объясняется тем, что равенство $2\tau_{\text{max}} = \sigma_{\text{max}}$ достигается либо при чистом растяжении ($\tau = 0$), либо при чистом кручении ($\sigma = 0$) трубчатого образца [5, 6]. Неравенство $2\tau_{\text{max}} > \sigma_{\text{max}}$ выполняется при совместном растяжении ($\sigma > 0$) и кручении ($\tau > 0$) трубчатого образца [7]. Неравенство $2\tau_{\text{max}} \ge \sigma_{\text{max}}$ (это означает $\beta_2 < 0,5$) выполняется при любом сложном напряженном состоянии, при этом наблюдается противоречие $\beta_2 > 0,5$ для сплава Nimonic 80a и стали 2,25Cr-1Mo (табл. 4). Из анализа значений β_2 следует, что в экспериментах [5, 6] максимальное нормальное напряжение σ_{max} оказывает более существенное влияние на время разрушения, чем удвоенное максимальное касательное напряжение $2\tau_{\text{max}}$. Добавление



http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

параметра (β_1 или β_2) в инвариант тензора напряжений, за исключением [7], приводит к уменьшению погрешности (табл. 5). Экспериментальные точки располагаются вдоль отрезка аппроксимирующей линии (рис. 1 и 2). Таким образом, модели 1 и 2 одинаково хорошо описывают процесс длительной прочности при сложном напряженном состоянии.

Таблица 5 – Погрешности суммарных расхождений опытных данных относительно аппроксимирующих значений для инвариантов тензора

напряжений $\sigma_{\rm max}$, $\sigma_{\rm mises}$, $2\tau_{\rm max}$, $\sigma_{\rm inv}^1$, $\sigma_{\rm inv}^2$

High Metallic $\Delta_{2\tau_{\max}}$ temperature $\Delta_{\sigma_{
m mises}}$ $\Delta_{\sigma_{\max}}$ Δ_1 Δ_2 material t, °C Nimonic 80a 750 4,3 4,3 6,6 1,6 1,7 2,25Cr-1Mo 1.6 2,5 3.2 0.7 565 0.7 0.5 0.5 Copper 264 0.6 0.3 0.3



Рис. 1. Зависимости напряжения *1* от времени в момент разрушения: Nimonic 80a при 750 °С (*a*); 2,25Сr-1Мо при 565 °С (*б*); медь при 264 °С (*c*); крестики – опытные данные;

отрезок прямой – аппроксимация
$$\lg \left(\frac{\sigma_{\text{inv}}^1}{\sigma_{\text{dim}}} \right) = \frac{\lg B_1 - \lg \left(\frac{t_{\text{rupt}}^{\text{approx}}}{t_{\text{dim}}} \right)}{m_1}$$

Nazarov V.V. Analysis of two creep rupture models // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. - 2019. - Iss. 5. - P. 73-80. - DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080.



Рис. 2. Зависимости напряжения 2 от времени в момент разрушения: Nimonic 80a при 750 °С (*a*); 2,25Cr-1Mo при 565 °С (*б*); медь при 264 °С (*c*); крестики – опытные данные;

отрезок прямой – аппроксимация
$$\lg \left(\frac{\sigma_{\text{inv}}^2}{\sigma_{\text{dim}}}\right) = \frac{\lg B_2 - \lg \left(\frac{t_{\text{rupt}}^{\text{approx}}}{t_{\text{dim}}}\right)}{m_2}$$

5. Обсуждение

Из анализа результатов вычислений (табл. 3, 4) следует, что отношение $2\tau_{\text{max}} / \sigma_{\text{max}}$ не определяет влияние максимальных напряжений на время в момент разрушения. Можно предположить, что это влияние может зависеть от механизма процесса ползучести. Механизм межзернового проскальзывания осуществляется под действием σ_{max} при $0 \le \beta_2 < 0.5$. Механизм перемещения дислокаций внутри зерен реализуется под действием $2\tau_{\text{max}}$ при $0.5 \le \beta_2 < 1$. Из анализа погрешностей (табл. 5) следует, что аппроксимация времени в момент разрушения лучше достигается линейными комбинациями *1* и 2, чем базовыми инвариантами тензора напряжений. Между тем существенного преимущества одной из двух этих моделей не обнаружено.

Литература

1. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двухосном растяжении // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – № 10 (26). – С. 73–79.

2. Локощенко А. М., Назаров В. В. Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 7 (15). – С. 124–128.

Nazarov V.V. Analysis of two creep rupture models // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. - 2019. - Iss. 5. - P. 73-80. - DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.073-080.



http://dream-journal.org

4. Lebedev A. A. The theory of equivalent stresses as a problem of mechanics of materials // Strength of Materials. – 1996. – Vol. 28, no. 2. – P. 94–108. – DOI: 10.1007/BF02215833.

5. Dyson B. F., Mclean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension. *Metal Science*. – 1977. – Vol. 11, iss. 2. – P. 37–45. – DOI: 10.1179/msc.1977.11.2.37.

6. Cane B.J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses // Proc. 5th Int. Conf. Fract., Cannes, 1981. – 1981. – Vol. 3. – P. 1285–93.

7. Nazarov V.V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens // Inorganic Materials. – 2014. – Vol. 50, no. 15. – P. 1514–1515. – DOI: 10.1134/S0020168514150138.

8. Назаров В. В. Описания установившейся ползучести при растяжении и кручении трубчатых образцов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2015. – Т. 81, № 7. – С. 60–61.